

# ③ Problematica Prelucrării Semnalelor



## ②.① Problema matematică

### 👉 Problema directă

- Fie un semnal  $f \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$  și o bază numărabilă  $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ .  
Se cere să se descompună semnalul în “componentele” sale, determinate de bază:

$$f \equiv \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n e_n.$$

- 👉 Adică să se determine valorile **coeficienților** din descompunere.

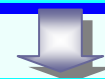
### 👉 Problema inversă

- Fie un semnal necunoscut  $f \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$  și o bază numărabilă  $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ .  
Dacă se cunosc valorile coeficienților descompunerii semnalului în baza dată, se cere să se reconstruiască semnalul inițial cu ajutorul componentelor sale.

### Observații

- 👉 Problema directă: dificilă; problema inversă: banală.
- 👉 Dificultatea majoră: selectarea unei baze adecvate.
- 👉 Dacă spațiul de semnale e **Hilbert** și se poate specifica o bază **ortonormată**, problema se simplifică.

$$\langle e_m, e_n \rangle = \delta_0[m - n], \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$



$$c_n = \langle f, e_n \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

# ③ Problematica Prelucrării Semnalelor



## ②.② Problema inginerască

### 👉 Problema analizei de semnal (a descompunerii)

- Fie un semnal  $f \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$  și o bază numărabilă  $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ .  
Se cere să se construiască un nou semnal  $\phi \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ , cu următoarele proprietăți:
- 1.  $\phi$  se poate exprima în forma:  $\phi \equiv \sum_{n=0}^N c_n e_n$ , unde:  $N \in \mathbb{N}$  este fixat și finit, iar coeficienții  $\{c_n\}_{n \in \overline{0, N}} \subset \mathbb{C}$  se pot determina numai cu ajutorul semnalului și al bazei specificate.
- 2.  $\phi$  aproximează semnalul original cu precizie controlată: pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\phi \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$  (depinzând de  $\varepsilon$ ), astfel încât:  $\|f - \phi\| < \varepsilon$ .

### 👉 Problema sintezei de semnal (a reconstrucției)

- Fie un semnal necunoscut  $f \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$  și o bază numărabilă  $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ .  
Dacă s-a construit un model matematic  $\phi \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$  al semnalului, se cere să se indice valoarea  $f(t_0)$  (unde  $t_0 \in \mathcal{T}$ ), cu un grad de precizie determinat de  $\phi$ .

👉 Dacă baza este *ortonormată*.

👉 Eliminarea / diminuarea redundanței.

Analiză

Sinteză

$$c_n = \langle f, e_n \rangle, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f \equiv \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, e_n \rangle e_n$$



# ③ Problematica Prelucrării Semnalelor

## ②.③ O soluție clasică (Joseph FOURIER)

### ⚡ Ideea lui FOURIER

Orice semnal poate fi considerat ca o suprapunere aditivă de semnale atomice “monofrecvențiale”, de diferite amplitudini.

### Teorema de aproximare punctuală a lui DIRICHLET-FOURIER



Combinatie liniară de “armonice elementare”.

☞ Introducerea conceptelor de “serie Fourier” și “analiză armonică”.

### Soluția lui FOURIER pentru semnale continue

$$f \in \mathcal{L}^2([-\pi, +\pi])$$

### Baza armonică a lui $\mathcal{L}^2([-\pi, +\pi])$

$$\mathcal{B}_a \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \underbrace{1}_{e_0}, \underbrace{\sin t}_{e_{s1}}, \underbrace{\cos t}_{e_{c1}}, \dots, \underbrace{\sin nt}_{e_{sn}}, \underbrace{\cos nt}_{e_{cn}}, \dots \right\}$$

### ☞ Ortogonalitatea bazei armonice

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

$$\|e_0\|^2 = 2\pi$$

$$\langle e_{sn}, e_{sm} \rangle = \pi \delta_0[n - m]$$

$$\langle e_0, e_{sn} \rangle = 0$$

$$\langle e_{cn}, e_{cm} \rangle = \pi \delta_0[n - m]$$

$$\langle e_0, e_{cn} \rangle = 0$$

$$\langle e_{sn}, e_{cm} \rangle = 0$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*$$

☞ Nu și normată!

# ③ Problematika Prelucrării Semnalelor



## ②.③ O soluție clasică (Joseph FOURIER)

### Formulele lui FOURIER



#### Coeficienții (lui) FOURIER

##### Analiză

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \langle f, e_0 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) dt$$

$$\beta_0 = 0$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \langle f, e_{cn} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt dt$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \langle f, e_{sn} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin nt dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$

#### Seria (lui) FOURIER

##### Sinteză

$$f(t) \stackrel{PC}{=} \alpha_0 + \sum_{n \geq 1} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

⚡ Convergență punctuală (slabă) și nu uniformă!

$$\forall t \in [-\pi, +\pi]$$

Armonică elementară de frecvență  $n/2\pi$

$$\mathcal{A}_n(t) = \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

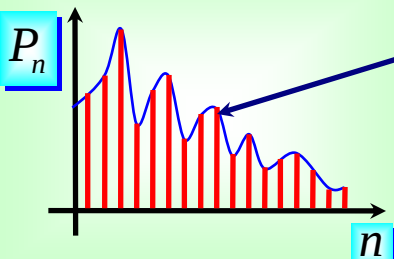
$$\forall t \in [-\pi, +\pi]$$

$$\mathcal{A}_n(t) = P_n \sin(nt + \varphi_n)$$

$$P_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$$

$$\varphi_n = \arctg \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

#### Interpretarea lui Fourier



linie spectrală

putere spectrală

fază spectrală

PARSEVAL

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$$

bandă finită

$$\phi(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

# 4 Algebra secvențelor discrete de semnal

Prelucrarea Numerică a Semnalelor  
(DSP - Digital Signal Processing)

Ramură importantă a Prelucrării Semnalelor.

- Permite reprezentarea semnalelor cu ajutorul unui mijloc automat de calcul

Semnal discret  
(digital)

Secvență discretă de numere (reale sau complexe)

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \{x[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

eșantion

- Generate:
  - direct, prin intermediul unui sistem discret
  - prin eșantionarea semnalelor continue

Mulțimea  
semnalelor  
discrete

$\mathcal{S}_d$

⚡ Pot avea proprietăți diferite de ale semnalelor continue originale.

- include, printre alte clase de semnale, spațiile lui Lebesgue  $\ell^p(\mathcal{T})$

Exemple simple de semnale discrete

Impulsul unitar  
(simbolul lui Kronecker)

$\delta_0$

$$\delta_0[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & , n \in \mathbb{Z}^* \\ 1 & , n = 0 \end{cases}$$



Treapta unitară

$u_0$

$$u_0[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ 1 & , n \geq 0 \end{cases}$$



Impulsul Dirac

⚡ În timp continuu

Treapta Heaveside

# 4 Algebra secvențelor discrete de semnal

Treapta unitară

Prototipul semnalelor **cauzale**

Semnale **anti-cauzale**

Nule **în stînga** originii timpului.

Nule **în dreapta** originii timpului.

- Semnalele care nu sunt nici cauzale, nici anti-cauzale se numesc **ne-cauzale**.

Orice semnal se poate exprima cu ajutorul a două componente: una **cauzală** și alta **anti-cauzală**.

$$x[n] = \underbrace{x[n]u_0[n]}_{x_c[n]} + \underbrace{x[n]u_0[-n-1]}_{x_a[n]}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

Impulsul unitar

Două exprimări remarcabile:

$$\delta_0[n] = u_0[n] - u_0[n-1] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\delta_0[n] = u_0[-n] - u_0[-n-1]$$



Exprimarea cu ajutorul componentelor cauzală și anti-cauzală **nu este unică**.

- Există semnale care nu fac parte din spațiile lui Lebesgue.

~~$\ell^p(\mathcal{I})$~~

notație specifică semnalelor periodice

**Exemplu**

Orice semnal (discret) periodic, de perioadă  $N$

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + kN] \quad \forall n, k \in \mathbb{Z}$$

Nu toate semnalele continuu periodice conduc prin discretizare la semnale discrete periodice.

**Exemplu**

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 / \pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

→ perioadă:  $2\pi / \omega_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$x[n] = f(nT_e) = A \cos(n\omega_0 T_e + \varphi)$$

$$T_e \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

ne-periodic

# 4 Algebra secvențelor discrete de semnal

## Operații elementare cu semnale discrete în $\mathcal{S}_d$

- adunarea

$$x + y \stackrel{\text{def}}{=} \{x[n] + y[n]\}_{n \in \mathbb{Z}} \Rightarrow (\mathcal{S}_d, +)$$

- înmulțirea

$$x \bullet y \stackrel{\text{def}}{=} \{x[n]y[n]\}_{n \in \mathbb{Z}} \Rightarrow (\mathcal{S}_d, \bullet)$$

- modularea cu scalari  
(reali sau complecși)

$$\alpha \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha x[n]\}_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow (\mathcal{S}_d, +, \cdot) \\ \Rightarrow (\mathcal{S}_d, +, \bullet, \cdot) \end{array} \right.$$

← Grup Abelian

- element nul:

$$\{0\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

← Inel Comutativ

- element unitar:

$$\{1\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

← Spațiu Vectorial

← Algebră Comutativă

Aritmetică de semnal

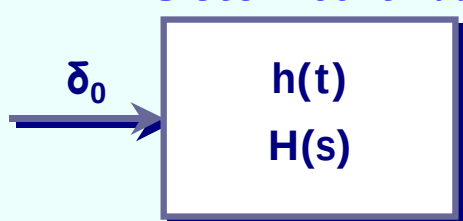
$(\mathcal{S}_d, +, \cdot)$  ← Spațiu Vectorial

O bază?

## Proprietate remarcabilă din cazul sistemelor liniare continue

- Reprezentarea funcției pondere cu ajutorul impulsului Dirac:

Sistem continuu



$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \delta_0(t - \tau) d\tau \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

• Versiunile translate ale impulsului unitar pot juca un rol important în construcția unei baze.

versiune traslatată în timp a impulsului Dirac

# 4 Algebra secvențelor discrete de semnal

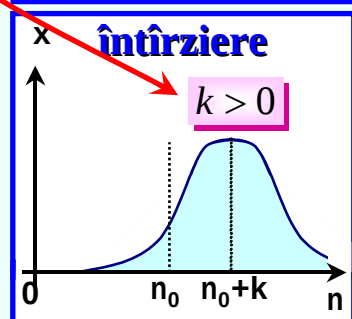
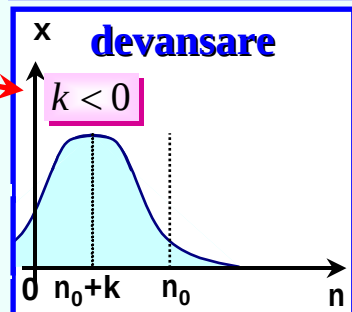
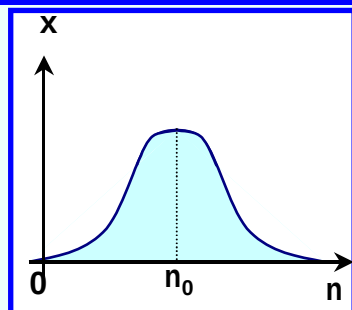


$(\mathcal{S}_d, +, \cdot)$  ← Spațiu Vectorial

O bază?



**Operatorul de  
translatare temporală**



Tipul inegalității  
sugerează sensul  
deplasării temporale.

$$\left\{ \begin{array}{l} q^{-k} : \mathcal{S}_d \rightarrow \mathcal{S}_d \\ (q^{-k} x)[n] \stackrel{\text{def}}{=} x[n - k] \end{array} \right. \forall n, k \in \mathbb{Z}$$

Proprietăți

- **Convenție:**  $q^0 x \equiv x$
- **Liniaritate:**  $q^{-k}(\alpha x + \beta y) \equiv \alpha(q^{-k} x) + \beta(q^{-k} y)$
- **Principiul cumulării deplasărilor temporale:**

$$q^{-k} \circ q^{-m} \equiv q^{-(m+k)}$$

$$\forall m, k \in \mathbb{Z}$$

**Baza canonică**

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{q^{-k} \delta_0\}_{k \in \mathbb{Z}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\delta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

- Orice semnal discret se poate reprezenta  
în mod unic folosind baza canonică:

$$x \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta_k \Leftrightarrow x[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta_k[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta_0[n - k] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

notație  
naturală

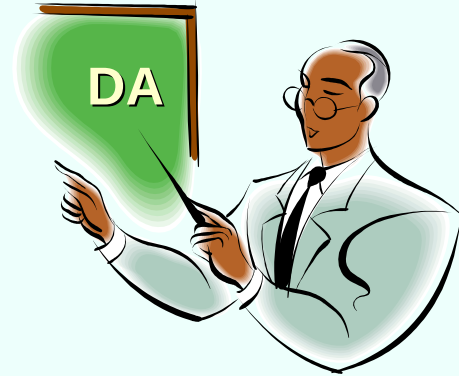
$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \delta_0(t - \tau) d\tau \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Similaritate  
evidentă.

# 5 Sisteme liniare invariante la deplasări



Există conexiuni între  
Prelucrarea Semnalelor și  
Teoria Sistemelor?

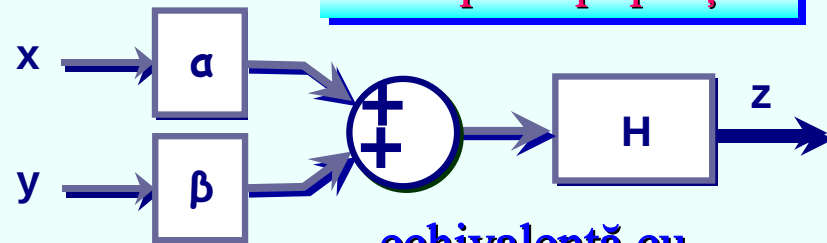


**Sistem dinamic discret**  
(Sistem de Prelucrare a Semnalelor Discrete)

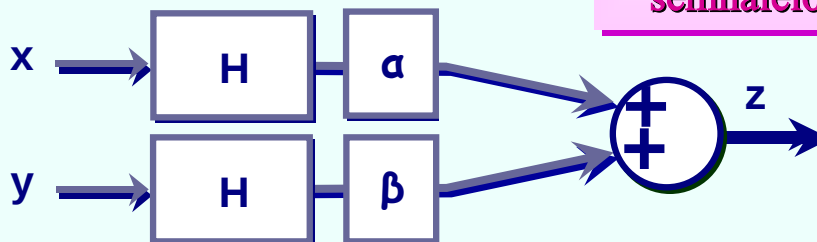
- Caz particular remarcabil: **sistemul liniar**.

$$\stackrel{\text{def}}{H(x) \equiv Hx} \Leftrightarrow H(\alpha x + \beta y) \equiv \alpha H(x) + \beta H(y)$$

**Principiul superpoziției**



echivalentă cu



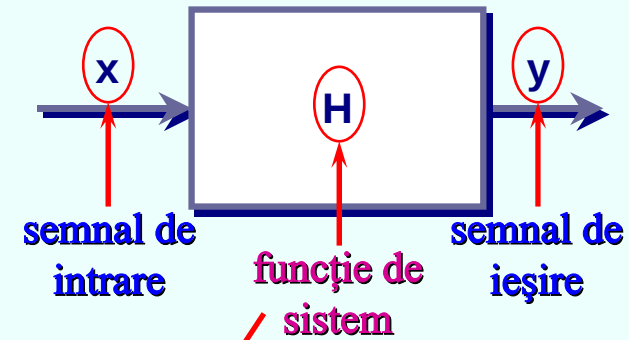
Operatorul  
comută cu  
transformarea  
liniară  
elementară a  
semnalelor.

Orice operator de forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} H : \mathcal{S}_d \rightarrow \mathcal{S}_d \\ H(x) \stackrel{\text{def}}{=} y \end{array} \right.$$

! Nu neapărat  
liniar.

**Sistem de Prelucrare a  
Semnalelor (Discrete)**



filtru (numeric),  
transformare/transformată

# 5 Sisteme liniare invariante la deplasări



## Caracteristici ale sistemelor liniare

•  $h_k \stackrel{\text{def}}{=} H\delta_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$y \stackrel{\text{def}}{=} Hx \equiv H \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta_k \right)$  &  $y \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} y[k] \delta_k \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} (Hx)[k] \delta_k$

reprezentarea intrării în baza canonică      reprezentația ieșirii în baza canonică

✦ În anumite condiții.

$$y \equiv H \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta_k \right) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] H\delta_k \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h_k \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} (Hx)[k] \delta_k$$

✦ Operatorul  $H$  nu comută cu sumele infinite, în general, chiar dacă este liniar.

- Liniaritatea se aplică prin definiție **sumelor finite**.
- În cazul combinației liniare canonice a **semnalelor mărginite**, operatorul comută cu suma infinită, deoarece, la fiecare moment valoarea acestuia este finită.

## \* Abordare practică

→ se operează cu semnale practice, adică **mărginite**

→ se definește norma canonică (sup) pe  $\mathcal{S}_{0d}$

→ se definește distanța asociată normei

→ operatorul  $H$  este continuu în origine (deci peste tot)

$$\mathcal{S}_{0d} \subset \mathcal{S}_d$$

$$\|x\|_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]| < \infty$$

$$d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x - y\|_{\infty}$$

$(\mathcal{S}_{0d}, \|\cdot\|_{\infty})$  ← Spațiu Banach

$(\mathcal{S}_{0d}, d)$  ← Spațiu Hausdorff cu topologie liniară

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta_k$  ← Uniform Convergentă

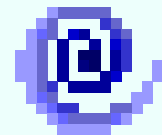
$H$  comută cu suma

# 5 Sisteme liniare invariante la deplasări

## Caracteristici ale sistemelor liniare

- Continuitatea în origine a funcției de sistem este o formă de **stabilitate intrinsecă** a sistemului.

→ Intrări cu valori din ce în ce mai apropiate de zero produc ieșiri din ce în ce mai apropiate de zero.



👉 Originea este un atractor universal.



$$y[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h_k[n] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Ieșirea se exprimă cu ajutorul unei combinații liniare de **impulsuri unitare transformate**.

👉 Practic, însă, este natural ca versiuni deplasate în timp ale impulsului unitar să producă ieșiri extrem de corelate între ele.

## Sistem invariant la deplasări

👉 Nu neapărat liniar.

Deplasarea în timp a intrării cu un număr de momente normalizate produce deplasarea în timp a ieșirii cu același număr de momente normalizate.

- Majoritatea covârșitoare a sistemelor practice sunt invariante la deplasări.
- Sistemele adaugă și o întârziere datorată  **timpului mort intrinsec**.
- Este natural ca sistemul să nu aplice întârzieri diferite eșantioanelor intrării aflate la momente de timp diferite.
- Practic, pentru un sistem invariant la deplasări are loc următoarea proprietate remarcabilă:  
**funcția de sistem comută cu operatorul de deplasare temporală.**

**Secvența/funcția pondere a sistemului.**

$$h_0 \stackrel{\text{renot}}{=} h \stackrel{\text{def}}{=} H(\delta_0)$$

$$H \circ q^{-k} \equiv q^{-k} \circ H \Leftrightarrow H(q^{-k} x) \equiv q^{-k} H(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$h_k \equiv q^{-k} h_0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Impulsurile unitare transformate sunt versiuni deplasate în timp ale unui singur semnal:  **$h_0 \equiv H(\delta_0)$** .

# 5 Sisteme liniare invariante la deplasări

## Caracteristici ale Sistemelor Liniare Invariante la Deplasări (SLID)

- Sunt caracterizate doar de secvența pondere:
- Ieșirea unui SLID se exprimă astfel:

$$h \stackrel{\text{def}}{=} H\delta_0$$

← răspunsul la impuls al sistemului

⚡ Nu neapărat cauzal.

$$y[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k]h_k[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k](q^{-k}h)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k]h[n-k]$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

Introducerea unei noi operații între semnale cu valori reale: **convoluția (liniară)**.

$$x * y \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k](q^{-k}y) \Leftrightarrow (x * y)[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k]y[n-k]$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

⚡ Cu condiția ca suma din definiție să fie convergentă.

- Definiție similară în mulțimea semnalelor continue:

$$(f * g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

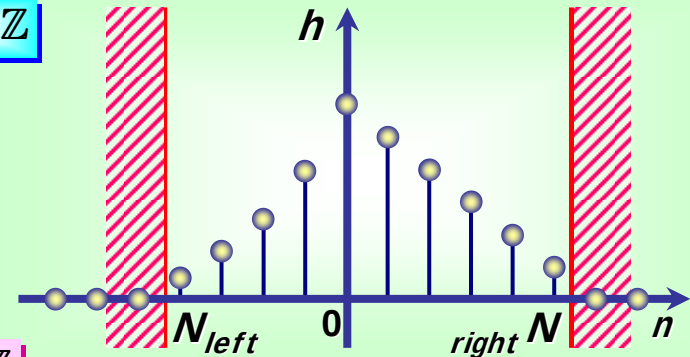
$$\forall t \in \mathbb{R}$$

- Generalizare în cazul semnalelor cu **valori complexe**:

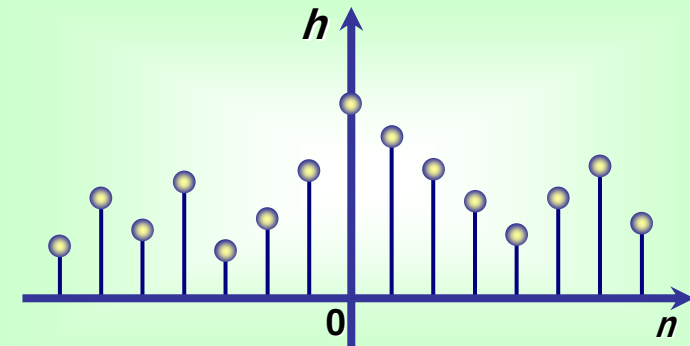
$$x * y \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k](\overline{q^{-k}y}) \Leftrightarrow (x * y)[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k]\overline{y[n-k]}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

**FIR – cu răspuns finit la impuls**



**IIR – cu răspuns infinit la impuls**



# 5 Sisteme liniare invariante la deplasări



## Structura indusă de convoluția (liniară)

- Mulțimea semnalelor care pot fi “convolute”:

$$\mathcal{S}_{*d} \subset \mathcal{S}_d$$

👉 Nevidă

$$\ell^1(\mathcal{T}) \subset \mathcal{S}_{*d}$$

(absolut sumabile)

- Proprietăți:

$$x * y * z \equiv x * (y * z) \equiv (x * y) * z$$

← asociativitate

$$x * y \equiv y * x$$

← comutativitate

$$x * (y + z) \equiv x * y + x * z$$

← distributivitate față de adunare

$$x * (\alpha y + \beta z) \equiv \alpha x * y + \beta x * z$$

← bi-liniaritate

$$(\alpha y + \beta z) * x \equiv \alpha y * x + \beta z * x$$

$$x * \delta_0 \equiv x$$

← elementul unitar (exprimarea în baza canonică)

👉 Dar nu se reduce la

$$(\mathcal{S}_{*d}, +, *, \cdot)$$

← Algebră Unitară Comutativă

👉 Prin discretizarea unui SLID continuu nu se obține un SLID discret decât în condițiile efectuării unei eșantionări corecte.

# 5 Sisteme liniare invariante la deplasări

## Stabilitate

- Una dintre cele mai importante proprietăți ale SLID, din perspectiva **Teoriei Sistemelor**.
- Permite definirea conceptului și în cadrul **Prelucrării Semnalelor**.

**Sistem stabil**

**Sistem care răspunde cu ieșiri mărginite la intrări mărginite.**

## Propoziția 1

Un SLID este stabil (în sensul definiției de mai sus) dacă și numai dacă secvența pondere a sa este absolut sumabilă.

- Cu alte cuvinte, **stabilitatea unui SLID** este echivalentă cu:  $h \in \ell^1(\mathcal{I})$

**Demonstrație**



**Semnal discret stabil**

**Semnal absolut sumabil.**

$\ell^1(\mathcal{I})$

**Clasa semnalelor discrete stabile**

☞ Se va arăta că semnalele stabile admit Transformată Fourier.

# 5 Sisteme liniare invariante la deplasări



## Cauzalitate

- Altă proprietate importantă a unui SLID, care relevă realizabilitatea fizică a acestuia.
- SLID care nu respectă principiul cauză-efect **nu pot fi realizate fizic, dar pot fi simulate.**
- Permite definirea conceptului și în cadrul **Prelucrării Semnalelor.**

### Sistem causal

Sistem a cărui ieșire la un moment arbitrar de timp depinde numai de valori ale intrării la momente anterioare, cel mult simultane cu momentul considerat.

### Propoziția 2

Un SLID este causal (în sensul definiției de mai sus) dacă și numai dacă suportul secvenței pondere este nenegativ.

- Cu alte cuvinte, **cauzalitatea unui SLID** este echivalentă cu:

$$\text{Supp}(h) \subseteq \mathbb{Z}_+$$

Demonstrație



### Semnal discret causal/anti-causal

Semnal al cărui suport este **nenegativ/nepozitiv.**

- Prima definiție este similară celei de **funcție original** din contextul sistemelor continue.
- Semnalele care nu sunt nici cauzale nici anti-cauzale sunt **necauzale.**
- Operația de convoluție dintre două semnale cauzale sau anti-cauzale **este bine definită.**



$$x[n] = \underbrace{x[n]u_0[n]}_{x_c[n]} + \underbrace{x[n]u_0[-n-1]}_{x_a[n]} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

**causal + anti-causal**



$\mathcal{S}_{*d}$

nu se reduce la  $\ell^1(\mathcal{I})$



# 5 Sisteme liniare invariante la deplasări

SLID discrete se mai numesc și **filtre (liniare) numerice**.

- Un filtru numeric este **realizabil fizic** dacă secvența pondere a sa este **cauzală**.

☞ Nu se poate implementa conceptul de **moment anti-cauzal**.

În ce condiții se poate proiecta un filtru numeric realizabil fizic?



Răspunsul este dat de un vechi rezultat din 1934: **Teorema Paley-Wiener**.



## Teorema 1 (Paley-Wiener)

- a. Fie o secvență discretă cauzală și stabilă,  $h$ . Atunci are loc următoarea proprietate remarcabilă:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left| \ln \left| H(e^{j\omega}) \right| \right| d\omega < \infty,$$

unde  $H(e^{j\omega})$  este Transformata Fourier a secvenței discrete definită prin:

$$H(e^{j\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} h[n] e^{-j\omega n} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

- b. Reciproc, dacă spectrul  $|H(e^{j\omega})|$  al unei secvențe discrete stabile  $h$  are proprietatea de la punctul a., atunci acestuia i se poate asocia o fază  $\varphi(\omega)$  astfel încât secvența obținută prin evaluarea Transformatei Fourier inverse să fie cauzală.

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(e^{j\omega}) e^{+j\omega n} d\omega \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

# 5 Sisteme liniare invariante la deplasări

În ce condiții se poate proiecta un filtru numeric realizabil fizic?



## Interpretarea Teoremei Paley-Wiener

- Secvența discretă din cadrul Teoremei poate fi asimilată cu secvența pondere a unui filtru numeric.

- Pentru ca integrala din aserțiunea directă să fie finită este necesar ca spectrul filtrului să aibă o mulțime cel mult numărabilă de zerouri.

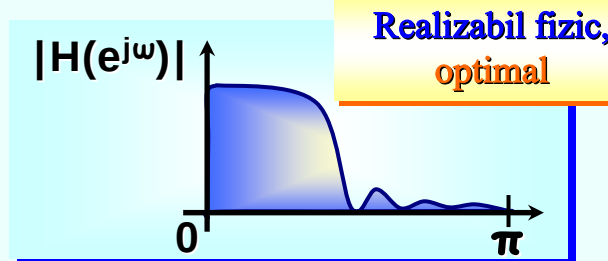
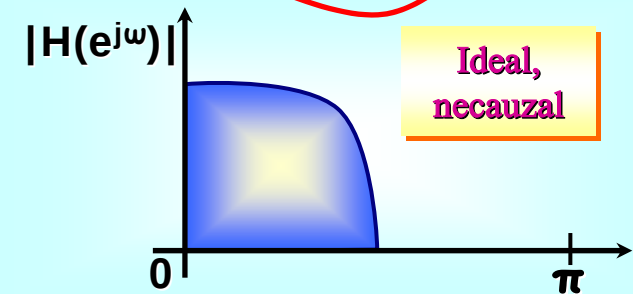
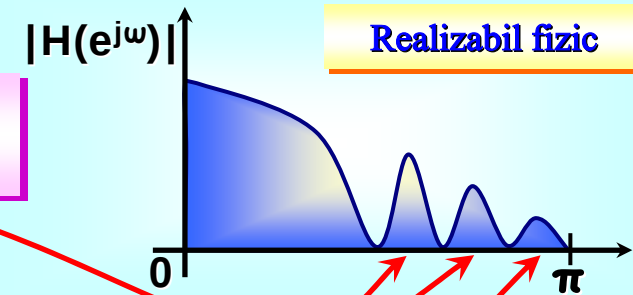
$$\int_{-\pi}^{+\pi} \ln |H(e^{j\omega})| d\omega$$

din cauza logaritmului

☞ Spectrul unui filtru realizabil fizic nu se poate anula pe o întreagă bandă de frecvențe.

☞ Pe lângă lobul principal, spectrul posedă o serie de lobi paraziți.

- Acesta este prețul plătit pentru realizabilitatea filtrelor numerice.
- Singura posibilitate este de a folosi tehnici de proiectare a filtrelor care să conducă la diminuarea amplitudinii lobilor paraziți.



- Aserțiunea reciprocă din cadrul Teoremei demonstrează existența unor astfel de tehnici.