# ❶ Cum a apărut Prelucrarea Semnalelor

**Germenii PS** → Matematica din sec. XVI-XVII: problema reprezentării funcţiilor.

**Conceptul de "funcţie"**

- La început, *doar în domeniul timpului*: Teoremele de reprezentare (aproximare) ale lui: J. Fourier, K. Gauss, K. Weierstrass, D. Hilbert, L. Schwartz, P. Dirichlet, etc.
- Ulterior, şi *în domeniul frecvenţei*: Teoremele de reprezentare (aproximare) ale lui J. Fourier, Teoremele de eşantionare-interpolare ale lui: C.J. de la Vallée Poussin, C. Shannon, etc.

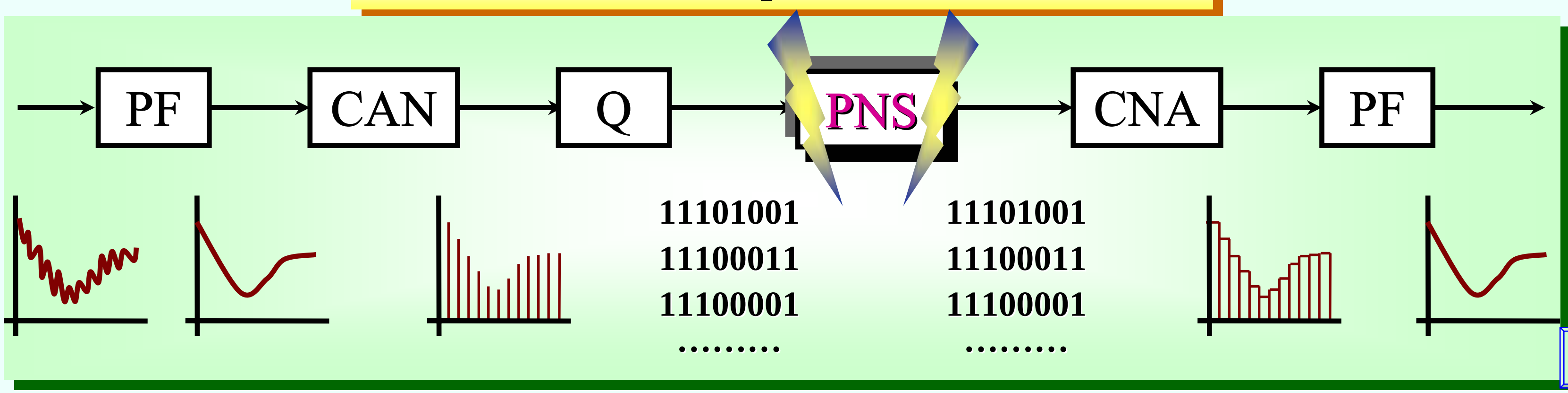
**Conceptul de "semnal"**

Entitate ce transportă informaţie atît în timp cît şi în frecvenţă.

**"Prelucrarea" semnalelor**

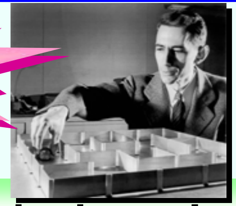
- Sensul colocvial: *transmisia* semnalelor pe calea undelor radio şi/sau prin telefonie (cu sau fără fir).
- Sensul ştiinţific: *detecţie*, *recunoaştere (identificare)*, *înregistrare*, *filtrare*, *analiză*, *cuantificare*, *codificare*, *transmisie*, *sinteză*, *estimare*, *predicţie*.

O schemă clasică de prelucrare a semnalelor



# ❶ Cum a apărut Prelucrarea Semnalelor

- Cu ~60 de ani în urmă → Domeniul PS cunoscut numai unui cerc restrîns de iniţiaţi din cercetarea secretă (civilă sau militară).
- Anul crucial: **1948**



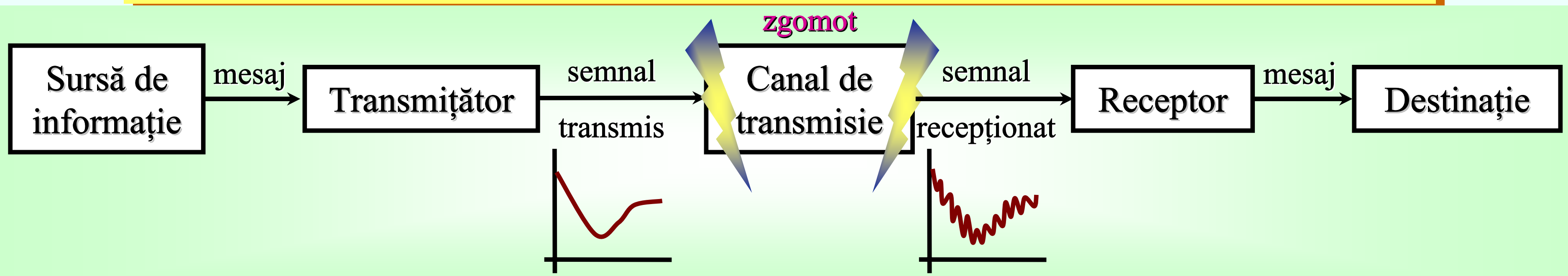
Continuă o lucrare vizionară a lui Ralp HARTLEY din 1928 şi este influenţat de lucrările lui Norbert WIENER, care a pus în evidenţă natura statistică a comunicaţiilor.

☞ Claude SHANNON (Bell Telephone Laboratories)

🕮 Publică un articol de referinţă, care a iniţiat dezvoltarea PS, IS şi a Teoriei Comunicaţiilor → **"A Mathematical Theory of Communication"**

Bell System Technical Journal
Vol. 27, pag. 379-423, 623-656.

Ideea fundamentală: transmisia informaţiei se realizează prin intermediul unui "sistem de comunicaţie"



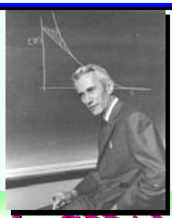

✍ Calculează capacitatea limită a canalului de transmisie pentru semnale de bandă finită →

$$C = \frac{\Omega_{max}}{2\pi}\log_2(\mathrm{SNR}+1)\left[\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}\right]$$

# ❶ Cum a apărut Prelucrarea Semnalelor

1948

?



☞ Bernard OLIVER, John PIERCE, Claude SHANNON

Tehnică inventată independent de către Paul RAINEY în 1926 și Alan REEVES în 1937, dar ignorată de comunitatea ştiinţifică.

🕮 Publică un articol despre tehnica PCM (*Pulse Code Modulation*), care, totuşi, nu a avut imediat efectul scontat.

"The Philosophy of PCM"

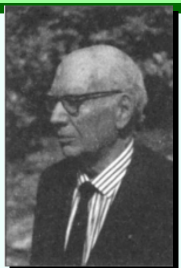
$\xrightarrow{\text{Azi}}$ PCM este utilizată de aproape 40 de ani pe scară largă.

☞ Tendinţa înlocuirii metodelor analogice cu metodele numerice (digitale).

$\xrightarrow{\text{Deja}}$ În timpul celui de-al doilea război mondial, majoritatea sistemelor radar/sonar operau cu pulsuri emise și recepționate pe cale electromagnetică, inginerii fiind obișnuiți cu prelucrarea de date numerice.

? Problema estimării densităţii spectrale a unui semnal analogic.

☞ Maurice BARTLETT (Anglia), John TUKEY (SUA)

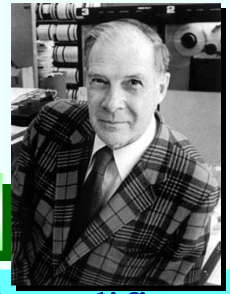


?

🕮 Publică articole în care prezintă diferite tehnici de *estimare spectrală* (în special folosind ferestre culisante de-a lungul semnalului).

# ❶ Cum a apărut Prelucrarea Semnalelor

**1948**



☞ Richard HAMMING

📖 Propune o tehnică de codificare a mesajelor în blocuri numerice binare, fiecare dintre ele verificînd o anumită ecuaţie algebrică, cunoscută şi la destinaţie.

→ Pune în evidenţă avantajele semnalelor digitale.

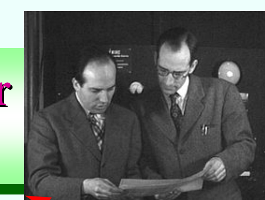
→ Posibilitatea de a detecta şi corecta erorile de transmisie.

☞ Bell Telephone Laboratories anunţă inventarea *tranzistorului*, în urma cercetărilor din domeniul fizicii solidului.

⟶ Explozie în domeniul transmisiilor radio şi a prelucrării semnalelor analogice.

⟶ Deschiderea erei miniaturizării aparaturii electronice.

☞ Manchester University prezintă (la 21 iunie) primul prototip de calculator electronic de mici dimensiuni, funcţionînd cu programe *stocate în memorie*.



⟶ Alte prototipuri aflate în construcţie la acea dată:

- EDSAC - Cambridge University (Maurice WILKES)
- BINAC - University of Pennsylvania (Presper ECKERT, John MAUCHLY)
- The Institute for Advanced Study in Princeton (John von NEUMANN)

⟶ Toate au fost experimentate cu succes puţin mai tîrziu.

# ❶ Cum a apărut Prelucrarea Semnalelor

1948

☞ Peter GOLDMARK (CBS Laboratories)

🕮 Trimite spre publicare la revista IRE (*Insitute of Radio Engineers*) un prim articol referitor la 2 termeni importanţi în PS: HI-FI (*High-Fidelity*) şi compresie de semnal.

"The Columbia Long-Playing Microgroove Recording System"

Termen inventat în 1934 de către comercianţii de LP-uri (*Long Play Disks*) şi reporterii radio.

! În 1930 exista chiar o preferinţă a multor ascultători pentru înregistrările de fidelitate scăzută, deşi începuseră să apară cele de fidelitate înaltă.

Declanșarea mișcării HI-FI (mai ales în rîndul radio-amatorilor), mișcare ce continuă și astăzi.

Conturarea şi începutul dezvoltării domeniului *Compresiei Datelor*.

☞ Norbert WIENER (Massachusetts Institute of Technology)

🕮 Publică (in anii '40) numeroase articole de prelucrare a semnalelor *afectate de zgomot*, punînd bazele *filtrării* (mai tîrziu, *adaptive*), *modelării auto-regresive* şi *predicţiei* acestora.

⟶ Participă la cercetări militare extrem de avansate, mai ales în timpul războiului.

⟶ Primii algoritmi rapizi (recursivi) de prelucrare și compresie pentru datele numerice.

# ❷ Conceptul de “semnal”: definiții

**Semnal** → Entitate ce transportă informaţie cu privire la starea sau comportarea unui sistem, atît în timp cît şi în frecvenţă.

Funcţie de forma: $f : \mathscr{T} \to \mathscr{M}$

**Mulţimea momentelor**

Nevidă, dotată cu o relaţie de ordine totală ($\leqslant$).

**Codomeniul semnalului**

Nevidă, oarecare.

☝ Nu neapărat momente de timp.

• De exemplu: poziţii spaţiale.

**Uzual**
- $\mathscr{T} \subseteq \mathbb{R}$ sau $\mathscr{T} \subseteq \mathbb{R}^2$
- $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}$ sau $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{C}$

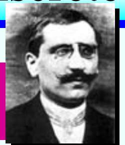
✍ Convenţie: semnalul are valori nule în afara mulţimii momentelor.

**Cadrul matematic tradiţional**
- Analiză Funcţională
- Teoria Distribuţiilor (L. SCHWARZ)
- Teoria Ecuaţiilor diferenţiale / cu diferenţe

$f \in \mathscr{L}^p(\mathscr{T})$ sau $x \in \ell^p(\mathscr{T})$ $\quad p \in \mathbb{N}^*$

Semnale continuale — Semnale “discrete”

Spaţiile lui LEBESGUE



✍ Notaţie: $\mathcal{S}^p(\mathscr{T})$ = oricare din cele 2 tipuri de spaţii.

# ❷ Conceptul de “semnal”: definiţii

**Observaţii**

- $\mathcal{L}^p(\mathscr{T})$ ⇒ Spaţiul funcţiilor p-integrabile (de tip BANACH). → $\int_{\mathscr{T}} |f(t)|^p \, dt < \infty$

  Semnale continuale $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mathscr{T})$

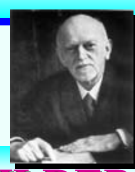
  norma aferentă → $\|f\| \overset{def}{=} \sqrt[p]{\int_{\mathscr{T}} |f(t)|^p \, dt}$

- $\ell^p(\mathscr{T})$ ⇒ Spaţiul funcţiilor p-sumabile (de tip BANACH). → $\sum_{n\in\mathscr{T}} |x[n]|^p < \infty$

  Semnale discrete $\forall x \in \ell^p(\mathscr{T})$

  norma aferentă → $\|x\| \overset{def}{=} \sqrt[p]{\sum_{n\in\mathscr{T}} |x[n]|^p}$

- $\mathcal{S}^p(\mathscr{T})$ ⇒ Spaţiu separabil: posedă cel puţin o bază numărabilă. ⇒ Semnalele pot fi reprezentate printr-o bază cu elemente numărabile.



**Cazul $p = 2$**

- $\mathcal{S}^2(\mathscr{T})$ ⇒ Spaţiu HILBERT. ⇒ produsul scalar

$$\langle f, g\rangle \overset{def}{=} \int_{\mathscr{T}} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

$$\langle x, y\rangle \overset{def}{=} \sum_{n\in\mathscr{T}} x[n]\overline{y[n]}$$

- Norma ⇒ Energia semnalului

$$\mathcal{E}(f) \overset{def}{=} \|f\|^2 = \int_{\mathscr{T}} |f(t)|^2 \, dt$$

$$\mathcal{E}(x) \overset{def}{=} \|x\|^2 = \sum_{n\in\mathscr{T}} |x[n]|^2$$

→ Uzual: *suma pătratelor valorilor semnalului.*

# ❷ Conceptul de "semnal": clasificări

## Clasa semnalelor continuale : $\mathcal{S}_c$

☞ $\mathcal{T}$ este o mulţime cu cel puţin o componentă conexă plus, eventual, un număr finit sau cel mult numărabil de momente izolate.

- De exemplu: un interval din $\mathbb{R}$.

✍ Notaţie: "$f(t)$" - cu paranteze rotunde.

☝ Nu neapărat semnale continue.

☞ Dacă şi continue ⇨ Semnale "analogice"

☞ În practică ⇨ Semnale "interpolate"

Semnale analogice, obţinute din semnale discrete, prin aplicarea unei tehnici de interpolare.

## Clasa semnalelor discrete : $\mathcal{S}_d$

☞ $\mathcal{T}$ este o mulţime discretă.

- De exemplu: o submulţime din $\mathbb{Z}$.

✍ Notaţie: "$x[n]$" - cu paranteze drepte.

☝ Nu se poate defini continuitatea.

☞ Denumire echivalentă ⇨ Semnale "digitale"

☞ În practică ⇨ Semnale "eşantionate/discretizate"

Obţinute din semnale continuale, prin aplicarea unei tehnici de eşantionare.

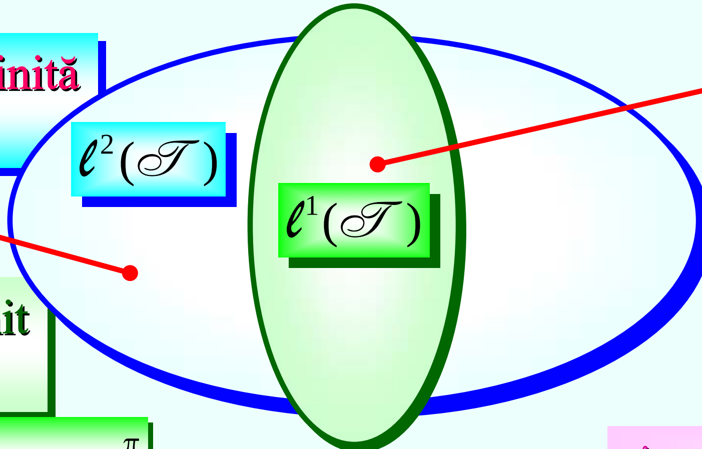
☝ Dualitate imperfectă între eşantionare şi interpolare.

☝ Cele 2 clase includ şi alte semnale.

- De exemplu, generate direct cu ajutorul unor sisteme continue, respectiv discrete.

# ❷ Conceptul de “semnal”: clasificări

Clasa semnalelor de energie finită (cu spectrul în energie)




Clasa semnalelor stabile (cu spectrul în frecvență)

☞ Există semnale ce nu admit Transformată Fourier.

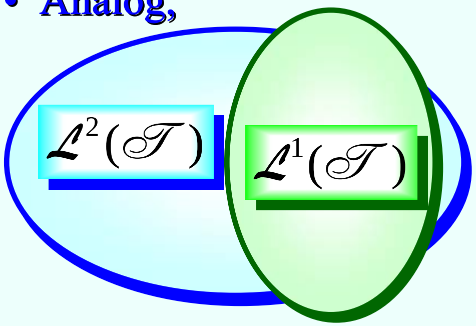
Exemplu ⇒ $x[n] = \dfrac{\sin \omega_0 n}{n}$ , $\forall n \in \mathbb{Z}$ , cu $\omega_0 \in \mathbb{Q}\dfrac{\pi}{2}$

☞ Se poate defini corect Transformata Fourier.

☝ Există semnale stabile, dar de energie infnită.

$x[n] = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ , $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ⇐ Exemplu

- Analog,




☞ Energia finită este o proprietate naturală a semnalelor practice, dar este de dorit ca ele să admită și Transformată Fourier.

☞ Testarea practică a proprietății de energie finită se realizează cu ajutorul conceptului de suport.

Suportul unui semnal ⇒

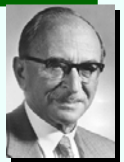
$$\mathrm{Supp}(f) \overset{def}{=} \overline{\{t \in R \mid f(t) \neq 0\}}$$ (închiderea complementarei zerourilor)

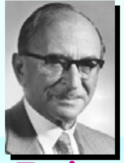
$$\mathrm{Supp}(x) \overset{def}{=} \overline{N_{\min}, N_{\max}}$$

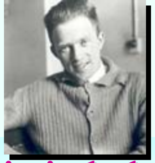
$$N_{\min|\max} \overset{def}{=} \min|\max\{n \in \mathbb{Z} \mid x[n] \neq 0\}$$

☞ Semnalele cu suport compact / finit sunt stabile (și de energie finită).

☝ Există și semnale stabile / de energie finită, cu suport infinit, dar ele verifică Principiul de incertitudine GABOR-HEISENBERG.







# ❷ Conceptul de "semnal": clasificări

**Principiul de incertitudine GABOR-HEISENBERG**
(varianta "populară")

Semnalul şi spectrul său nu pot avea simultan suporturi compacte / finite.

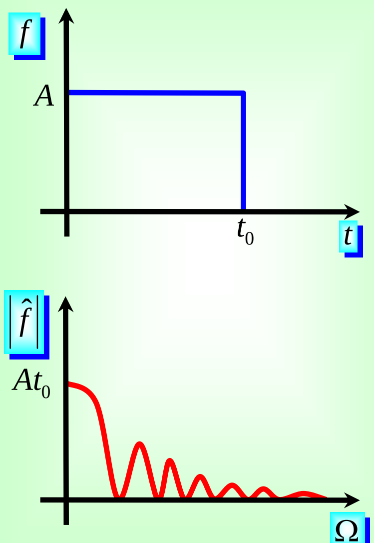
☝ Ambele pot avea, însă, suporturi infinite.

☞ În practică
- (a) Semnale de suport compact / finit, cu spectru de suport infinit.
- (b) Semnale de suport infinit, cu spectru de suport compact / finit.
- (c) Semnale esenţial localizate simultan în timp şi frecvenţă.

Semnal şi spectru cu valori neglijabile în afara unor suporturi compacte / finite.

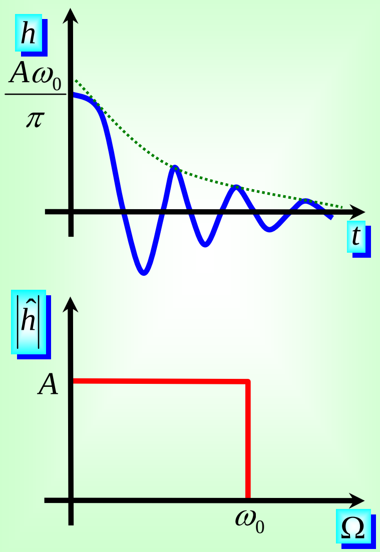
## Exemple

### (a) Fereastra rectangulară



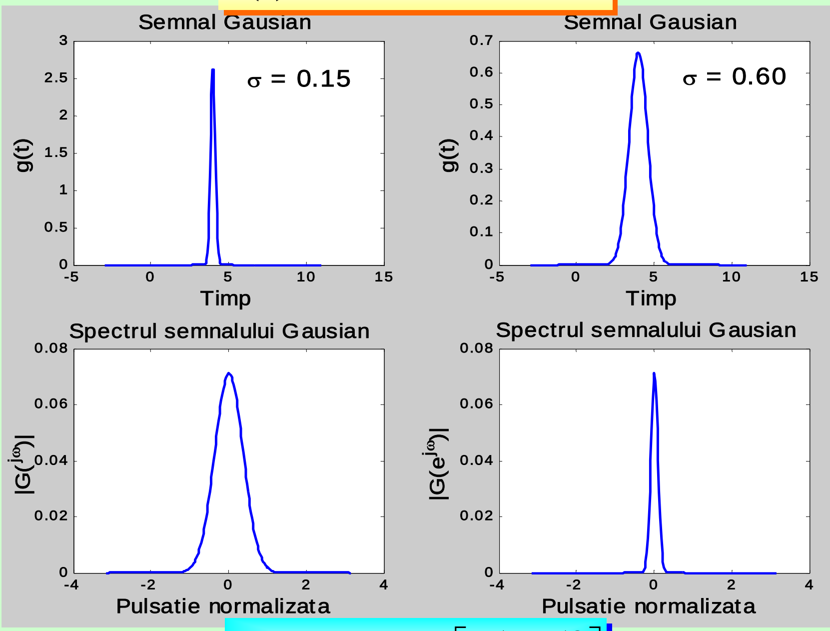

$$f(t) \overset{def}{=} \begin{cases} A \ , & t \in [0,t_0] \\ 0 \ , & t \notin [0,t_0] \end{cases}$$

### (b) Filtrul trece-jos




$$h(t) \overset{def}{=} \frac{A \sin \omega_0 t}{\pi t}$$

### (c) Semnalul lui Gauss




$$g(t) \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right]$$

# ❷ Conceptul de “semnal”: clasificări

**Clasa semnalelor deterministe**

- ☞ Valori unic determinate la fiecare moment al domeniului de definiţie, $\mathscr{T}$.
- ☞ Semnale total invariante la perturbaţii.
- ☞ Clasa tradiţională a semnalelor practice.

PS

**Clasa semnalelor nedeterministe**

- ☞ Valori afectate de un anumit grad de incertitudine, la fiecare moment al domeniului de definiţie, $\mathscr{T}$.
- ☞ Se pot determina anumite probabilităţi de apariţie a valorilor.
- ☞ Semnale afectate de perturbaţii (zgomote).

PS & IS

- ☞ Transferul de la “nedeterminist” la “determinist” se realizează cu ajutorul mărmilor (“momentelor”) statistice.
- ☞ Cea mai utilizată: autocovarianţa / autocorelaţia.

Autocovarianţa

$$r_f(\theta,\tau) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\theta)\overline{f(s-\tau)}\,dt\,ds\ ,\ \forall\,\theta,\tau\in\mathbb{R}$$

$$r_x[p,q] \stackrel{def}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} x[n-p]\overline{x[m-q]}\ ,\ \forall p,q\in\mathbb{Z}$$

$\left.\begin{matrix}(\theta,\tau)\\ [p,q]\end{matrix}\right\}$ perechi de pivoţi

- ☞ Definiţie care se extinde şi la clasa semnalelor deterministe.
- ☞ O interpretare: gradul de redundanţă a semnalului.

☝ Zgomotul alb: perfect neredundant.

# ❷ Conceptul de “semnal”: clasificări

## Clasa semnalelor staționare

☞ Cu spectru  constant în timp (invariabil).

☞ Redefinirea autocovarianței:

$$r_f(\tau) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{f(t-\tau)}\,dt\ , \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

$$r_x[k] \overset{def}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]\overline{x[n-k]}\ , \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

☝ Depinde numai de diferența pivoților.

## Clasa semnalelor nestaționare

☞ Cu spectru variabil în timp.

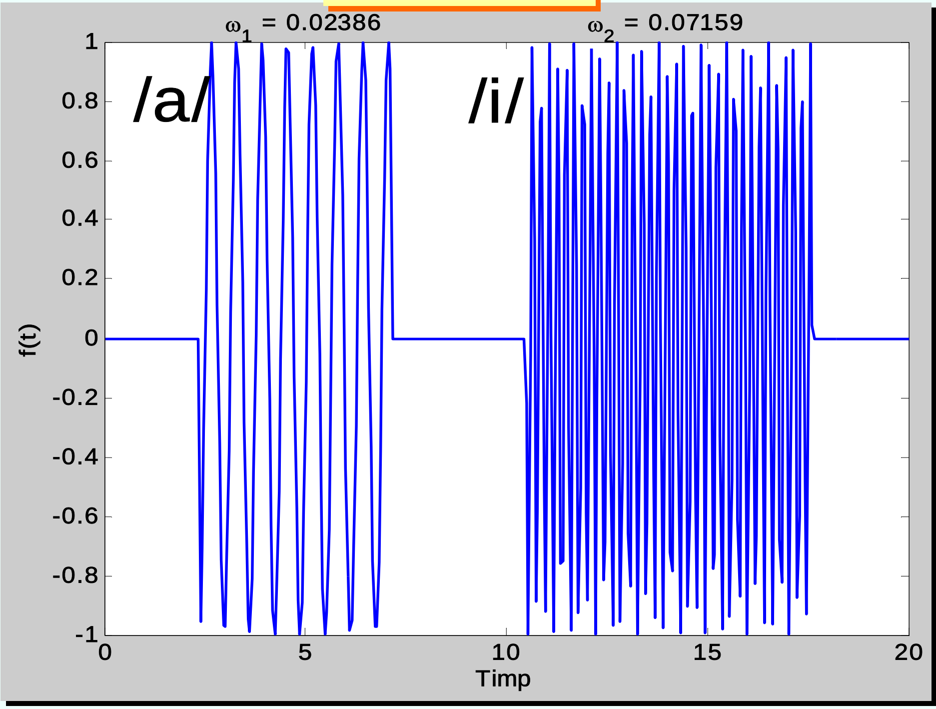
☝ Majoritatea semnalelor naturale sunt nestaționare.

## Exemplu de semnal nestaționar simulat

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega_1 t)\ , & t \in [T_1, T_2] \\ \sin(\omega_2 t)\ , & t \in [T_3, T_4] \\ 0\ , & t \notin [T_1, T_2] \cup [T_3, T_4] \end{cases}$$

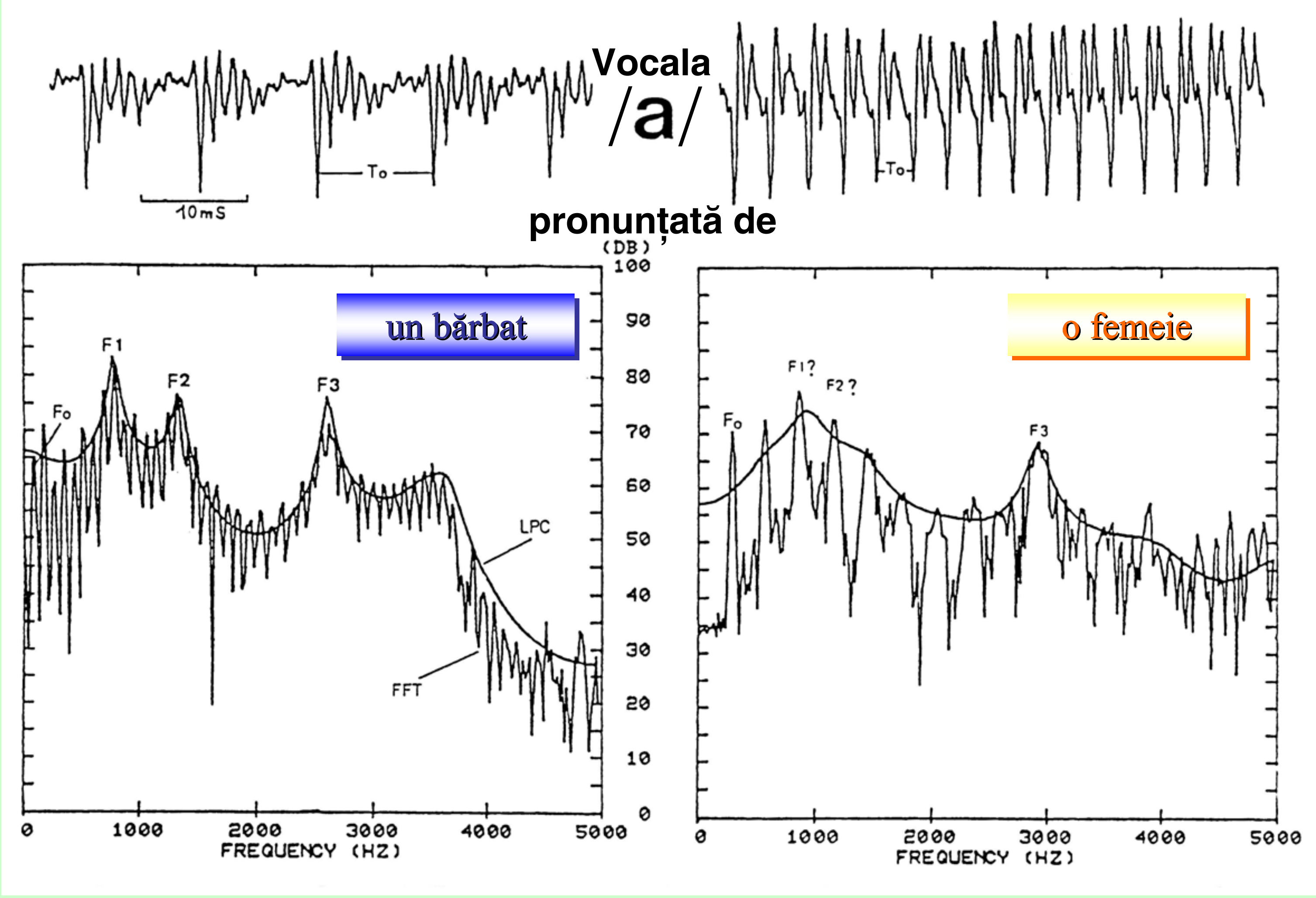
$$\begin{cases} T_1 < T_2 < T_3 < T_4 \\ \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases}$$

Două vocale



# ❷ Conceptul de “semnal”: clasificări

## Exemplu de semnal nestaţionar real: semnalul vocal




☝ Unul dintre cele mai complexe semnale din natură, deşi extrem de redundant.

- Alte semnale nestaţionare naturale complexe: seismice, cosmice, subacvatice.

# ❷ Conceptul de “semnal”: clasificări

## Clasa semnalelor netede

☞ Cu derivate continue.

☞ Datorită preciziei finite de reprezentare, semnalele fractale apar cu aliură netedă.

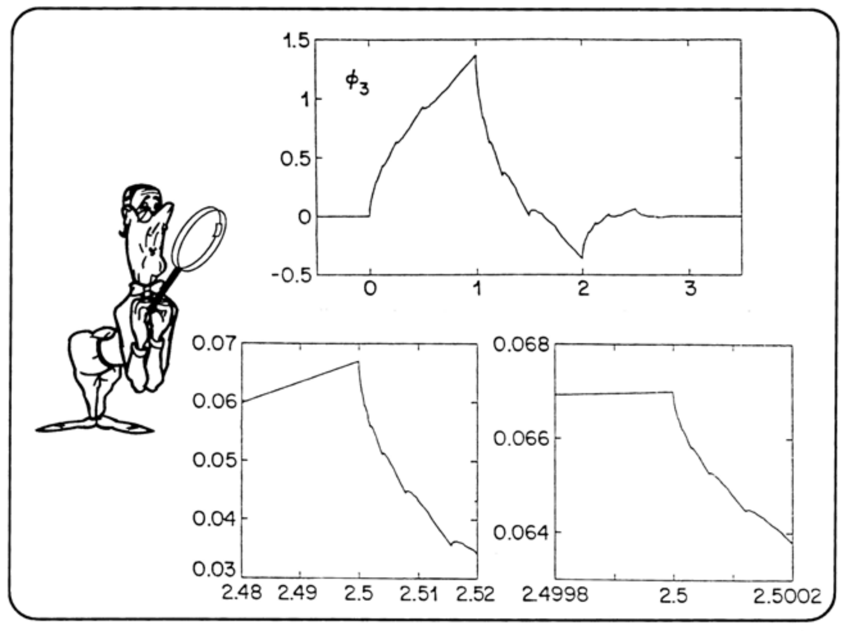
## Clasa semnalelor fractale

☞ Derivatele au următoarea proprietate: există o “ruptură” între oricare două momente.

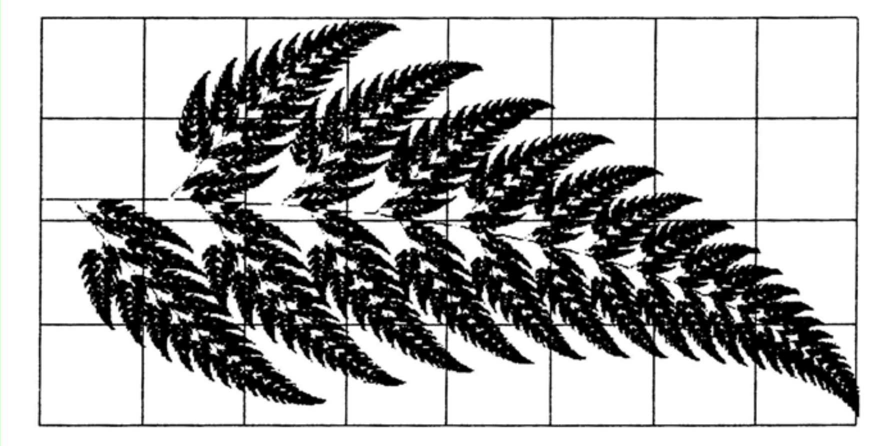
☝ Majoritatea semnalelor naturale sînt fractale.

## Exemple de semnale fractale

### Semnal unidimensional




### Semnal bidimensional



☝ Corelaţie intimă între ruptura tangentei şi conţinutul de frecvenţe.