CONSTRUCCIÓN DE UNA "FRONTERA EFICIENTE"
DE ACTIVOS FINANCIEROS EN MÉXICO

Alcides José Lasa

1. Introducción

Con su artículo de 1952 Harry Markowitz inició lo que ahora se reconoce como una revolución, tanto por su impacto en la transformación del sistema de intermediación financiera así como por haber desatado una profunda renovación en la investigación científica dentro del campo de la economía financiera, centrada en la gestión del riesgo.

El tema desarrollado por Markowitz, se refiere a la selección de inversiones, es decir, al problema de cómo asignar los recursos líquidos entre las diversas opciones disponibles para tal efecto.[1] Antes de que se popularizara el enfoque de Markowitz, la selección de inversiones implicaba un costoso proceso de recopilación y procesamiento de información muy diversa acerca de las empresas emisoras de activos, fundamentalmente acciones. Esta información consistía, entre otras cosas, de balances y estados financieros, situación de la empresa dentro de la industria y de ésta dentro de la economía en su conjunto, calidad de la gestión de la empresa, políticas de dividendos, etc. El enfoque de Markowitz simplificó notablemente el problema de selección de inversiones al considerar los rendimientos de los activos como un proceso estocástico y centrarse exclusivamente en la estadística de los resultados de las empresas emisoras y, más específicamente, en tres parámetros básicos de estas estadísticas: media, varianza y covarianzas de las tasas de rendimiento de los activos.[2]

[1] Aunque el enfoque es suficientemente general como para ser aplicado a todo tipo de decisión de inversión.
[2] En este trabajo tasa de rendimiento significa la tasa proporcional de variación del precio de un activo. Cuando no haya posibilidad de confusión y para aligerar el lenguaje, en algunos casos hablaremos de rendimiento a secas para referirnos a este concepto.

Markowitz advirtió que el problema de selección de inversiones implicaba la noción central de incertidumbre (o riesgo)[3] lo cual significaba reconocer que cualquier inversión financiera tiene más de un resultado posible en términos de rendimiento y que, en el mejor de los casos, sólo es posible conocer o inferir una distribución de probabilidades para el resultado de la misma. Si no existiera incertidumbre todos los inversionistas invertirían en el activo que ofreciera la más alta tasa de rendimiento, lo que equivale a decir que sólo podía existir un único activo de inversión. Por otro lado, si se considera sólo el valor esperado de los rendimientos, la inversión escogida sería aquel activo que tuviese el valor esperado más alto. En ambos casos, no se plantearía el problema de la diversificación de activos. Por otra parte, el contexto de incertidumbre en el que se da necesariamente el proceso de inversión, requiere incorporar alguna hipótesis del comportamiento del inversionista cuando se enfrenta a las opciones de inversión desconociendo con certeza el resultado futuro de las mismas.

El inversionista típico de Markowitz busca la más alta expectativa de rendimiento y el riesgo más bajo posible y está dispuesto a intercambiar riesgo por rendimiento. En los términos actuales, es la descripción de una persona con "aversión" al riesgo. Es fácil cuantificar el rendimiento **esperado** de una inversión si se conocen los valores iniciales y finales **esperados** de la misma. En cuanto al riesgo financiero, desde Markowitz se acepta que una medida de ella es la varianza (o desviación estándar) de los rendimientos. Puesto que normalmente no es posible encontrar activos que al mismo tiempo tengan los rendimientos esperados más altos y el riesgo más bajo, el inversionista se encuentra en un dilema entre rendimiento y riesgo que se resuelve dependiendo de la tasa personal a la que él está dispuesto

[3] En economía se suelen diferenciar los conceptos de riesgo e incertidumbre. Se usa el concepto de riesgo para aquellos procesos que son susceptibles de tratamiento probabilístico, mientras que incertidumbre se reserva para fenómenos inciertos pero que por su naturaleza no pueden ser investigados con probabilidades derivadas de registros históricos o subjetivos. De acuerdo con esta conceptualización, este trabajo se ocupa del riesgo, pero aquí no haremos ninguna distinción..

a intercambiar riesgo por rendimiento. El análisis reconoce que no todos los inversionistas tienen el mismo grado de hostilidad al riesgo y, por lo tanto, la tasa a la que cada inversionista prefiere canjear más riesgo por más rendimiento es variable y subjetiva.[4]

El planteamiento singular de Markowitz tuvo como pilares estos tres conceptos claves: (a) el resultado (rendimiento) de una inversión debe ser tratado como un fenómeno estocástico, (b) el inversionista típico actúa con aversión al riesgo, (c) El riesgo y el rendimiento esperados de los activos de inversión tienen medidas estadísticas en la media y la varianza de una distribución. La simple observación de la literatura actual y de la práctica de la inversión financiera nos permite comprobar el profundo y duradero impacto de la innovación producida por el trabajo de Markowitz. Sin embargo, su contribución específica más notoria consistió en el desarrollo de un método de selección de inversiones estrictamente para un periodo, en un contexto de incertidumbre y para inversionistas con aversión al riesgo: el enfoque ahora conocido como media – varianza.

El resultado más importante del enfoque de Markowitz es que permite deducir combinaciones de activos (portafolios) que simultáneamente cumplen con dos condiciones: (a) tienen la varianza mínima dentro de todas las combinaciones posibles que tienen un rendimiento esperado dado y (b) tienen el rendimiento esperado máximo dentro de todas las combinaciones posibles que tienen una varianza dada. Aquellas combinaciones que reúnen estos dos atributos se llaman portafolios "eficientes" y el conjunto de portafolios eficientes es conocido como la "frontera de portafolios eficientes". Los portafolios eficientes "dominan"[5] a todos los que no lo son y por ello este resultado reduce drásticamente el número de

[4] Este tema, ampliamente discutido con las llamadas funciones de utilidad, está más allá de los propósitos de .este ensayo.

[5] Una oportunidad de inversión domina a otra si la primera tiene una expectativa de rendimiento mayor con igual o inferior varianza o una varianza inferior con igual o mayor expectativa de rendimiento.

posibilidades de inversión a escoger por un inversionista hostil al riesgo y que toma una decisión de manera racional, es decir, considerando los parámetros de riesgo y rendimiento.

El objetivo principal de este trabajo es hacer un ejercicio de aplicación del enfoque de selección de portafolio al caso de México utilizando una herramienta computacional al alcance de los estudiantes de economía. Objetivos secundarios pero importantes desde nuestro punto de vista, son los hacer una breve presentación del marco teórico así como de la parte más técnica u operativa del enfoque media – varianza con el propósito de que este ensayo pueda ser utilizado como instrumento docente. Pretendemos que esta exposición permita a los interesados, especialmente los estudiantes, reproducir con información actualizada el ejercicio que aquí se lleva a cabo.

Seguimos el siguiente orden de exposición: Hacemos una breve presentación del enfoque media – varianza con énfasis especial en los temas de formalización matemática y resolución del problema de construcción de la curva de varianza mínima y la frontera eficiente de portafolios de inversión considerando n activos con riesgo y suponiendo que la “venta en corto” es factible, es decir, sin imponer la llamada condición de no negatividad. Se incorpora luego un activo de inversión libre de riesgo como parte de los activos en los que se puede invertir para deducir así una nueva frontera eficiente que simplifica notablemente el problema. Este resultado implica encontrar un portafolio compuesto exclusivamente de activos con riesgo que llamamos el portafolio de tangencia. Dado que en la práctica financiera y de los fondos de inversión las posibilidad de operar con ventas en corto está seriamente limitada, se revisa la discusión del enfoque media – varianza financiera considerando como pertinente la restricción de no negatividad y se hace un ejercicio de construcción de una frontera eficiente utilizando información sobre precios de acciones de emisoras de empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores. Se explica en este punto el diseño y resultados del ejercicio. Algunos de estos resultados son comparados con el desempeño de fondos de inversión existentes en el mercado financiero mexicano.

2. Breve presentación del enfoque Media – Varianza

Como toda teoría, el enfoque de Markowitz tiene una serie de supuestos, algunos de ellos cuyo propósito es el de simplificar operativamente el desarrollo del tema:[6]

1. La selección de inversiones se refiere estrictamente para un periodo.
2. Las preferencias entre riesgo y rendimiento del inversionista pueden expresarse matemática o gráficamente en un espacio definido por la varianza o desviación estándar y la expectativa de rendimiento.
3. Existen en el mercado de capitales n activos con los cuales formar un portafolio (una combinación).
4. Para cada uno de estos activos se puede calcular la esperanza matemática del rendimiento, su varianza (o su desviación estándar) y las covarianzas de cada uno de los activos con respecto a cada todos los demás considerados de a pares. Estos son los únicos insumos necesarios del modelo.
5. Los activos son perfectamente divisibles, es decir, están disponibles en el mercado en fracciones.
6. Se ignoran todo tipo de costos de transacción, en particular, no se consideran impuestos ni comisiones.

[6] Nos concentramos en el caso más básico; algunos de estos supuestos se pueden levantar y construir modelos más especializados.

7. El mercado en el que se intercambian los activos es de competencia. No se consideran asimetrías de información o de poder de mercado.

Vamos a elaborar un poco más acerca del supuesto 4, los insumos estadísticos del modelo.

A. Las n esperanzas matemáticas (o medias) de rendimiento de los activos que se consideran posibles de integrar en un portafolio de inversión, se calculan normalmente a partir de observaciones históricas de tasas de rendimiento de esos activos. Una manera alternativa de construir las n tasas esperadas de rendimiento consiste en plantear escenarios para el periodo de inversión con su correspondiente probabilidad de ocurrencia y estimar luego las tasas esperadas de rendimiento para los activos en cada uno de esos escenarios. En cualquier caso tendremos n expectativas de rendimiento.

B. Se tienen n varianzas (o desviaciones estándar) de los rendimientos de los activos mencionados calculados según el punto anterior.

C. Se calculan las covarianzas de los rendimientos de todos los activos considerados de a pares, de modo que necesitaremos calcular [n (n – 1) / 2] covarianzas diferentes.

Nótese que esta información es todo lo que se necesita para resolver el problema de construcción del conjunto eficiente de posibilidades de inversión planteado por Markowitz.

La tasa **esperada** de rendimiento del portafolio para el siguiente periodo se define como:

$$E(r_p) = \tilde{r}_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \ \tilde{r}_i \qquad \textbf{(1)}$$

Donde $\tilde{r}_i = E(r_i)$ es la tasa esperada de rendimiento del activo i, w_i es la ponderación que el activo i tiene en el portafolio, de manera que $\tilde{r}_p = E(r_p)$, la tasa esperada de rendimiento del portafolio compuesto por n activos, es un promedio ponderado de los rendimientos de todos sus componentes. El resultado anterior puede obtenerse mediante una multiplicación vectorial:

$$\tilde{r}_p = W^T \tilde{R}_i \qquad \textbf{(1a)}$$

donde ahora W^T es el transpuesto del vector de las ponderaciones y $\tilde{R}_i$ es el vector de las tasas esperadas de rendimiento del portafolio.[7]

Es claro que la suma de las ponderaciones debe ser igual a la unidad, de manera que podemos definir como restricción del problema de selección de inversiones:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \qquad \textbf{(2)}$$

Si la única restricción es (2) debemos aceptar que pueden resultar ponderadores negativos, lo que implica reconocer la posibilidad de que un portafolio puede estar constituido por algunos componentes que en realidad son pasivos, algo que se debe, no que se posee. Esto es perfectamente factible en aquellos casos en que el carácter de las instituciones financieras permite las ventas en corto, es decir, la venta de un activo que ha sido tomado en préstamo y la utilización de este ingreso para la compra de otro activo. En este caso, el portafolio de inversión estará formado por algunos componentes cuyas ponderaciones son negativas y otros con ponderaciones superiores a la unidad sin dejar de satisfacer la restricción (2). Pero si la venta en corto no es factible o deseable, debemos agregar como restricción que todos los ponderadores deben ser no negativos, esto es:

$$w_i \geq 0 \qquad \mathbf{i = (1, 2, \ldots, n)} \qquad \textbf{(3)}$$

Se trata de la condición de no negatividad ya mencionada.[8]

---

[7] Para cualquier matriz o vector columna X, X^T es su transpuesto.

Por otra parte, la definición de la varianza del rendimiento del portafolio es:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_i\, w_k\ \sigma_{ik} \qquad \textbf{(4)}$$

La cual puede expresarse mediante el álgebra de matrices como:

$$\sigma_P^2 = W^T\ S\ W \qquad \textbf{(4a)}$$

siendo $S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$

la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos de los n activos y donde σ_{ik} es la covarianza de los rendimientos de los activos cuando $i \neq k$; cuando $i = k$ tenemos la covarianza del activo consigo mismo, lo que es igual a la definición de la varianza del rendimiento del activo. De manera que los elementos de la diagonal principal son las varianzas de los n activos y el resto las covarianzas. Puesto que $\sigma_{i\,k} = \sigma_{k\,i}$, la matriz S es una matriz simétrica.

La desviación estándar del rendimiento del portafolio es:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_i\, w_k\ \sigma_{ik}} = \sqrt{\sigma_p^2} \qquad \textbf{(5)}$$

Por otro lado, la covarianza entre dos activos puede definirse también como $\sigma_{ik} = \rho_{ik}\ \sigma_i\ \sigma_k$, donde ρ_{ik} es el coeficiente de correlación de los rendimientos de ambos activos. De manera que la desviación estándar del rendimiento del portafolio admite una expresión en términos del coeficiente de correlación como sigue:

[8] Este punto lo tratamos con detalle más adelante.

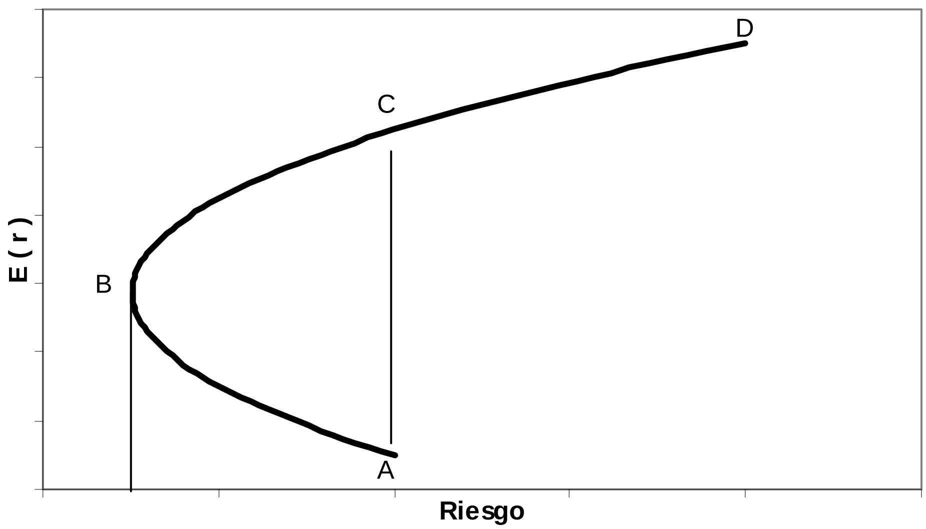
$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_i\, w_k\, \rho_{ik}\, \sigma_i\, \sigma_k} \qquad \textbf{(6)}$$

Esta expresión es analíticamente muy útil porque el coeficiente de correlación tiene un rango de fluctuación claramente acotado: $-1 \leq \rho \leq 1$. El coeficiente de correlación es una medida de como se comportan los rendimientos de los dos activos ante diversas circunstancias que los afectan. Cuando $\rho_{ik} = 1$, los rendimientos se mueven en el mismo sentido y de manera proporcional por lo cual se dice que hay correlación positiva perfecta. Cuando $\rho_{ik} = -1$, los rendimientos se mueven en sentidos opuestos y de tal manera que el movimiento ascendente de uno se compensa exactamente con el movimiento descendente del otro, por lo cual se tiene correlación negativa perfecta. Si $\rho_{ik} = 0$, los rendimientos de los dos activos no tienen relación alguna porque se mueven de manera independiente. El coeficiente de correlación de un activo consigo mismo es igual a la unidad, esto es, $\rho_{ii} = 1$.

Puede verse en (3), (4) o (5) la importancia que tiene en la dispersión de los rendimientos esperados del portafolio la covarianza o el coeficiente de correlación entre los activos. A igualdad de otras circunstancias, cuanto más bajo sea este parámetro menor será la desviación estándar del rendimiento del portafolio, es decir, su riesgo. Puesto que la expectativa de rendimiento del portafolio según (1) no depende del coeficiente de correlación, es muy significativa la contribución que puede hacer una baja correlación para el desempeño del portafolio en términos de reducir el riesgo sin afectar necesariamente el rendimiento.

Cualquiera que sea el valor del coeficiente de correlación, podemos representar las numerosas posibilidades de combinaciones entre los activos (en rigor son infinitas las posibilidades) en el plano de la desviación estándar (el riesgo) y la media (tasa de rendimiento esperada) de cualquier portafolio. Una descripción gráfica de la relación riesgo – rendimiento de las diversas combinaciones posibles de activos para un valor del coeficiente de correlación intermedio entre sus dos valores extremos $(-1 < \rho < 1)$ es típicamente la que vemos en la siguiente gráfica:

Gráfica 1



La línea ABCD es la llamada curva de varianza (o desviación estándar) mínima porque los puntos que la componen son aquellas combinaciones de activos que producen la varianza mínima para cada tasa de rendimiento. El punto B es la combinación que tiene varianza mínima de todas las combinaciones posibles y es llamado el punto de varianza mínima global. Podemos observar que en el segmento AB tenemos combinaciones que no serían escogidas bajo ninguna circunstancia por los inversionistas racionales de Markowitz, porque cualquier combinación del segmento BC le ofrece para cada nivel de riesgo una expectativa de rendimiento superior. Por otra parte, con este mismo criterio, es claro que las opciones que están al interior del conjunto delimitado por la curva de varianza mínima son opciones claramente inferiores a las que se encuentran en el tramo BD de la curva. Por esta razón, el tramo BD domina a todo el resto de combinaciones posibles y por ello se denomina la frontera eficiente de oportunidades de inversión. Puede constatarse que en ese tramo están las combinaciones de activos que ofrecen la varianza mínima para cada nivel dado de tasa de rendimiento y, simultáneamente, el rendimiento esperado máximo para cada nivel de riesgo. El inversionista podrá escoger entre estas combinaciones según su particular preferencia por el riesgo y rendimiento, pero en ningún caso escogerá una combinación en el tramo AB o las que se encuentran al interior del conjunto de oportunidades de inversión, porque cualquiera de ellas tiene un opción en la frontera eficiente que es superior en términos de riesgo y (o) rendimiento.

Cuando (2) es la única restricción del problema de selección de inversiones, cuando suponemos que la venta en corto es factible, resulta relativamente sencillo encontrar la curva de varianza mínima, el punto B de varianza mínima global y la frontera eficiente. Esto se puede hacer mediante un proceso de optimización, utilizando el método de multiplicadores de Lagrange y el álgebra matricial. Es lo que desarrollamos a continuación.

3. Construcción de la frontera eficiente con ventas en corto permitidas.

Recordemos que la frontera eficiente está constituida por todos aquellos portafolios o combinaciones de activos que simultáneamente cumplen con dos condiciones:

1. Tienen mínima varianza dentro de todas las combinaciones que tienen una tasa de rendimiento dada.
2. Tienen la tasa de rendimiento más alta dentro de todas las combinaciones posibles que tienen una varianza dada.

En términos de la grafica 1, son todas las combinaciones de activos que por su tasa esperada de rendimiento y varianza se ubican en la línea que va del punto B al D.

Las combinaciones que se ubican en la parte AB de la curva cumplen con la primera condición pero no la segunda, de manera que podemos desechar todas esas combinaciones por estar dominadas por otras combinaciones. Por esta razón, la ubicación del punto B, el punto de varianza mínima global, tiene importancia práctica para simplificar la búsqueda de las combinaciones eficientes, porque podemos plantear el problema de encontrar todas las combinaciones que tengan una tasa esperada de rendimiento superior a la que corresponde al punto B y que satisfagan la primera condición.

3.1 El punto de varianza mínima global

Para encontrar la combinación precisa de los n activos (el vector W) que produce el portafolio de varianza mínima global se plantea el siguiente problema de optimización restringida:

$$\text{Min } \frac{1}{2}\ \sigma_p^2$$

$$\text{s.a} \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Nótese que minimizamos la expresión $\frac{1}{2}\sigma_p^2$ y no σ_p^2 porque produce el mismo resultado y nos facilita la expresión y resolución matemática. Este problema de optimización se resuelve fácilmente mediante la técnica de multiplicadores de Lagrange:

La función lagrangeana es:

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}w_i\,w_k\;\sigma_{ik}+\lambda\left(1-\sum_{i=1}^{n}w_i\right)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange.

La condición de primer orden para obtener los puntos críticos consiste en derivar parcialmente respecto a los n ponderadores (w_i) y respecto al multiplicador de Lagrange, luego igualamos a cero y podemos despejar los n valores w y λ.

$$\frac{\partial L}{\partial w_1}=w_1\sigma_{11}+w_2\sigma_{12}+...+w_3\sigma_{13}-\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2}=w_1\sigma_{21}+w_2\sigma_{22}+...+w_3\sigma_{23}-\lambda=0$$

.

.

.

$$\frac{\partial L}{\partial w_n}=w_n\sigma_{n1}+w_2\sigma_{n2}+...+w_3\sigma_{n3}-\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=w_1+w_2+\ldots+w_n-1=0$$

Con una ligera manipulación algebraica, podemos representar la condición de primer orden como un sistema de n + 1 ecuaciones y el mismo número de incógnitas, el cual se expresa en el álgebra de matrices como:

V1 W1 = B1 (7)

Donde:

$$\mathbf{V1} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \mathbf{W1} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_2 \\ \lambda \end{pmatrix} \; ; \quad \mathbf{B1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Premultiplicando a ambos lados de (7) por la matriz inversa de VI, la cual debe ser una matriz no singular:

$$\mathbf{V1}^{-1} \; \mathbf{V1} \quad \mathbf{W1} \quad = \quad \mathbf{V1}^{-1} \; \mathbf{B1}$$

De manera que el vector de incógnitas del problema de optimización es:

$$\mathbf{W1} = \mathbf{V1}^{-1} \; \mathbf{B1} \qquad (8)$$

El vector W1 que hemos encontrado corresponde a las ponderaciones que debe tener cada uno de los n activos en el portafolio que produce la varianza más baja de todos los portafolios que se pueden construir con esos activos, más el valor del multiplicador λ.[9] Puesto que también conocemos, porque son datos del problema, las tasas esperadas de rendimiento de cada uno de esos activos, podemos conocer el rendimiento esperado del portafolio de varianza mínima aplicando (1) o (1a) y la varianza del mismo aplicando (4) o (4a). Así, ubicamos el punto B en el espacio-riesgo rendimiento. A la tasa esperada de rendimiento del portafolio de varianza mínima global, le llamamos $\tilde{r}_{pm}$.

3.2 La frontera eficiente

[9] La condición (7) es una condición necesaria, pero no suficiente para establecer que el vector de solución es un mínimo. En este trabajo no verificamos la condición de segundo orden mediante los determinantes hessianos.

Una vez que tenemos las coordenadas del punto de varianza mínima global, lo que tenemos es un problema de optimización muy similar al anterior, aunque ahora debemos agregar una restricción adicional. El problema consiste en encontrar las combinaciones de los n activos que producen varianza mínima para una tasa esperada de rendimiento dada, tal que ella sea superior a $\tilde{r}_{pm}$. Repitiendo este procedimiento para distintas tasas esperadas de rendimiento encontraremos los portafolios que dibujan la frontera eficiente, es decir el tramo de la curva BD de la gráfica 1.

Formalmente, el problema de optimización restringida consiste ahora en los siguiente:

$$\min \frac{1}{2}\sigma_p^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_i\, w_k\, \sigma_{ik}$$

$$\text{sujeto a: } \bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} w_i\, \tilde{r}_i$$

$$1 = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

donde $\bar{r}_p$ es una tasa de rendimiento arbitrariamente escogida pero superior a $\tilde{r}_{pm}$.

Planteamos el Lagrangeano como:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_i\, w_k\, \sigma_{ik} + \lambda\left(\bar{r}_p - \sum_{i=1}^{n} w_i\, \tilde{r}_i\right) + \gamma\left(1 - \sum_{i=1}^{n} w_i\right)$$

Las condiciones de primer orden para un mínimo son:

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = w_1\sigma_{11} + w_2\sigma_{12} + ... + w_3\sigma_{13} - \lambda\tilde{r}_1 - \gamma = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = w_1\sigma_{21} + w_2\sigma_{22} + ... + w_3\sigma_{23} - \lambda\tilde{r}_2 - \gamma = 0$$

.

.

.

$$\frac{\partial L}{\partial w_n} = w_n\sigma_{n1} + w_2\sigma_{n2} + ... + w_3\sigma_{n3} - \lambda\tilde{r}_n - \gamma = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w_1\tilde{r}_1 + w_2\tilde{r}_2 + \ldots + w_n\tilde{r}_n - \overline{r}_p = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = w_1 + w_2 + \ldots + w_n - 1 = 0$$

La condición de primer orden es un sistema de n + 2 ecuaciones lineales con igual número de incógnitas: los n valores de w, y los dos multiplicadores λ y γ. Este sistema se puede expresar mediante el álgebra de matrices como sigue:

V2 W2 = B2 (9)

Donde:

$$\mathbf{V2} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \cdots & \sigma_{2n} & \tilde{r}_1 & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} & \tilde{r}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & \tilde{r}_n & 1 \\ \tilde{r}_1 & \tilde{r}_2 & \cdots & \tilde{r}_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W2} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \\ \gamma \end{pmatrix}; \quad \mathrm{B2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \overline{r}_p \\ 1 \end{pmatrix}$$

Premultiplicando ambos lados de (9) por la inversa de V2 (que debe ser no singular), nos queda:

$$V2^{-1}\ V2\ W2 = V2^{-1}\ B2$$

De manera que el vector solución es:

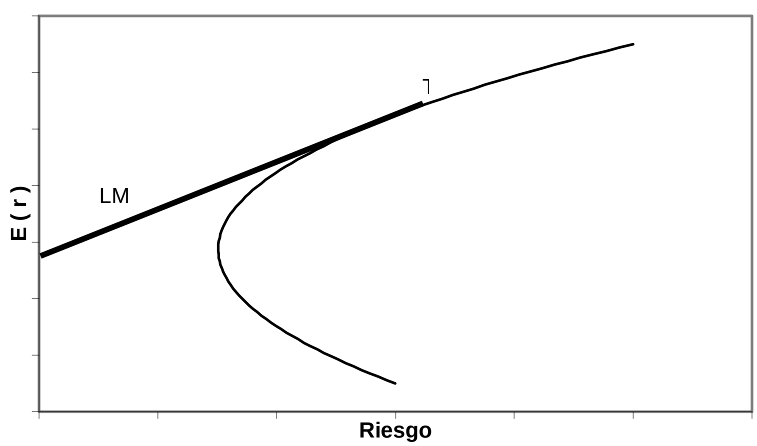
$$W2 = V2^{-1}\ B2 \qquad (10)$$

La solución del sistema nos da, además de los dos multiplicadores de Lagrange, las proporciones que hay que invertir en cada uno de los n activos para obtener la tasa de rendimiento $\bar{r}_p$ y que ese portafolio tenga la varianza mínima dentro de todos los portafolios que tienen esa tasa esperada de rendimiento. Si repetimos el procedimiento anterior para un conjunto de valores distintos de $\bar{r}_p$ que sean superiores a $\tilde{r}_{pm}$, podemos tener un número suficientemente grande de portafolios que forman parte de la frontera eficiente. Puesto que entre dos números siempre hay otro, el número de pruebas posibles es infinito; la cantidad de pruebas que se deban hacer dependerá del interés y objetivos del investigador.

4. La incorporación de un activo libre de riesgo

Cuando el inversionista tiene a su disposición un activo de los considerados libres de riesgo se produce una modificación brusca del conjunto de combinaciones dominantes o eficientes. Se puede explicar con claridad de manera gráfica como se replantea el problema. Ahora tenemos un conjunto de n activos con riesgo y un activo al que podemos considerar de riesgo cero. Usualmente se considera un bono gubernamental con valor nominal fijo al vencimiento de un país que nunca haya incurrido en incumplimiento. A escala global normalmente se escogen los bonos del gobierno de los Estados Unidos de América, pero con ese criterio también puede considerarse al Certificado de la Tesorería de la Federación (CETE) en el caso de México. Como vimos antes, podemos determinar las combinaciones que producen la varianza mínima y la frontera eficiente utilizando únicamente los activos con riesgo. Es la curva AD de la gráfica 1. Si trazamos una línea recta cuya valor en la ordenada sea la tasa de rendimiento del activo libre de riesgo (por eso su desviación estándar es cero) y que sea tangente a la curva de varianza mínima de los activos con riesgo, tendremos que ahora es posible hacer múltiples combinaciones lineales entre el activo libre de riesgo y una canasta específica de activos con riesgo, la combinación que en la gráfica denominamos T, o portafolio de tangencia. La línea recta es llamada "línea del mercado de capitales" (LMC).[10]

Gráfica 2



Como vemos en la gráfica, ahora cualquier combinación de activos con riesgo, incluidas todas las que están en la curva de varianza mínima, están dominadas por las combinaciones que se encuentran dentro de la línea del mercado de capitales. En efecto, puede observase que cualquier combinación perteneciente a la frontera eficiente de activos (excepto

[10] En realidad, la LMC se deduce en el contexto del equilibrio del mercado.

T que se encuentra también en la LMC) puede ser sustituida ventajosamente en términos de riesgo y (o) rendimiento por una combinación que se encuentre dentro de LMC. De manera que cuando incluimos un activo sin riesgo, las combinaciones dominantes o eficientes son las que conforman la LMC. Una vez ubicado el portafolio de tangencia, el problema de selección de inversiones se simplifica todavía más porque hay una única cartera de activos con riesgo que es la "óptima" para cualquier inversionista, independientemente del grado de aversión al riesgo que éste manifieste. Este importante resultado tiene una hipótesis: que el inversionista representativo puede prestar o pedir prestado a la tasa libre de riesgo que llamaremos $\boldsymbol{r_f}$. Esta importante extensión del modelo original de Markowitz se debe fundamentalmente al trabajo de Tobin (1958) y Sharpe (1964) se denomina "teorema de separación de fondos", porque el inversionista ahora sólo tiene que escoger entre dos fuentes: la combinación T de activos riesgosos y el activo libre de riesgo.

Nótese que LMC es la línea de mayor pendiente que podemos encontrar, tal que partiendo de r_f sea tangente con la curva de varianza mínima. La pendiente de la LMC es igual a $\boldsymbol{\theta = \dfrac{\widetilde{r_{pT}} - r_f}{\sigma_{pT}}}$, donde $\boldsymbol{\widetilde{r_{pT}}}$ es la tasa esperada de rendimiento de un portafolio cuyas ponderaciones desconocemos (el portafolio de tangencia) y $\boldsymbol{\sigma_{pT}}$ es la desviación estándar del portafolio de tangencia que queremos encontrar. Se trata ahora de hallar las ponderaciones de una combinación de los n activos con riesgo tal que en ese punto se haga máxima la pendiente $\boldsymbol{\theta}$. Formalmente el problema se plantea como:

$$\boldsymbol{Max \quad \theta = \frac{\widetilde{r_{pT}} - r_f}{\sigma_{pT}}}$$

sujeto a: $\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{n} w_i$

Este problema de optimización puede simplificarse mediante un artificio matemático que consiste en incorporar la restricción dentro de la función objetivo y resolver como un problema de optimización sin restricciones. Puesto que

$r_f = r_f \times \mathbf{1}$, tenemos también que $r_f = \sum_{i=1}^{n} w_i$, de manera que ahora sólo debemos

resolver : $$Max \quad \theta = \frac{\widetilde{r}_{p_T} - \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right) r_f}{\sigma_p} \quad = \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{r}_i - r_f\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_i\, w_k\, \sigma_{ik}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

La condición de primer orden consiste en hacer $\frac{\partial \theta}{\partial w_i} = \mathbf{0}$ para todos los activos y resolver este sistema para las ponderaciones w_i. El vector de solución corresponde al portafolio de tangencia, cuyas coordenadas en el espacio riesgo y rendimiento podemos hallar como en los casos anteriores, utilizando los datos iniciales de tasas esperadas de rendimiento y la matriz de varianzas y covarianzas. La solución del problema requiere crear unas nuevas variables Z_1, Z_2, ... Z_n cuyas proporciones respecto a su suma total son iguales a las ponderaciones w. Es decir: $w_i = Z_i / \sum_{i=1}^{n} Z_i \,; \quad \forall i$. La condición de primer orden consiste del siguiente sistema:[11]

$$\mathbf{S} \quad \mathbf{Z} \; = \; \mathbf{R} \qquad\qquad (11)$$

[11] El procedimiento matemático puede consultarse en Elton y Gruber (1991).

Siendo S la matriz ya definida y:

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \; ; \quad R = \begin{pmatrix} \tilde{r}_1 - r_f \\ \tilde{r}_2 - r_f \\ \vdots \\ \tilde{r}_n - r_f \end{pmatrix}$$

Premultiplicando ambos lados de (11) por la matriz inversa de S (la cual debe ser no singular), nos queda:

$$S^{-1} S \; Z = S^{-1} R$$

$$Z = S^{-1} R \qquad (12)$$

Obteniendo el vector n x 1 de los valores de Z. El vector W de solución para el portafolio de tangencia se obtiene como:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} Z_i} \qquad (13)$$

La tasa esperada de rendimiento del portafolio de tangencia y la correspondiente desviación estándar, se calcula aplicando la solución anterior en (1a) y (4a) respectivamente.

5. El problema de optimización cuando las ventas en corto no son factibles.

Cuando imponemos la condición más realista de que no es posible la venta en corto y que por lo tanto todos los ponderadores deben ser mayores o iguales a cero, debemos agregar la restricción (3) y el problema de optimización ya no puede resolverse mediante las técnicas simples de Lagrange debido a que la nueva restricción no es una igualdad estricta; en este caso es necesario recurrir a procedimientos más sofisticados de optimización cuadrática y programación. Tampoco podemos usar técnicas simples de programación lineal porque la función objetivo no es una función lineal.[12] En casos en que el número de activos es considerable, digamos más de 10, es prácticamente imposible resolver los problemas de selección de portafolio sin recurrir a algún programa especializado de cómputo.[13] Dado que en la práctica lo más común es que la selección de inversiones y la administración de portafolios se haga sin ventas en corto y tomando en cuenta un número elevado de activos con riesgo, el problema de la construcción de la curva de varianza mínima y la frontera eficiente de activos con riesgo es sin duda un problema de mayor relevancia práctica que el caso en que las ventas en corto son permitidas y, además, de mucho mayor dificultad matemática.

La complejidad técnica implicaba costos de computación prohibitivos en la época en que el enfoque fue desarrollado por Markowitz, incluso suponiendo la factibilidad de las ventas en corto. En la búsqueda por encontrar caminos más simples y de menor costo, William Sharpe logró un avance importante con el modelo de "índice único" que desembocaría más tarde en el modelo de "precios de activos de capital" (CAPM). Se ha considerado que la complejidad práctica de implementación del enfoque media - varianza para el caso de muchos activos con riesgo fue una de las razones importantes que explican la lentitud con que el negocio financiero incorporó el enfoque media – varianza. En la actualidad el problema ha sido aligerado notablemente por el avance de las computadoras y el desarrollo de software especializado, aunque el costo sigue siendo una variable de consideración.

---

[12] La literatura reporta que Phillip Wolfe desarrolló un algoritmo que utiliza como auxiliar la programación lineal.

[13] Existen varios de estos programas en el mercado, como EXPO, LINDO y muchos más.

En lo que sigue mostramos como puede construirse la curva de varianza mínima y la frontera eficiente para el caso en que la restricción es $\sum_{i=1}^{n} w_i \geq 1$ y se tienen numerosos activos con riesgo aprovechando la capacidad de resolución del algoritmo denominado SOLVER incluido en una popular y “amigable” hoja de cálculo.[14]

SOLVER es un algoritmo incorporado como parte de las herramientas de Excel que permite encontrar valores para un conjunto de variables, tal que una función objetivo que las incluye como argumentos, alcance un valor especificado, o bien que su valor sea máximo o mínimo, sujeto a que se cumplan ciertas restricciones. Dentro de las “opciones” del algoritmo se encuentra la indicación de que las soluciones que entregue sean no negativas. La herramienta trabaja con un grado de precisión que puede ser ajustado por quien la utiliza.[15]

6. Aplicación al caso de México

En esta parte del trabajo hacemos un ejercicio de aplicación para el caso de México. Construimos una frontera eficiente de activos con riesgo, deducimos el portafolio de tangencia y elaboramos tres carteras de inversión mezclando el portafolio de tangencia con el activo libre de riesgo, cuyos desempeños en términos de rendimiento y riesgo es comparado con fondos de inversión existentes.

[14] En este trabajo usamos Excel de Microsoft.

[15] El algoritmo no produce siempre resultados aceptables debido a que, especialmente cuando las funciones no son lineales, puede existir más de una solución. Por esta razón la herramienta debe usarse con precaución y criterio.

6.1 Diseño del ejercicio

Se escogieron 32 acciones de las 35 que forman parte del IPC, identificadas del número 1 al 32 en el cuadro (1):

Cuadro 1

1	Alfa S.A. A	17	GFBanorte O
2	America Movil L	18	GInd Saltillo
3	America Telecom A1	19	GMexico B
4	Apasco S.A.	20	GModelo C
5	Ara Consorcio	21	ICA Soc Controlad
6	Bimbo Gpo A	22	Kimberly Clark Mex A
7	Cemex S.A. CPO	23	Penoles Industrias
8	Corp Interam de Ent B	24	Savia A
9	Comercial Mexicana UBC	25	Soriana Organizacio B
10	Desc Soc Fom Ind B	26	Telecom Carso Globa A1
11	Elektra Gpo	27	Telefonos de Mexico L
12	Fomento Econ Mex UBD	28	Televisa Gpo CPO
13	GCarso A1	29	Television Azteca CPO
14	Geo Corporacion B	30	Vitro A
15	GFBBVA Bancomer B	31	Wal Mart de Mexico C
16	GFInbursa O	32	Wal Mart de Mexico V

Se tomaron 129 datos diarios de precios de estas acciones desde el día 31 de octubre de 2002 al 12 de mayo de 2003[16] y con esta información básica se construyeron las series de 128 datos de tasas de rendimiento compuesto continuo diarias, es decir, usando la primera diferencia logarítmica de precios. Con estos datos se calcularon las esperanzas matemáticas de tasas diarias para las 32 acciones, así como las varianzas y desviaciones estándar respectivas; también se construyó la matriz de varianzas y covarianzas para las 32 acciones, lo que da como resultado una matriz cuadrada de dimensión 32.

Con la matiz de varianzas y covarianzas se puede calcular la desviación estándar de cualquier portafolio hipotético definido por las ponderaciones de los 32 activos. Como vimos antes, la varianza de este portafolio se calcula como:

[16] Contamos para tal efecto con una base de datos provista por ECONOMÁTICA.

$$\sigma_p^2 = W^T S\, W$$

Usando el algoritmo mencionado encontramos la combinación de ponderaciones W que minimiza la expresión anterior imponiendo la restricción de que la sumatoria de los ponderadores sea igual a la unidad y todas las ponderaciones sean no negativas. Encontramos así los ponderadores que definen al portafolio de varianza mínima global. La tasa de rendimiento de este portafolio se calcula mediante:

$$\widetilde{r_p} = W^T\ \widetilde{r_i}$$

siendo $\widetilde{r_i}$ el vector columna de las tasas de rendimiento correspondientes a los 32 activos.

Para encontrar la curva de varianza mínima repetimos el procedimiento anterior pero ahora imponemos una restricción adicional: que el portafolio tenga una tasa de rendimiento dada. Escogimos tasas inferiores y superiores a la tasa del portafolio de varianza mínima global y encontramos los vectores W que corresponden a cada una de las tasas de rendimiento. Más adelante, en el cuadro (2), reportamos los resultados para algunos de estos portafolios que conforman la curva de varianza mínima así como los parámetros estadísticos que permiten ubicarlo en el mapa riesgo – rendimiento.

Introducimos en el análisis un activo considerado "libre de riesgo" (activo F), es decir, un activo cuyo rendimiento se conoce con certeza en el momento de adquisición. Como activo libre de riesgo usamos el Certificado de la Tesorería de la Federación (CETE) con vencimiento a 28 días. Encontramos el portafolio de tangencia utilizando la tasa del 5% anual, (Ln(1.05)/365 para la tasa diaria) del CETE y luego planteando la ecuación de una recta $E(r_p) = r_f + b\ \sigma_p$. Aquí se trata de encontrar el valor máximo de la pendiente, que es tangente a alguna de las desviaciones estándar de los portafolios de la curva de varianza mínima. Mediante un procedimiento numérico obtuvimos como resultado:

$$\mathbf{E\ (\ r_p\ ) = 0.000133672 + 0.220814\ \sigma_p}$$

Así encontramos que el portafolio de tangencia tiene una esperanza matemática diaria de rendimiento del 0.25% con una desviación estándar de 1.07164%. En el cuadro que sigue se reportan algunas de las combinaciones de activos que conforman la curva de varianza mínima con sus parámetros estadísticos de riesgo y rendimiento. Las combinaciones VM y T son los portafolios de varianza mínima global y de tangencia respectivamente.

Cuadro 2

PORTAFOLIOS QUE PERTENECEN A LA CURVA DE VARIANZA MÍNIMA

ACCIO-NES	PORTAFOLIOS					
	A	VM	B	C	T	D
1						
2			0.23%	1.78%	12.85%	
3						
4	5.74%	10.70%	13.94%	15.34%	15.13%	
5			0.87%	2.82%	3.27%	
6	5.66%	5.42%	5.41%	5.34%		
7						
8						
9	3.31%	3.86%	4.52%	4.58%	0.02%	
10	4.78%	4.19%	3.45%	3.08%		
11						
12						
13	5.05%	6.58%	7.42%	8.38%	5.96%	
14					30.09%	69.03%
15	0.34%	3.77%	4.94%	5.10%		
16	8.52%	7.07%	5.74%	4.77%		
17						
18	16.88%	11.90%	7.39%	4.95%		
19	0.18%	1.65%	3.22%	4.32%	14.08%	0.35%
20	3.54%					
21					5.87%	19.90%
22	19.71%	21.62%	22.20%	21.91%		
23	4.21%	4.72%	5.41%	5.86%	12.72%	10.72%
24	2.26%	1.58%	0.60%	0.00%		
25						
26						
27	9.96%	8.59%	5.87%	3.35%		
28						
29						
30	9.86%	8.19%	6.62%	5.59%		
31		0.15%	1.43%	1.32%		
32			0.75%	1.49%		
	100.00%	**100.00%**	**100.00%**	**100.00%**	**100.00%**	**100.00%**
E (r)*	**0.01000%**	**0.04540%**	**0.07500%**	**0.09500%**	**0.25000%**	**0.33000%**
σ^2	**0.0000501**	**0.0000484**	**0.0000496**	**0.0000514**	**0.0001148**	**0.0002776**
σ	**0.70748%**	**0.69590%**	**0.70412%**	**0.71716%**	**1.07164%**	**1.66609%**

* Es la esperanza matemática de rendimiento diario en el periodo estudiado.

Los parámetros estadísticos correspondientes a los nueve activos que conforman el portafolio de tangencia y los de este último son los que se detallan en los dos cuadros siguientes:

Cuadro 3

Expectativas de Rendimiento y Dispersión*

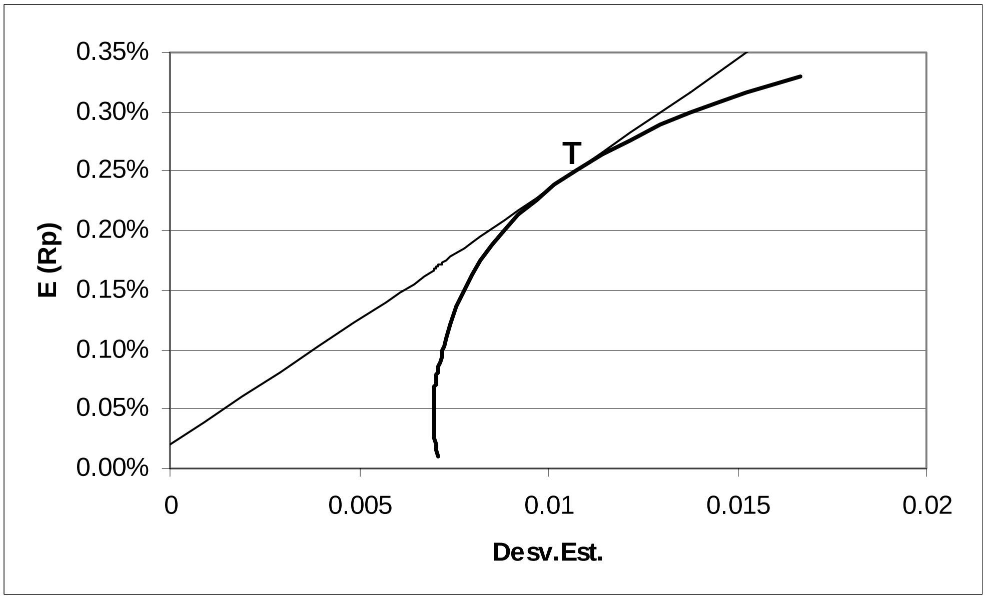
Acción	E (r)	σ
2	0.2122%	1.7250%
4	0.1922%	1.3808%
5	0.1853%	1.8448%
9	0.1524%	1.6591%
13	0.1112%	1.4400%
14	0.3338%	1.9482%
19	0.2177%	2.2909%
21	0.3801%	3.8003%
23	0.2162%	3.1664%

Cuadro 4
Matriz de Coeficientes de Correlación

Acción	2	4	5	9	13	14	19	21	23
2	1.00000	0.31623	0.20521	0.21590	0.13248	0.34918	0.10327	0.24200	-0.11973
4		1.00000	0.24253	0.22598	0.15019	0.36678	0.08282	0.15545	0.09378
5			1.00000	0.17476	0.04785	0.39727	-0.05091	0.22871	0.04339
9				1.00000	0.18317	0.29824	0.17338	0.22246	-0.01613
13					1.00000	0.05140	0.12894	0.27003	0.07450
14						1.00000	0.09575	0.19922	-0.09390
19							1.00000	0.14018	-0.06935
21								1.00000	-0.08364
23									1.00000

El mapa de los diversos portafolios de la curva de varianza mínima que se obtuvieron del ejercicio es:

Gráfica 3



6.2 Construcción de tres portafolios teóricos

Una vez alcanzado el resultado de portafolio de tangencia y línea del mercado de valores, sabemos que las combinaciones elegibles o dominantes se encuentran dentro de la LMC variando las proporciones entre el activo F (CETE a 28 días) y el activo compuesto T.

Para efectos de probar el resultado obtenido en comparación con el desempeño de los fondos comunes de inversión de renta variable disponibles en el mercado Mexicano, construimos tres portafolios que utilizamos como "marcadores" combinando en diferentes proporciones el activo F con T y los valuamos diariamente durante los 87 días de operación de los meses junio a septiembre. Denominamos a estos tres portafolios: (1) Conservador (80% de F y 20% de T), (2) Medio (50% de F y 50% de T) y (3) Agresivo ((20% de F y 80% de T). Dentro del conjunto de fondos de inversión de renta variable existentes en el mercado mexicano escogemos 20 de ellos que pueden ser considerados dentro de las tres categorías anteriores.[17] Para tal efecto suponemos que un portafolio conservador tiene 80% o más de del activo libre de riesgo y el resto en acciones empresariales, el portafolio medio tiene entre 60% y 40% del activo libre de riesgo y el agresivo tiene entre 20% o menos del activo libre de riesgo.[18] Un indicador muy útil que sintetiza la relación riesgo – rendimiento de cualquier inversión es el llamado "índice de Sharpe" el cual mide el excedente de rendimiento de un activo o portafolio respecto al activo F por unidad de riesgo, esto es:

$$\text{Índice de Sharpe} = \frac{\tilde{r}_p - r_f}{\sigma_p}$$

En el cuadro 5 se detalla el desempeño que tuvieron los activos que componen el portafolio de tangencia en términos de sus tasas de rendimiento durante el lapso de Junio a Septiembre así como sus expectativa de rendimiento diaria.

Cuadro 5

DESEMPEÑO DE ACCIONES INDIVIDUALES Y PORTAFOLIO DE TANGENCIA

Acción	Precio al 30/05/03	Precio al 30/09/03	Tasa de Rendimiento*	E(r)**
2	9.423	12.710	29.928%	0.344%
4	72.480	84.490	15.332%	0.176%
5	19.670	25.900	27.515%	0.316%
9	6.900	7.550	9.003%	0.103%
13	32.070	34.200	6.430%	0.074%
14	30.000	49.280	49.632%	0.570%
19	14.463	16.528	13.345%	0.153%
21	2.420	1.950	-21.594%	-0.248%
23	18.500	28.520	43.283%	0.498%
Portafolio T***	28.293	38.204	30.031%	0.345%

* Correspondiente al periodo de 87 días efectivos de negociación y calculadas mediante la primera diferencia logarítmica.
** Esperanza matemática de rendimiento diario.

[17] Nos basamos en información obtenida sobre la composición de la cartera del fondo respectivo según lo reporta el periódico El Financiero en el suplemento que aparece el día hábil N° 5 de cada mes.
[18] En los fondos de inversión existentes el activo libre de riesgo no es exclusivamente el CETE.

*** Calculado como precio de la acción por su ponderación en T.

En el cuadro (6) comparamos el desempeño de los tres portafolios marcadores construidos como una mezcla del portafolio de tangencia y CETES con algunos fondos de inversión de renta variable existentes en el mercado financiero mexicano, divididos por clases de riesgo.

Cuadro 6

COMPARACIÓN DE DESEMPEÑO

	R[a]	E (r)[b]	σ[c]	I.Sharpe[d]
PORTAFOLIO MARCADOR				
A. CONSERVADOR	7.259%	0.084%	0.197%	33.251%
B. MEDIO	15.692%	0.182%	0.491%	33.260%
C. AGRESIVO	24.042%	0.280%	0.786%	33.257%
FONDOS DE RENTA VARIABLE				
A. CONSERVADORES				
GBMBAL	5.57%	0.064%	0.234%	19.556%
MONEXRV	4.499%	0.052%	0.433%	7.730%
PROMEX 5	2.315%	0.027%	0.314%	2.648%
SCOTIA 9	4.027%	0.046%	0.195%	14.387%
Promedio	**4.102%**	**0.047%**	**0.294%**	**11.080%**
B. MEDIOS				
BMERBAL	9.417%	0.108%	0.458%	19.641%
MVBOLSA	4.941%	0.057%	0.337%	11.419%
NORTEDE	10.195%	0.117%	0.533%	18.570%
ZEVERST	3.721%	0.043%	0.485%	5.046%
Promedio	**7.068%**	**0.081%**	**0.453%**	**13.669%**
C. AGRESIVOS				
ACCIAR	13.860%	0.159%	0.531%	26.550%
ACCIPAT	15.778%	0.181%	1.248%	13.067%
ACCIVAL	8.812%	0.101%	0.523%	15.884%
AWLLOYD	16.317%	0.188%	0.687%	24.625%
BMERCAP	15.212%	0.175%	0.792%	19.757%
BMERIND	15.805%	0.182%	0.756%	21.608%
BMERPAT	14.390%	0.165%	0.869%	16.925%
GBMAAA	14.548%	0.167%	0.644%	23.135%
NORTEIN	16.566%	0.190%	0.758%	22.696%
SCOTIA6	14.927%	0.172%	0.771%	19.894%
VACRECIMIENTO	12.788%	0.147%	0.677%	19.006%
ZCAP1	11.536%	0.133%	0.545%	20.996%
Promedio	**14.212%**	**0.163%**	**0.733%**	**20.345%**

a. corresponde a la tasa de rendimiento del periodo.
b. Tasa esperada de rendimiento diario en el periodo.
c. Desviación estándar diaria.
d. Índice de Sharpe, calculada como el excedente de rendimiento respecto a la tasa del activo F por unidad de riesgo.

7. Conclusiones

La frontera de varianza mínima obtenida en este ejercicio tiene la forma usual. Un resultado que se aprecia en el Cuadro 2 y que ya ha sido reportado en otra parte (Ver Luenberger, p. 161) es que cuando se incluye la restricción de no negatividad de las ponderaciones, es decir que se elimina la posibilidad de ventas en corto, muchos de los activos considerados inicialmente no llegan a formar parte de la frontera, esto es, sus ponderaciones son cero. A medida que aumenta la tasa de rendimiento exigida, hay emisoras que van dejando de pertenecer a la frontera eficiente. En nuestro ejercicio, el portafolio de varianza mínima global incluye a 15 acciones mientras que el de tangencia incluye sólo a 9 de las 32 acciones consideradas, una de las cuales, el activo 9, tiene una ponderación marginal. Aunque el resultado de la frontera eficiente es consecuencia de la interacción de los parámetros estadísticos de todos los activos involucrados, el cuadro 4 muestra una característica que, en términos generales, era previsible: relativamente bajos coeficientes de correlación de los 9 activos.

Puede apreciarse en el cuadro 6, que los portafolios marcadores ubicados en tres posiciones diferentes de nuestra LMC tuvieron un desempeño más que satisfactorio en comparación con los fondos de inversión existentes en el mercado que utilizamos como puntos de referencia para cada clase de riesgo. Hay que tener en cuenta, sin embargo, que los fondos de inversión son administrados por instituciones financieras – básicamente los bancos – pero los propietarios últimos pueden ser (y normalmente son) una cantidad numerosa de personas y empresas que compran y venden diariamente partes alícuotas de esos fondos. Existe por lo tanto un costo de gestión y una rentabilidad para el administrador de esos fondos que se obtiene a partir del rendimiento bruto del portafolio de inversión. El rendimiento reportado en el cuadro es el que obtienen los poseedores últimos de esos fondos, es decir, una vez deducidos los costos de operación y rentabilidad de la administración de los mismos. Puesto que el rendimiento de los portafolios marcadores de nuestro ejercicio no incluyen tales costos de administración, el muy buen desempeño relativo de esas carteras está algo sobreestimado. Sin embargo, es evidente que los tres portafolios marcadores que resultan del ejercicio hubiesen sido una buena decisión de inversión para el periodo considerado en este ejercicio y dentro de la clase de riesgo correspondiente..

Un comentario final. Hemos realizado un ejercicio fundamentalmente de carácter académico, realizado con información pública y que el lector conocerá algunos meses después de realizado, cuando ya hay nueva información que puede cambiar las conclusiones cuantitativas del ensayo[19]. Esbozamos sin embargo, algunas ideas acerca de la utilidad que un estudioso puede obtener de este trabajo si tiene interés en actualizar y (o) ampliar constructivamente el alcance del mismo.

1. La reproducción del estudio, lo que implica la recopilación de la información básica, sobre rendimientos, varianzas y covarianzas de los activos, así como el manejo técnico para la construcción de la frontera de varianza mínima puede aportar a quienes lo realizan un conocimiento de mayor profundidad del mercado de capitales con riesgo del país en comparación con una descripción simple del mismo.
2. La construcción de portafolios marcadores ubicados en la LMC puede ser un buen comienzo para el análisis y seguimiento sistemático del desempeño de los fondos de inversión de renta variable, los cuales, como sabemos, son portafolios compuestos por activos del tipo F y un conjunto de activos con riesgo; por análisis y seguimiento entendemos estudios que vayan más allá de la mera descripción del tipo ”este subió”,

[19] Aunque en realidad, dudamos que las conclusiones acerca de los activos que forman la frontera eficiente cambien radicalmente.

“aquel bajó”, etc. y el desempeño lo entendemos en relación con los dos parámetros básicos de una inversión: riesgo y rendimiento. El índice de Sharpe es un buen indicador que sintetiza el comportamiento riesgo – rendimiento de las inversiones. Si los portafolios escogidos como marcadores tienen un desempeño evidentemente superior a los fondos existentes en el mercado para grados de riesgo similares, deberíamos preguntarnos como escogen los activos los administradores de estos fondos. En caso contrario, la pregunta sería si existe alguna falla en la teoría de la construcción de la frontera o si existe información no tomada en cuenta por nosotros para su construcción.

3. El desempeño a futuro del portafolio de tangencia obtenido en este ejercicio así como de los tres portafolios teóricos se pueden valuar fácilmente en el futuro por cualquier persona porque: (a) se ha indicado claramente en el cuadro 2 su composición por activos así como las ponderaciones correspondientes y (b) los precios de los activos y las tasas de rendimiento de los CETES son publicados diariamente en los principales periódicos de circulación nacional.

Finalmente, podemos decir que aunque existen en el mercado programas altamente sofisticados (y caros) para la construcción de portafolios eficientes, creemos haber demostrado en este trabajo que es posible aproximarse con éxito a tal problema utilizando un software económico y relativamente “amigable”.

Referencias Bibliográficas

Beninga, Simon (1997), Financial Modeling, The MIT Press.

Copeland, Thomas E. y J. Fred Weston (1992), Addison Wesley, Tercera Edición, reimpresión corregida en 1992.

Elton y Gruber (1991), Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, John Wiley and Sons, 4° edición.

Luenberger, David G., (1998), Investment Science, Oxford University Press.

Marín, José M. y Gonzalo Rubio, (2001), Economía Financiera, Antoni Bosch Editor.

Markowitz, Harry (1952), "Portfolio Selection", Journal of Finance, Vol. 7, Marzo, pp. 71-91.

Sharpe, William F., (1964) "Capital Asset Prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk", Journal of finance, 19, 3, pp. 425-42.

Sharpe, William F. y Gordon J. Alexander, (1990), Investments, Prentice Hall, 4° edición.

Tobin, James (1958), "Liquidity Preference as Behavior towards Risk", Review of Economic Studies, 25, Febrero.

APÉNDICE
EJERCICIO NUMÉRICO DE SELECCIÓN DE PORTAFOLIO

En este apéndice se resuelve un ejercicio numérico con tres activos con riesgo y un activo seguro. Se resuelve sin y con restricción de no negatividad de los ponderadores.

I. MODELO DE 3 ACTIVOS CON RIESGO Y VENTAS EN CORTO PERMITIDAS

I.1 Datos del problema:

Se tienen 3 activos denominados activos 1, 2 y 3 respectivamente, cuyos parámetros estadísticos son los siguientes:

a. Expectativas de rendimiento:

$$\widetilde{r_1} = 0.05;\ \widetilde{r_2} = 0.07;\ \widetilde{r_3} = 0.12$$

b. Desviaciones estándar:

$$\sigma_1 = 0.09;\ \sigma_2 = 0.14;\ \sigma_3 = 0.22$$

c. Covarianzas:

$$\sigma_{12} = 0.00378;\ \sigma_{13} = 0.00792;\ \sigma_{23} = 0.01848$$

De este conjunto de datos básicos se deducen los siguientes:

d. Varianzas

$$\sigma_{11} = 0.0081;\ \sigma_{22} = 0.0196;\ \sigma_{33} = 0.0484$$

e. Matriz de varianzas y covarianzas:

$$\begin{pmatrix} 0.0081 & 0.00378 & 0.00792 \\ 0.00378 & 0.0196 & 0.01848 \\ 0.00792 & 0.01848 & 0.0484 \end{pmatrix}$$

e. Coeficientes de correlación entre los activos (se calculan con los datos de varianzas y covarianzas):

$$\rho_{12} = 0.3;\ \rho_{13} = 0.4;\ \rho_{23} = 0.6$$

I.2 Planteo del problema de optimización.

La expectativa de rendimiento del portafolio es:

$$\widetilde{r_p} = w_1\widetilde{r_1} + w_2\widetilde{r_2} + w_3\widetilde{r_3}$$

La desviación estándar del portafolio se expresa como:

$$\sigma_p^2 = w_1{}^2\sigma_{11} + w_2{}^2\sigma_{22} + w_3{}^2\sigma_{33} + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23}$$

I.2.1 Búsqueda del portafolio de varianza mínima global

Min

$$\frac{1}{2}\sigma_p^2 = \frac{1}{2}(w_1{}^2\sigma_{11} + w_2{}^2\sigma_{22} + w_3{}^2\sigma_{33} + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23})$$

Sujeto a: $w_1 + w_2 + w_3 = 1$

Resolvemos por medio del método de Lagrange, para lo cual formulamos el Lagrangeano:

$$L = \frac{1}{2}(w_1{}^2\sigma_{11} + w_2{}^2\sigma_{22} + w_3{}^2\sigma_{33} + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23})$$
$$+\lambda(1 - w_1 + w_2 + w_3)$$

Resolvemos la condición de primer orden para un extremo:

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = w_1\sigma_{11} + w_2\sigma_{12} + w_3\sigma_{13} + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = w_1\sigma_{21} + w_2\sigma_{22} + w_3\sigma_{23} + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_3} = w_1\sigma_{31} + w_2\sigma_{32} + w_3\sigma_{33} + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - (w_1 + w_2 + w_3) = 0$$

Este sistema puede representarse mediante el álgebra de matrices como: VI W1 = B1

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 1 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los elementos de la matriz de 4 x 4 por los datos con que contamos, el problema nos queda:

$$\begin{pmatrix} 0.0081 & 0.00378 & 0.00792 & 1 \\ 0.00378 & 0.0196 & 0.01848 & 1 \\ 0.00792 & 0.01848 & 0.0484 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

V1 W1 = B1

El vector de incógnitas lo obtenemos haciendo:

$$\mathbf{W1} = \mathbf{V1}^{-1}\ \mathbf{B1}$$

El resultado de la operación anterior es:

$$\begin{bmatrix} 0.8120 \\ 0.2895 \\ -0.1015 \\ -0.0069 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51.95170366 & -43.14803223 & -8.803671432 & 0.81201584 \\ -43.14803223 & 68.05271491 & -24.90468268 & 0.289504886 \\ -8.803671432 & -24.90468268 & 33.70835412 & -0.101520725 \\ 0.81201584 & 0.289504886 & -0.101520725 & -0.006867613 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De manera que el portafolio de varianza mínima global estará compuesto por = 81.20 % del activo 1, 28.95% del activo 2 y – 10.15% del activo 3 (el activo 3 se vende “en corto” y se utiliza el producido para comprar unidades de los otros dos activos). El multiplicador de Lagrange es – 0.0069.

Ahora encontramos la tasa de rendimiento y el riesgo de este portafolio. Para ello hacemos:

$$\widetilde{r_p} = \begin{bmatrix} 0.81201584 & 0.289504886 & -0.101520725 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.07 \\ 0.12 \end{bmatrix} = 0.04868$$

y la varianza del portafolio es:

$$\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} 0.8120 & 0.2895 & -0.1015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0081 & 0.00378 & 0.00792 \\ 0.00378 & 0.0196 & 0.01848 \\ 0.00792 & 0.01848 & 0.0484 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8120 \\ 0.2895 \\ -0.1015 \end{bmatrix}$$

$$= 0.006867613$$

La desviación estándar del portafolio es la raíz cuadrada de la anterior:

$$\sigma_p = 0.08287106$$

En síntesis, el portafolio de varianza mínima tiene una tasa esperada de rendimiento del 4.868 % con un riesgo (desviación estándar) del 8.287 %. Estas son las coordenadas en el espacio riesgo- rendimiento del punto B de la gráfica 1.

I.2.2 Búsqueda del conjunto de portafolios eficiente.

Como se señala en el texto, los portafolios eficientes son aquellos que tienen varianza mínima para una tasa esperada de rendimiento dada, tal que sea superior a la que corresponde a la del portafolio de varianza mínima global, que ya ubicamos es 4.868 %. El problema de optimización es ahora:

Min

$$\frac{1}{2}\sigma_p^2 = \frac{1}{2}(w_1{}^2\sigma_{11} + w_2{}^2\sigma_{22} + w_3{}^2\sigma_{33} + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23})$$

Sujeto a: $w_1\widetilde{r_1} + w_2\widetilde{r_2} + w_3\widetilde{r_3} = \overline{r_p}$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

El lagrangeano se formula como:

$$L = \frac{1}{2}(w_1{}^2\sigma_{11} + w_2{}^2\sigma_{22} + w_3{}^2\sigma_{33} + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23})$$
$$+ \lambda_1[\overline{r_p} - (\widetilde{r_1}\, w_1 + \widetilde{r_2}\, w_2 + \widetilde{r_3}\, w_3)] + \lambda_2[1 - (w_1 + w_2 + w_3)]$$

La condición de primero orden para un problema de optimización con dos restricciones es:

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = w_1\sigma_{11} + w_2\sigma_{12} + w_3\sigma_{13} + \lambda_1 \widetilde{r_1} + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = w_1\sigma_{21} + w_2\sigma_{22} + w_3\sigma_{23} + \lambda_1 \widetilde{r_2} + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_3} = w_1\sigma_{31} + w_2\sigma_{32} + w_3\sigma_{33} + \lambda_1 \widetilde{r_1} + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = w_1\widetilde{r_1} + w_2\widetilde{r_2} + w_3\widetilde{r_3} - \overline{r_p} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = w_1 + w_2 + w_3 - 1 = 0$$

Este sistema puede representarse mediante el álgebra de matrices como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \widetilde{r_1} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \widetilde{r_2} & 1 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \widetilde{r_3} & 1 \\ \widetilde{r_1} & \widetilde{r_2} & \widetilde{r_3} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \overline{r_p} \\ 1 \end{pmatrix}$$

V2 W2 = B2

Sustituyendo en el esquema matricial con los datos que disponemos inicialmente y comenzando con un rendimiento esperado del portafolio del 1 % ($\overline{r_p} = 0.01$). El sistema anterior a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 0.0081 & 0.00378 & 0.00792 & 0.05 & 1 \\ 0.00378 & 0.0196 & 0.01848 & 0.07 & 1 \\ 0.00792 & 0.01848 & 0.0484 & 0.12 & 1 \\ 0.05 & 0.07 & 0.12 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.01 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el vector incógnita del problema haciendo:

$$W2 \;=\; V2^{-1}\; B2$$

Y el resultado es:

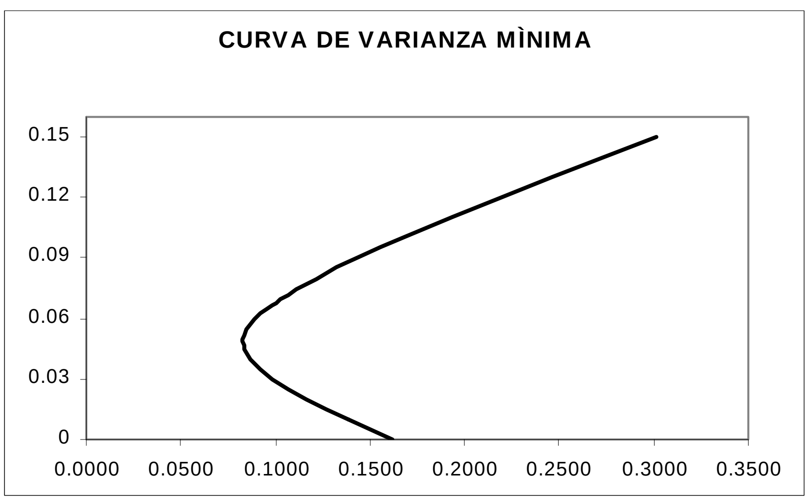
$$\begin{bmatrix} 1.2785 \\ 0.4101 \\ -0.6886 \\ 0.3154 \\ -0.0222 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34.112927 & -47.758098 & 13.645171 & -12.059602 & 1.399121 \\ -47.758098 & 66.861338 & -19.103239 & -3.116557 & 0.441230 \\ 13.645171 & -19.103239 & 5.458068 & 15.176159 & -0.840351 \\ -12.059602 & -3.116557 & 15.176159 & -8.152689 & 0.396903 \\ 1.399121 & 0.441230 & -0.840351 & 0.396903 & -0.026190 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.01 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De manera que el portafolio que tiene varianza mínima dentro de todos los que tienen una tasa esperada de rendimiento del 1% estaría compuesto por: activo 1 = 127.85 %, activo 2 = 41.01%, y una venta en corto equivalente al 68.86 % del activo 3. Recordamos que los portafolios eficientes son aquellos que tienen una tasa esperada de rendimiento superiores al 4.868 %.

Repitiendo el procedimiento anterior podemos encontrar numerosos portafolios que formen parte de la curva de varianza mínima, esto es, los portafolios que conforman la curva ABCD de la gráfica 1. En la tabla que sigue se detallan los resultados de la repetición del procedimiento.

PORTAFOLIOS DE VARIANZA MÍNIMA

σ_p	$\bar{r}_p$	w1	w2	w3
0.162	0.000	1.399	0.441	-0.840
0.138	0.010	1.279	0.410	-0.689
0.117	0.020	1.158	0.379	-0.537
0.099	0.030	1.037	0.348	-0.385
0.087	0.040	0.917	0.317	-0.233
0.083	0.049	0.812	0.290	-0.102
0.083	0.050	0.796	0.285	-0.082
0.085	0.055	0.736	0.270	-0.006
0.089	0.060	0.676	0.254	0.070
0.095	0.065	0.615	0.239	0.146
0.103	0.070	0.555	0.223	0.222
0.122	0.080	0.434	0.192	0.374
0.144	0.090	0.314	0.161	0.526
0.168	0.100	0.193	0.130	0.677
0.194	0.110	0.073	0.098	0.829
0.220	0.120	-0.048	0.067	0.981
0.247	0.130	-0.169	0.036	1.133
0.274	0.140	-0.289	0.005	1.284
0.301	0.150	-0.410	-0.026	1.436



I.2.3 Búsqueda del portafolio de tangencia

Siguiendo lo indicado en el texto, para encontrar el portafolio de tangencia se plantea el sistema siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{r}_1 - r_f \\ \bar{r}_2 - r_f \\ \vdots \\ \bar{r}_n - r_f \end{pmatrix}$$

S **Z** **R**

Donde S es la matriz de varianzas y covarianzas y el vector R es un dato del problema puesto que conocemos las tasas esperadas de rendimiento de los n activos y también la tasa de rendimiento del activo libre de riesgo. El vector Z constituye la incógnita que se resuelve mediante:

$$Z = S^{-1} R$$

Considerando que $\boldsymbol{r_f = 0.03 = 3\%}$, el ejercicio numérico nos queda:

$$Z = \begin{bmatrix} 147.9631942 & -8.917424648 & -20.80732418 \\ -8.917424648 & 80.25682183 & -29.18429885 \\ -20.80732418 & -29.18429885 & 35.20908781 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \\ 0.09 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.729907721 \\ 0.405337484 \\ 1.585299466 \end{bmatrix}$$

De donde resulta que: $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{3} Z_i = 2.720544671}$

De manera que el vector W de solución para el portafolio de tangencia es:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.729907721 \\ 0.405337484 \\ 1.585299466 \end{bmatrix} \left[\frac{1}{2.720544671} \right] = \begin{bmatrix} 0.268294702 \\ 0.148991299 \\ 0.582713999 \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces que el portafolio de tangencia estará compuesto por 26.83 % del activo 1, 14.90 % por el activo 2 y 58.27 por el activo 3. La tasa de rendimiento esperada para el portafolio de tangencia es: $\bar{r}_{pT} = W^T R_i W$. Con los números que tenemos:

$$\vec{r}_{pT} = \begin{bmatrix} 0.268294 & 0.148991 & 0.582713 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.07 \\ 0.12 \end{bmatrix} = 0.093769806$$

y la varianza de este portafolio es: $\boldsymbol{\sigma^2_{pT}}$ = W^T S W. Sustituyendo con los números disponibles:

$$\sigma^2_{pT} = \begin{bmatrix} 0.26829 & 0.14899 & 0.58271 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0081 & 0.00378 & 0.00792 \\ 0.00378 & 0.0196 & 0.01848 \\ 0.00792 & 0.01848 & 0.0484 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.26829 & 0.14899 & 0.58271 \end{bmatrix} = 0.02344$$

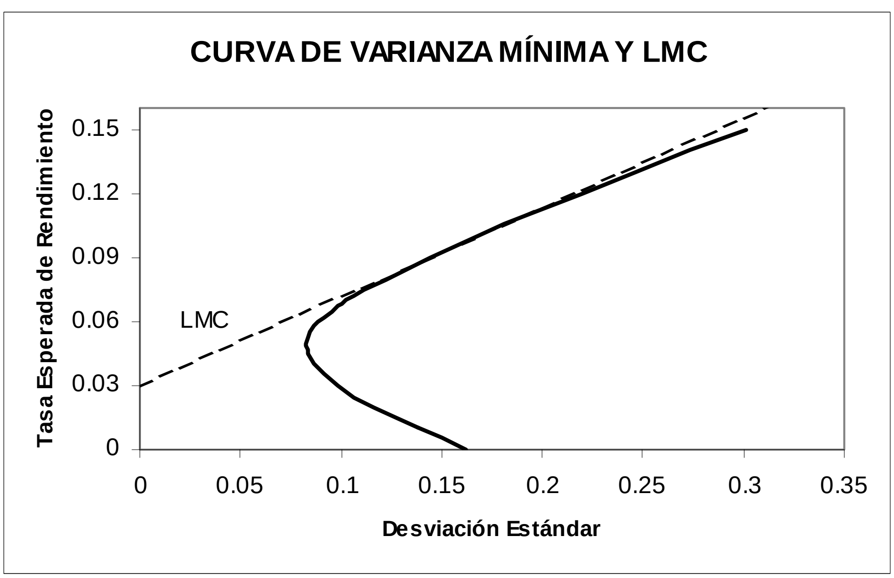
La desviación estándar del portafolio de tangencia es = $\sigma = 0.15310 = 15.31\%$

La pendiente de la línea LMC es:

$$\theta = \frac{0.093769806 - 0.03}{0.15310156} = 0.416519$$

De manera que la ecuación que describe a la LMC es: $\widetilde{r_p} = \mathbf{0.03} + \mathbf{0.416519}\ \sigma_{\mathrm{p}}$

En la gráfica siguiente integramos la curva de varianza mínima con la LMC.



II. MODELO DE 3 ACTIVOS CON RIESGO CON RESTRICCIÓN DE NO NEGATIVIDAD

1. Con los vectores W y la matriz S calculamos la varianza de un portafolio arbitrario, es decir, los componentes de W son arbitrarios. Para lo cual hacemos:

$$\sigma_p^2 = W^T \; S \; W$$

Encontramos el portafolio de varianza mínima global mediante SOLVER :

2. Vamos a “herramientas”, “Solver” y operamos en la ventana de esta manera:

3. “Celda objetivo”: es la celda donde está la fórmula la varianza del portafolio.

4. “Valor de la celda objetivo”: marcamos la opción de “mínimo”.

5. “Cambiando las celdas”: indicamos las celdas donde se encuentran los valores de los ponderadores.

6. “Sujeta a las siguientes restricciones”: indicamos que la suma de los ponderadores debe ser igual a la unidad.

7. En “opciones”: marcamos asumir no negativos.

8. Oprimiendo “resolver”: el programa modifica los valores del vector W tal que se cumplen con los objetivos y las restricciones y calcula la varianza correspondiente.

9. Haciendo la siguiente multiplicación tenemos la tasa esperada de rendimiento que corresponde a ese portafolio.

$$\widetilde{r_{pm}} = W^T \; \widetilde{R_i}$$

Para encontrar un conjunto de portafolios que cumplen con la condición de tener varianza mínima para tasas dadas de rendimiento esperado, repetimos el procedimiento anterior, pero agregamos como restricción en el paso 6, que la tasa de rendimiento sea un valor especificado cualquiera.

Resultado del ejercicio:

Con los insumos iniciales encontramos la curva de varianza mínima según aparece en la tabla siguiente:

desv.est.	rp	w1	w2	w3	I.Sharpe
0.09000	0.05	1	0	0	0.22222
0.08564	0.0525	0.87505	0.12495	0	0.26272
0.08472	0.054	0.79995	0.20005	0	0.28328
0.08471	0.0541	0.795	0.205	0	0.28451
* 0.08470	0.05429	0.78550	0.21450	0	0.28679
0.08485	0.055	0.75	0.25	0	0.29465
0.08895	0.06	0.67555	0.25424	0.07022	0.33728
0.09507	0.065	0.61525	0.23865	0.14610	0.36815
0.10282	0.07	0.55495	0.22307	0.22198	0.38903
0.11186	0.075	0.49465	0.20749	0.29786	0.40227
0.12191	0.08	0.43435	0.19191	0.37374	0.41012
0.13274	0.085	0.37406	0.17632	0.44962	0.41434
0.14417	0.09	0.31376	0.16074	0.52550	0.41618
0.15365	0.094	0.26552	0.14827	0.58621	0.41652
0.15389	0.0941	0.26482	0.14727	0.58791	0.41652
0.15402	0.09415	0.26394	0.14747	0.58860	0.41651
0.15414	0.0942	0.26311	0.14765	0.58924	0.41652
0.15486	0.0945	0.25949	0.14672	0.59380	0.41651
0.15607	0.095	0.25346	0.14516	0.60138	0.41649
0.16833	0.1	0.19316	0.12957	0.67726	0.41584
0.18090	0.105	0.13286	0.11399	0.75315	0.41460
0.19370	0.11	0.07257	0.09841	0.82903	0.41301
0.20669	0.115	0.01227	0.08283	0.90491	0.41124
0.22000	0.12	0	0	1	0.40909

* Fila correspondiente al portafolio de varianza mínima global.

Incorporación de un activo libre de riesgo.

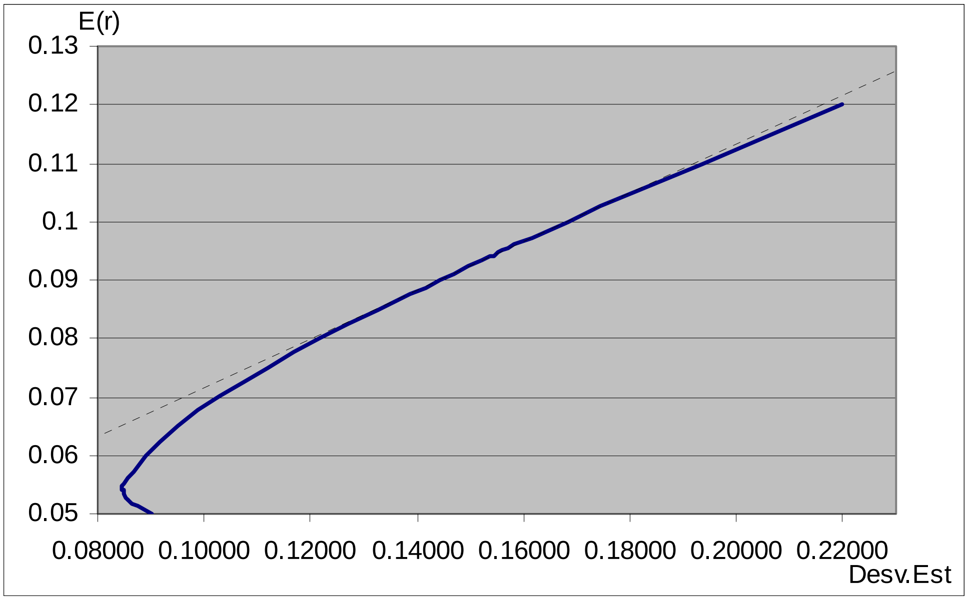
Introducimos un activo libre de riesgo con una tasa de rendimiento del 3% y calculamos la ecuación de la siguiente recta:

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{pT}} = \mathbf{0.03} + \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{p}}$$

utilizando los valores de σ_p listados en la tabla anterior y tal que encontremos un valor para b que satisfaga que la ecuación de la recta sea tangente al conjunto de portafolios eficientes. El valor de b es el máximo índice de Sharpe y resultó b = 0.41652379 de manera que el portafolio de tangencia se caracteriza por lo siguiente:

desv.est.	rp	w1	w2	w3	I.Sharpe
0.15389277	0.0941	0.26482182	0.14726946	0.58790873	0.41652379

La gráfica que corresponde a la tabla 1, a los valores que caracterizan el portafolio de tangencia así como a la LMC es la siguiente:


E(r)
0.13
0.12
0.11
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.08000 0.10000 0.12000 0.14000 0.16000 0.18000 0.20000 0.22000
Desv.Est