

⑥ Transformata Z în Prelucrarea Semnalelor

Transformata Z

Instrumentul principal de analiză intrare-ieșire pentru SLID discrete.

$$\mathcal{Z}(x)(z) \stackrel{\text{def}}{=} X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] z^{-n}$$

transformare,
operator

secvență discretă
oarecare

transformată

- Similară Transformatei Laplace din contextul SLID continue.

$$\mathcal{L}(f)(s) \stackrel{\text{def}}{=} F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

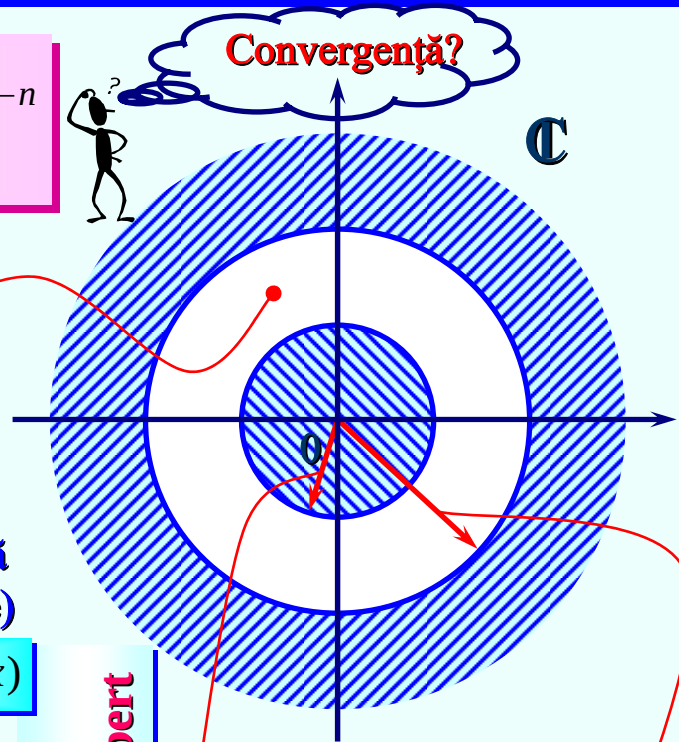


$$\mathcal{A}_c(x)$$

aria/zona de
convergență

(coroană circulară
centrată în origine)

$$\mathcal{R}_0(x) \leq |z| \leq \mathcal{R}_\infty(x)$$



Convergență

$$\mathcal{A}_c(f)$$

$$\text{Re}(s) \geq \alpha$$

$$\alpha < 0$$

funcție original
(continuală causală)
oarecare

$$f(t) = 0, \quad \forall t < 0 \quad (\text{cauzalitate})$$

$$|f(t)| \leq e^{\alpha t}, \quad \forall t > t_0$$

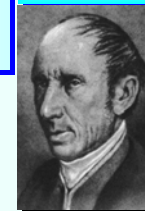
⬇ Negativ.

indicele descreșterii
relative normalizate

Relațiile
Cauchy-d'Alembert

$$\mathcal{R}_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x[n]|}$$

$$\mathcal{R}_\infty(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x[-n]|}}$$



⑥ Transformata Z în Prelucrarea Semnalelor



Transformata Z a unor semnale elementare

Baza canonică din $\mathcal{S}_d$

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{ \delta_k \}_{k \in \mathbb{Z}} \Rightarrow \Delta_k(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_k[n] z^{-n} = z^{-k}$$

$$\mathcal{A}_c(\delta_k) = \begin{cases} \mathbb{C}^* & , k > 0 \\ \mathbb{C} & , k \leq 0 \end{cases}$$

Teorema întârzierii

$$\mathcal{Z}(q^{-k} x)(z) = z^{-k} \mathcal{Z}(x)(z)$$

$$\forall z \in \mathcal{A}_c(x)$$

Treapta unitară

cauzală

$$u_0[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ 1 & , n \geq 0 \end{cases}$$

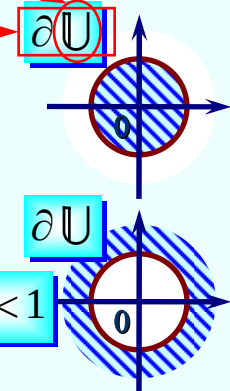
$$U_0(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_0[n] z^{-n} = \sum_{n \geq 0} z^{-n} = \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1$$

anti-cauzală

$$u_1[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & , n \geq 0 \\ 1 & , n < 0 \end{cases}$$

$$U_1(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_1[n] z^{-n} = \sum_{n < 0} z^{-n} = \sum_{n > 0} z^n = \frac{z}{1-z} \quad |z| < 1$$

discul unitar
cercul unitar



$$x[n] = \underbrace{x[n]u_0[n]}_{x_c[n]} + \underbrace{x[n]u_0[-n-1]}_{x_a[n]} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

cauzal + anti-cauzal

$$X(z) = \underbrace{\sum_{n \geq 0} x[n] z^{-n}}_{X_L(z)} + \underbrace{\sum_{n < 0} x[n] z^{-n}}_{X_T(z)} \quad \forall z \in \mathcal{A}_c(x)$$

Semnale cauzale

zonă de convergență
în afara unui disc

Semnale stabile

cerc unitar inclus în
zona de convergență

?

componenta + componenta
Laurent Taylor

$$|z| \geq \mathcal{R}_0(x)$$

$$|z| \leq \mathcal{R}_\infty(x)$$



⑥ Transformata Z în Prelucrarea Semnalelor

Teorema integrală a lui Cauchy

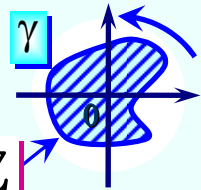
$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} z^{n-1} dz = \delta_0[n]$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

contur închis din jurul originii,
parcurs în sens trigonometric

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi j \quad \& \quad \oint_{\gamma} z^n dz = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$$



Transformata Z

$$z^{n-1} X(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] z^{n-k-1}$$

$$\forall z \in \mathcal{A}_c(x)$$

înmulțire forțată

Transformata Z inversă

$$\mathcal{Z}^{-1}(X)[n] = x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{n-1} dz$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

- Evaluarea integralei curbilinii pentru un contur oarecare este dificilă.
- De regulă, conturul este **un cerc**.

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{ r e^{j\omega} \mid \omega \in [-\pi, +\pi] \}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}(X)[n] = x[n] = \frac{r^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(r e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

- Caz particular: **cercul unitar**.

$$\mathcal{Z}^{-1}(X)[n] = x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

☞ Secvența discretă poate fi reconstruită
numai din valori ale Transformatei Z
de pe cercul unitar.

Germenii

Transformatei Fourier.

(restricția TZ la cercul unitar)



6 Transformata Z în Prelucrarea Semnalelor



Caz particular important:
Transformate Z de tip rațional

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb}$$

$$= z^{-nb} (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{nb})$$

← **zerouri**

$$A(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na} =$$

$$= z^{-na} (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_{na})$$

← **poli**

- Se poate arăta că X este **realizabilă fizic** (provine de la o secvență discretă cauzală) dacă și numai dacă: $nb \leq na$.

- Recuperarea secvenței de semnal originale se poate realiza prin **2 metode de bază** (echivalente):

→ Rezolvarea unei **ecuații cu diferențe**
(se folosesc **coeficienții** polinoamelor)

Se va studia ulterior.

$$a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \dots + a_{na} x[n-na] =$$

$$= b_0 \delta_0[n] + b_1 \delta_0[n-1] + \dots + b_{nb} \delta_0[n-nb]$$

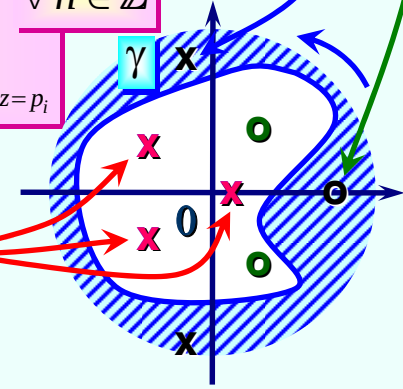
$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

👉 **Teorema întârzierii**

→ Aplicarea **Teoremei Reziduurilor**
(se folosesc **zerourile** polinoamelor)

$$x[n] = \sum_{p_i \in \text{int}\{\gamma\}} \text{Rez} \left[z^{n-1} \frac{B(z)}{A(z)} \right]_{z=p_i} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

👉 **Nu polii lui X !**



Cum se calculează reziduul pentru un pol?

p_i ← **pol de multiplicitate m_i al lui $z^{n-1} X(z)$**

$$z^{n-1} X(z) = \frac{Y(z)}{(z - p_i)^{m_i}}$$

$$\text{Rez} \left[z^{n-1} X(z) \right]_{z=p_i} = \left[\frac{1}{(m_i - 1)!} \frac{dz^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}} Y(z) \right]_{z=p_i}$$

- Pol singular ($m_i=1$):

$$\text{Rez} \left[z^{n-1} X(z) \right]_{z=p_i} = Y(p_i)$$

👉 **Nu are poli în p_i .**

6 Transformata Z în Prelucrarea Semnalelor



$$x[n] = \underbrace{x[n]u_0[n]}_{x_c[n]} + \underbrace{x[n]u_0[-n-1]}_{x_a[n]} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

cauzal + anti-cauzal

Teorema reziduurilor

$$\forall n \geq 0$$

Tot Teorema reziduurilor



$$\forall n < 0$$

pol în origine cu multiplicitate variabilă

⚡ Reziduul în origine trebuie recalculat pentru fiecare eșantion!

$$z^{n-1}X(z) = \frac{X(z)}{z^{|n|+1}} = \frac{B(z)}{z^{|n|+1}A(z)}$$



Artificiu de evitare a re-evaluării reziduului în origine

$$z = \frac{1}{\zeta}$$

$$dz = -\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

← schimbare de variabilă complexă

⚡ Zeroul este aruncat pe cercul de la infinit.

← Transformata Z inversă

$$\mathcal{Z}^{-1}(X)[n] = x[n] = -\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X\left(\frac{1}{\zeta}\right) \zeta^{-n-1} d\zeta \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

minus

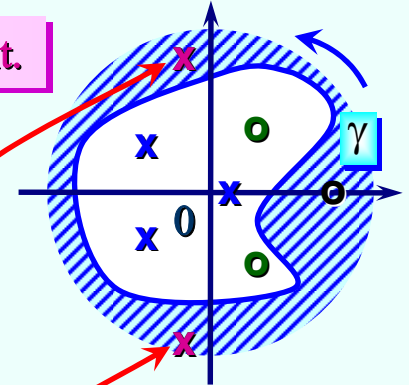
$$x[n] = \sum_{p_i \in \text{int}\{\gamma\}} \text{Rez} \left[z^{n-1} \frac{B(z)}{A(z)} \right]_{z=p_i} = - \sum_{p_i \in \text{int}\{\gamma\}} \text{Rez} \left[\zeta^{-n-1} \frac{B(\zeta^{-1})}{A(\zeta^{-1})} \right]_{z=p_i} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$n < 0$$

⚡ Pol în origine inexistent sau de multiplicitate finită!

$$\zeta^{-n-1}X(\zeta^{-1}) = \zeta^{|n|-1} \frac{B(\zeta^{-1})}{A(\zeta^{-1})}$$

Ce se poate face?



⚡ Polii din exteriorul conturului care cad prin simetrie față de cercul unitar în interiorul conturului!

⑥ Transformata Z în Prelucrarea Semnalelor



Proprietăți fundamentale

Secvență

Transformată Z

Zonă de convergență

$$x[n]$$

$$X(z)$$

$$\mathcal{R}_0(x) \leq |z| \leq \mathcal{R}_\infty(x)$$

$$\alpha x[n] + \beta y[n]$$

$$\alpha X(z) + \beta Y(z)$$

$$\max\{\mathcal{R}_0(x), \mathcal{R}_0(y)\} \leq |z| \leq \min\{\mathcal{R}_\infty(x), \mathcal{R}_\infty(y)\}$$

(liniaritate)

$$(q^{-k} x)[n] = x[n-k]$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$z^{-k} X(z)$$

(Teorema întârzierii)

$$\mathcal{R}_0(x) \leq |z| \leq \mathcal{R}_\infty(x)$$

$$a^n x[n]$$

$$X(a^{-1}z)$$

$$|a| \mathcal{R}_0(x) \leq |z| \leq |a| \mathcal{R}_\infty(x)$$

$$nx[n]$$

$$-z \frac{dX(z)}{dz}$$

$$\mathcal{R}_0(x) \leq |z| \leq \mathcal{R}_\infty(x)$$

$$\overline{x[n]}$$

$$\overline{X(\bar{z})}$$

$$\mathcal{R}_0(x) \leq |z| \leq \mathcal{R}_\infty(x)$$

$$x[-n]$$

$$X(z^{-1})$$

$$\mathcal{R}_\infty^{-1}(x) \leq |z| \leq \mathcal{R}_0^{-1}(x)$$

⑥ Transformata Z în Prelucrarea Semnalelor



Proprietăți fundamentale (continuare)

Secvență

Transformată Z

Zonă de convergență

$$\text{Re}(x[n]) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x[n] + \overline{x[n]}}{2}$$

$$\frac{X(z) + \overline{X(\bar{z})}}{2}$$

$$\mathcal{R}_0(x) \leq |z| \leq \mathcal{R}_\infty(x)$$

$$\text{Im}(x[n]) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x[n] - \overline{x[n]}}{2j}$$

$$\frac{X(z) - \overline{X(\bar{z})}}{2j}$$

$$\mathcal{R}_0(x) \leq |z| \leq \mathcal{R}_\infty(x)$$

$$x_e[n] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x[n] + \overline{x[-n]}}{2}$$

$$\frac{X(z) + \overline{X(\bar{z}^{-1})}}{2}$$

$$\max\{\mathcal{R}_0(x), \mathcal{R}_\infty^{-1}(x)\} \leq |z| \leq \min\{\mathcal{R}_\infty(x), \mathcal{R}_0^{-1}(x)\}$$

Componenta
simetric conjugată
even (par)

$$x_o[n] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x[n] - \overline{x[-n]}}{2}$$

$$\frac{X(z) - \overline{X(\bar{z}^{-1})}}{2}$$

$$\max\{\mathcal{R}_0(x), \mathcal{R}_\infty^{-1}(x)\} \leq |z| \leq \min\{\mathcal{R}_\infty(x), \mathcal{R}_0^{-1}(x)\}$$

Componenta
anti-simetric conjugată
odd (impar)

⑥ Transformata Z în Prelucrarea Semnalelor



Proprietăți de convoluție

Teorema 2 (convoluție liniară directă)

Demonstrație

Exercițiu

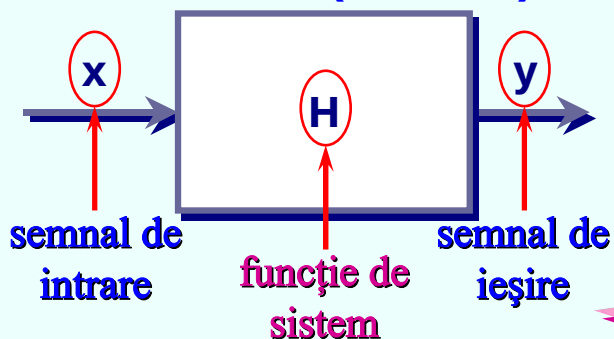
Fie două secvențe discrete x și y pentru care suma de convoluție liniară este convergentă. Atunci are loc următoarea proprietate:

$$\mathcal{L}(x * y) \equiv \mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y) .$$

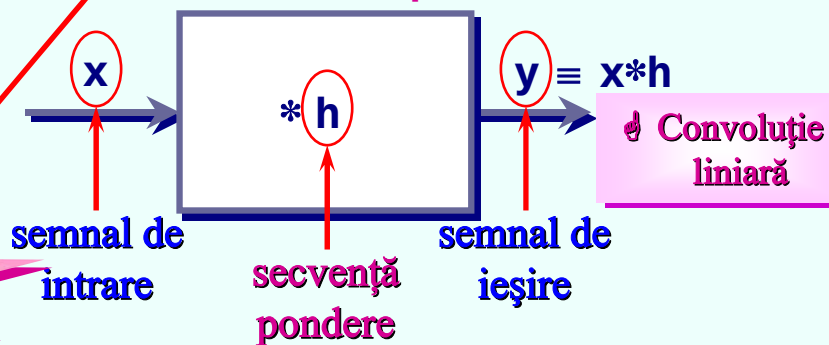
$$x, y \in \mathcal{S}_{*d} \subset \mathcal{S}_d$$



Sistem de Prelucrare a Semnalelor (Discrete)

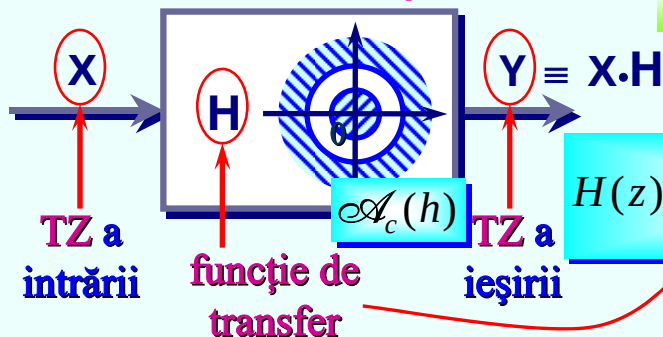


Interpretare



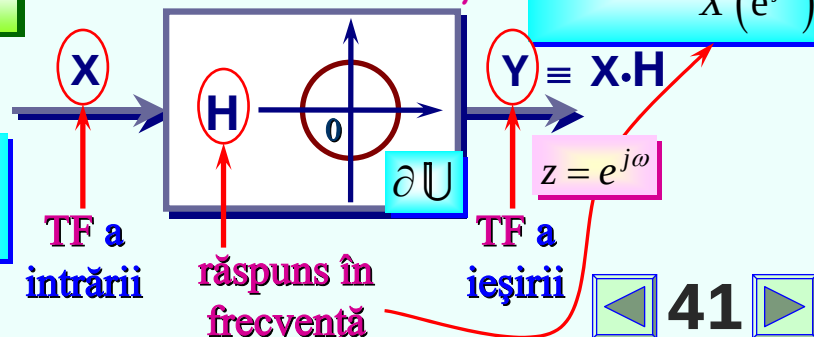
SLID

Caracterizare în domeniul complex



Teoreme de convoluție liniară

Caracterizare în domeniul frecvenței



⑥ Transformata Z în Prelucrarea Semnalelor

Proprietăți de convoluție (continuare)

Teorema 3 (convoluție liniară inversă)

Demonstrație

Fie două secvențe discrete x și y cu proprietatea că zona de convergență a secvenței produs $v = xy$ și coroana circulară:

$$\mathcal{R}_0(x)\mathcal{R}_0(y) \leq |z| \leq \mathcal{R}_\infty(x)\mathcal{R}_\infty(y)$$

sunt nevide, intersecția lor, notată prin $\mathcal{A}$ fiind de asemenea nevidă. Fie $z \in \mathcal{A}$ arbitrar fixat. Atunci Transformata Z a secvenței produs se poate determina cu ajutorul Transformatelor Z ale secvențelor factori după cum urmează:

$$\mathcal{Z}(xy)(z) = V(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma \subseteq \mathcal{A}} X(\zeta) Y\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

unde γ este un contur închis din $\mathcal{A}$ ce înconjoară originea.

Caz particular

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ r e^{j\varphi} \mid \varphi \in [-\pi, +\pi] \right\}$$

cerc

• Exprimare naturală: $z = |z| e^{j\omega}$ (forma polară)

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \partial \mathcal{U} \\ z = e^{j\omega} \end{array} \right\} \Rightarrow V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\varphi}) Y(e^{j(\omega-\varphi)}) d\varphi$$

☞ Definiție: convoluția periodică.

$$V(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(r e^{j\varphi}) Y\left(\frac{|z|}{r} e^{j(\omega-\varphi)}\right) d\varphi$$

TF(*) ≡ x(TF)
→ direct
TF(x) ≡ *(TF)
← invers

☞ Tot un fel de convoluție.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \delta_0(t-\tau) d\tau \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

⑥ Transformata Z în Prelucrarea Semnalelor

Are convoluția inversă
utilitate practică?

- În pofida aparențelor,

DA

Alt exemplu

Codajul imaginilor

- Testați efectul **sistemului psiho-vizual uman**.

① Priviți cu atenție și spuneți ce reprezintă imaginea.

② Priviți imaginea printre gene, apropiind pleoapele.



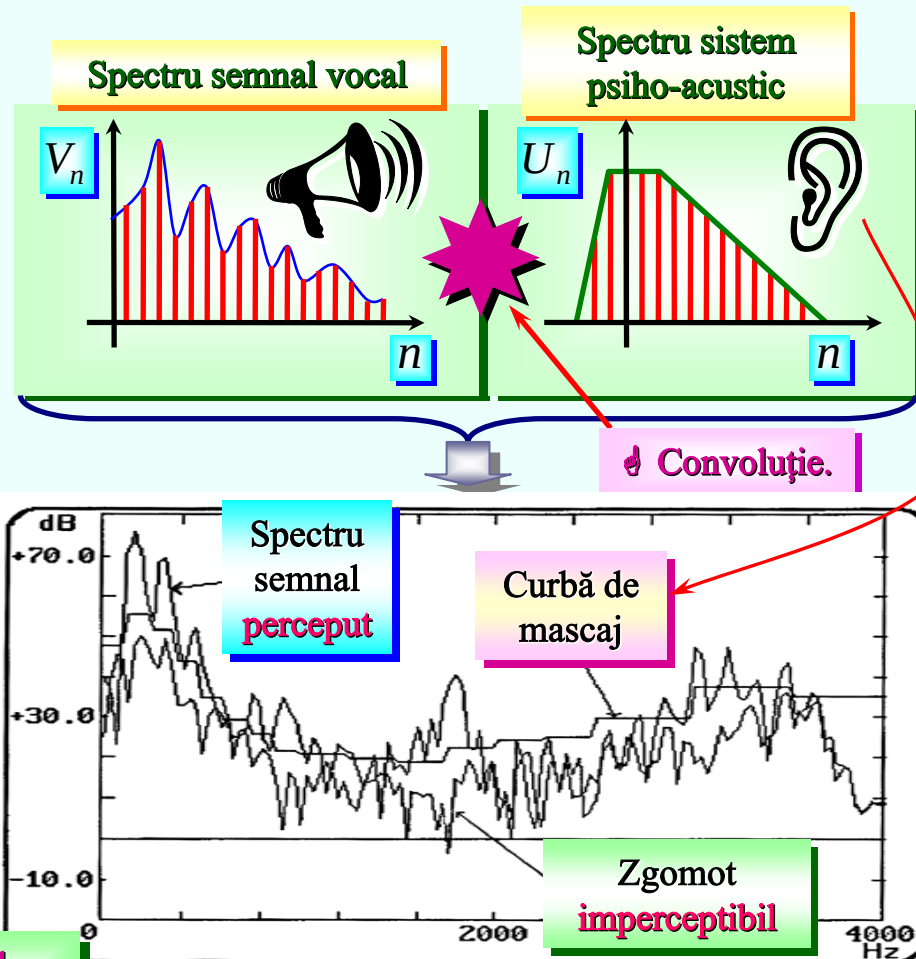
👉 Filtrul psiho-vizual acordat pentru
atenuarea zgomotului imaginii.

Bishnu
ATAL

Un exemplu

Codajul semnalului vocal

- În tele-comunicațiile moderne, bazate pe limbajul natural (“tele-comunicațiile vorbite”), este integrat **un model al sistemului psiho-acustic uman**.



“Speech coding is what you do not hear.”