

Universitatea "Politehnica" din București
Facultatea "Automatică și Calculatoare"

Introducere în Prelucrarea Numerică a Semnalelor

• Note de Curs •

Ș.l.dr.ing.&mat. Dan Ștefănoiu ^{*}, [†]

11 Decembrie 2002

^{*}Universitatea "Politehnica" din București, Facultatea "Automatică și Calculatoare", Grupul de Identificare a Sistemelor și Prelucrare de Semnal, 313 Splaiul Independenței, Sector 1, 77206 – București, ROMÂNIA.

@-mail: dan@indinf.pub.ro

[†]Chercheur invité à l'Institut de la Communication Parlée – URA CNRS 368, Équipe "Traitement et Codage de la Parole", Domaine Universitaire, 1180 Avenue Centrale, B.P. 25, 38040 Grenoble Cedex 9, FRANCE.

@-mail: dan@icp.grenet.fr

Cuvînt înainte

În mod tradițional, domeniul Prelucrării Semnalelor captează atenția specialiștilor din Electronică și Telecomunicații. Cu toate acestea, numeroasele aplicații ale acestuia (în cadrul unor discipline dintre cele mai diverse), evidențiază, pe de o parte, lărgirea ariei sale de interes și, pe de altă parte, necesitatea formării unui specialist cu o pregătire pluridisciplinară. Tot în spiritul unei tradiții, acest ultim deziderat reprezintă de multă vreme și unul din obiectivele principale ale Școlii românești de Automatică și Calculatoare. De aceea, credem că un curs introductiv de "Prelucrare Numerică a Semnalelor" destinat studenților acestei Școli (și nu numai lor) nu ar trebui să reprezinte un fapt surprinzător. De altfel, prin cursul de față, dorim să ne aliniem la standardele internaționale ale unor valoroase Școli de Automatică (din Franța sau din Statele Unite, de exemplu), unde Prelucrarea Semnalelor figurează deja ca disciplină obligatorie de studiu.

În fapt, acest curs se dorește o prelungire firească a unor discipline fundamentale, începînd cu Matematica (el este, de fapt, un mic tratat de matematică aplicată), continuînd cu Algoritmii de Calcul Numeric și terminînd cu Teoria și Identificarea Sistemelor. Scopul principal al acestui curs îl constituie prezentarea noțiunilor fundamentale din Prelucrarea Semnalelor, într-o manieră gradată. Cititorul nu este supus unui efort neobișnuit în a înțelege spiritul acestei discipline, dar el trebuie să aibă o minimă obișnuință în a înțelege și opera cu formalismul matematic.

Pentru a atinge scopul declarat mai sus, am structurat acest curs în mai multe capitole, după o logică naturală, care pleacă de la teorie pentru a ajunge la practică. (Acesta este, de fapt, spiritul întregului curs.) În cadrul acestor capitole, este realizată o trecere în revistă a conceptelor fundamentale actuale de Prelucrare a Semnalelor. De exemplu, în afara conceptului central de "semnal", sînt prezentate succint și noțiuni relative la fenomenul "aliere" (aliasing) sau la Principiul de incertitudine, care pot apare în eșantionarea semnalului. În paralel, cititorul este familiarizat cu un context de lucru specific, în care se dezvoltă, treptat, o serie de rezultate importante. Un loc aparte îl ocupă capitolele referitoare la prezentarea tipurilor clasice de Transformări ale lui Fourier, în special dedicate semnalelor discrete stabile sau periodice sau cu suport finit (semnale care apar frecvent în aplicațiile practice).

Pe tot parcursul acestui curs, am urmărit să oferim ajutor cititorului interesat să învețe prin forțe proprii. Cunoștințele asimilate prin forțe proprii sînt cunoștințe achiziționate pe termen lung. În spiritul acestui principiu, cititorul este invitat să rezolve singur exercițiile propuse la sfîrșitul cursului, acestea fiind destinate să îl ajute în învățare.

O listă bibliografică minimală a fost atașată tot în finalul cursului, referințele menționate fiind suficiente atît pentru înțelegerea cît și pentru aprofundarea acestei discipline.

★

Țin să mulțumesc tuturor colegilor români sau francezi care m-au susținut și ajutat să realizez acest curs.

Dan Ștefănoiu
București, Decembrie 1995

Cuprins

1	Privire de ansamblu	1
2	Conceptul de "semnal"	2
2.1	Definiție și interpretare	2
2.2	Clasificări ale semnalelor	4
3	Problematica generală a Prelucrării Semnalelor	9
3.1	Problema matematică	10
3.2	Problema inginerească	10
3.3	O soluție clasică de prelucrare a semnalelor	12
3.4	Conexiuni cu problematica altor discipline	14
4	Secvențe de semnal în timp discret. Algebra secvențelor discrete.	14
5	Sisteme liniare invariante la deplasări	17
6	Stabilitate	21
7	Cauzalitate	22
8	Semnale și sisteme descrise prin ecuații cu diferențe	24
8.1	Stabilitatea și cauzalitatea sistemelor descrise prin ecuații cu diferențe	24
8.2	Reprezentarea prin grafuri de semnale a ecuațiilor cu diferențe	26
9	Reprezentarea sistemelor discrete în domeniul frecvenței	27
10	Tipuri de Transformări clasice ale lui Fourier	30
10.1	Transformarea Continuă a lui Fourier pentru semnale continue și stabile (TCFC)	30
10.2	Transformarea Continuă a lui Fourier pentru semnale discrete și stabile (TCFD)	34
10.3	Serii Discrete de tip Fourier pentru semnale discrete și periodice (SFD)	36
10.4	Transformarea Fourier Discretă pentru semnale discrete avînd suportul finit (TFD)	39
11	Proprietăți fundamentale ale TCFD	41
11.1	Teorema de convoluție	41
11.2	Proprietăți de simetrie	43
12	Noțiuni privind eșantionarea și interpolarea semnalelor	44
12.1	Scurt istoric al dualității dintre eșantionare și interpolare	45
12.2	Efectul în frecvență al eșantionării semnalelor de bandă limitată. Fenomenul de aliere.	47
12.3	Despre interpolarea semnalelor de bandă limitată, corect eșantionate	54
A	Transformarea Z în Prelucrarea Semnalelor	57
A.1	Definiții și proprietăți elementare	57
A.2	Proprietăți fundamentale	60
A.3	Teorema directă de convoluție	60
A.4	Teorema de convoluție complexă	61
B	Exerciții propuse	65

Lista figurilor

1	<i>Un exemplu de semnal esențial localizat simultan în timp și în frecvență: fereastra lui Gauss (g) și spectrul său ($\hat{g}$).</i>	5
2	<i>Un exemplu de semnal nestăționar.</i>	8
3	<i>O ilustrare a caracterului fractal al unui semnal.</i>	9
4	<i>Reprezentarea unui sistem descris de o ecuație cu diferențe utilizând graful de semnale.</i>	26
5	<i>Schema eficientă de implementare a calculului unui semnal determinat de o ecuație cu diferențe.</i>	27
6	<i>Fereastra spectrală triunghiulară de deschidere Ω_0 și amplitudine unitară.</i>	49
7	<i>Fenomenul de aliere: distorsionarea spectrului din zona frecvențelor înalte de către spectrul din zona frecvențelor joase.</i>	51
8	<i>Cazul limită al eșantionării critice: $T = \frac{2\pi}{\Omega_0}$.</i>	52
9	<i>Cazul eșantionării corecte: $T < \frac{2\pi}{\Omega_0}$.</i>	52
10	<i>Regula de eșantionare corectă a lui Shannon-Nyquist, în cazul semnalelor de bandă limitată.</i>	53
11	<i>Două scheme echivalente utilizate în analiza de semnal cu bancuri de filtre.</i>	77
12	<i>Două scheme echivalente utilizate în sinteza de semnal cu bancuri de filtre.</i>	77
13	<i>Sistem hibrid de filtrare a unui semnal analogic.</i>	77
14	<i>Interpolarea în scară a semnalelor discretizate.</i>	79
15	<i>O schemă clasică de simulare a unui sistem continuu cu ajutorul unui sistem discret.</i>	80
16	<i>Un caz particular al schemei din figura precedentă, pentru $T = 2T_0$.</i>	81

Notății și convenții

$[n]$	Referința ” n ” din lista bibliografică.
$\forall$	Oricare, indiferent care.
$\equiv$	Identic, echivalent.
$\exists$	Există.
$\in$	Apartține, face parte din.
$\subseteq$	Inclus sau egal.
$\subset$	Strict inclus (și diferit).
$\emptyset$	Mulțimea vidă.
$E \vdots F$	” E ” este divizibil cu ” F ”.
$E \stackrel{def}{=} F$	Entitatea ” E ” este definită prin expresia ” F ”.
$E \stackrel{not}{=} F$	Entitatea ” E ” este notată prin ” F ” sau reciproc, în funcție de context.
$\mathbb{R}, \mathcal{C}$	Corpul matematic al numerelor reale, respectiv complexe.
Γ	Unul din cele două corpuri de mai sus (indiferent care).
$\mathbb{R}_+$	Mulțimea numerelor reale nenegative (inclusiv zero).
$\mathcal{Q}$	Mulțimea numerelor raționale (fracții de întregi).
$\mathbb{Z}, \mathbb{N}$	Mulțimea numerelor întregi, respectiv naturale (întregi nenegativi).
$\mathbb{R}^*, \mathcal{C}^*,$	Mulțimile $\mathbb{R}, \mathcal{C}, \mathcal{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$, din care a fost eliminat elementul zero (0).
$\mathcal{Q}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{N}^*$	
$\mathcal{U}$	Discul unitar închis al planului complex.
$\partial \mathcal{U}$	Cercul unitar din planul complex (frontiera lui $\mathcal{U}$).
$n = \overline{N_1, N_2}$	Numărul întreg ” n ” parcurge mulțimea: $\{N_1, N_1 + 1, \dots, N_2 - 1, N_2\}$, dacă $N_1 \leq N_2$, sau mulțimea: $\{N_1, N_1 - 1, \dots, N_2 + 1, N_2\}$, dacă $N_1 > N_2$.
$n \in \overline{N_1, N_2}$	Numărul întreg ” n ” este un element al mulțimii: $\{N_1, N_1 + 1, \dots, N_2 - 1, N_2\}$, dacă $N_1 \leq N_2$, sau al mulțimii: $\{N_1, N_1 - 1, \dots, N_2 + 1, N_2\}$, dacă $N_1 > N_2$.

$n \% N$	Restul împărțirii numărului " $n \in \mathbb{Z}$ " la numărul " $N \in \mathbb{N}$ ".
C_N^n	Numărul de submulțimi de " n " elemente ale unei mulțimi finite cu " N " elemente ($n \in \overline{0, N}$).
$sign(a)$	Semnul numărului real " a ": $sign(a) \stackrel{def}{=} \begin{cases} +1 & , \quad a \geq 0 \\ -1 & , \quad a < 0 \end{cases}$ $(sign(0) = 1, \text{ prin convenție}).$
j	Numărul imaginar unitar: $j^2 = -1$.
$\bar{a}, a^*$	Versiunea complex-conjugată a numărului " a ".
$Re(a)$	Partea reală a numărului " a ".
$Im(a)$	Partea imaginară a numărului " a ".
$ a $	Modulul (valoarea absolută, amplitudinea, magnitudinea) numărului " a ".
$arg(a)$	Argumentul (faza) numărului " a " ($a = a e^{j arg(a)}$).
$\lfloor a \rfloor$	Partea întreagă a numărului " a " (cel mai mare întreg inferior sau egal valorii reale a lui a).
$\lceil a \rceil$	Cel mai mic întreg superior sau egal valorii reale a numărului " a ".
$exp(a)$	Exponențiala numărului " a " (real sau complex): $exp(a) \stackrel{def}{=} e^a$. Dacă $a = \alpha + \beta j$, atunci: $e^a \stackrel{def}{=} e^\alpha (\cos \beta + j \sin \beta)$.
$\ln a$	Logaritmul natural (neperian) al numărului " a ".
η	Notăție utilizată pentru a indica următoarea cantitate: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
$\overline{A}$	Închiderea mulțimii " A ".
$\sqcup$	Reuniunea disjunctă a unei familii de mulțimi. De exemplu, $A \sqcup B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\} ,$ fapt care indică etichetarea elementelor mulțimilor în așa fel încât să poată fi cunoscută apartenența de origine a fiecăruia dintre ele. Dacă, de exemplu, A și B au un element comun, reuniunea disjunctă precizează și căreia dintre ele îi aparține el, în timp ce reuniunea clasică face imposibilă recuperarea acestei informații. Practic, produsul cartezian utilizat mai sus nu este redat explicit când se face referirea la un element al reuniunii disjuncte. Vom scrie totdeauna $a \in A \subseteq A \sqcup B$ și nu $(a, 0) \in A \sqcup B$, cum ar fi corect.
$\langle A \rangle$	Subspațiul generat de mulțimea " A ", inclusă într-un spațiu vectorial.
$Hom(A, B)$	Mulțimea aplicațiilor definite pe mulțimea " A ", cu valori în mulțimea " B ".
$\mathcal{S}_c$	Mulțimea semnalelor continue (în timp continuu); elementul generic al acestei mulțimi se notează prin " $f(t)$ " (parantezele rotunde ale argumentului indică timpul continuu).

$\mathcal{S}_d$	Mulțimea semnalelor discrete (în timp discret); elementul generic al acestei mulțimi se notează prin " $x[n]$ " (parantezele drepte indică timpul discret).
$\mathcal{S}_d^N$	Mulțimea semnalelor discrete periodice, de perioadă " N "; elementul generic al acestei mulțimi se notează prin " $\tilde{x}[n]$ ".
$\mathcal{S}_{dN}$	Mulțimea semnalelor discrete de durată finită, avînd suportul de forma: $\overline{0, N-1}$; elementul generic al acestei mulțimi se notează prin " $x[n]$ ".
$\mathfrak{S}$	Aplicația sau operatorul identitate.
$f, f(x)$	" f " este numele unei funcții, iar " $f(x)$ " – valoarea sa în punctul " x " al domeniului de definiție; uneori, pentru a pune în evidență tipul de argument utilizat, numele funcției poate fi indicat și în una din formele următoare: " $f(ax)$ ", " $x f(x)$ ", " $\frac{f(x)}{x}$ ", etc.
$f \stackrel{apt}{=} g$	Funcția " f " coincide <u>aproape peste tot</u> cu funcția " g ", adică măsura Lebesgue a mulțimii de puncte unde cele două funcții au valori diferite este nulă; (în cazul uzual, această mulțime este fie finită, fie numărabilă).
$\langle f, g \rangle$	Produsul scalar al elementelor " f " și " g " aparținînd unui spațiu Hilbert.
$\ f\ $	Norma elementului " f " aparținînd unui spațiu Banach; într-un spațiu Hilbert, norma canonică definită plecînd de la produsul scalar, după cum urmează: $\ f\ \stackrel{def}{=} \sqrt{\langle f, f \rangle} .$
$\downarrow n$	Operația de decimare cu " $n-1$ " eşantioane a unui semnal discret (aici, $n \in \mathbb{N}^*$); dacă $n = 1$, atunci: $(f \downarrow 1) \equiv f ;$ dacă $n \geq 2$, atunci, prin convenție: $(f \downarrow n)[k] \stackrel{def}{=} f[nk] \quad \forall k \in \mathbb{Z} .$
$\uparrow n$	Operația de interpolare cu " $n-1$ " zerouri a unui semnal discret (aici, $n \in \mathbb{N}^*$); dacă $n = 1$, atunci: $(f \uparrow 1) \equiv f ;$ dacă $n \geq 2$, atunci: $(f \uparrow n)[k] \stackrel{def}{=} \begin{cases} f[k/n] & , \quad k : n \quad (k \% n = 0) \\ 0 & , \quad k \% n \neq 0 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z} .$

$\hat{f}, \mathcal{F}(f)$

Transformarea Fourier continuă aplicată semnalului ” f ” și definită astfel (în funcție de natura lui f):

- dacă f este continuu:

$$\hat{f}(\Omega) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\Omega t} dt, \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}.$$

- dacă f este discret:

$$\hat{f}(\omega) \stackrel{def}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n]e^{-j\omega n}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

S-a notat prin ” $\mathcal{F}$ ” *operatorul* de tip Fourier.

$Supp(f)$

Suportul funcției ” f ”:

- în cazul continuu:

$$Supp(f) \stackrel{def}{=} \overline{\{t \in \mathbb{R} \mid f(t) \neq 0\}}$$

(închiderea complementarei mulțimii zerourilor);

- în cazul discret:

$$Supp(f) \stackrel{def}{=} \{t \in \mathbb{Z} \mid f[n] \neq 0\}$$

(complementara mulțimii zerourilor).

$f \star g$

Produsul (operația) de convoluție dintre semnalele ” f ” și ” g ”:

- în cazul continuu:

$$(f \star g)(t) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

- în cazul discret:

$$(f \star g)[n] \stackrel{def}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[n - k]g[k] \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(Corectitudinea definițiilor de mai sus este asigurată numai în anumite condiții și nu în general, pentru orice pereche de semnale.)

$\stackrel{PC}{=}$

Egalitate ce indică un anumit tip de convergență a unui șir de funcții: *convergența punctuală*.

$\oint_{\gamma}$

Integrală de contur ” γ ”, parcurs în sens trigonometric.

$\oint_{\gamma}$

Integrală de contur ” γ ”, parcurs în sens orar.

$\int, \int_{-\infty}^{+\infty}, \int_{-\infty}^{+\infty},$
 $\int_{\mathbb{R}}, \int_{\mathbb{R}}$

Integrală liniară pe mulțimea $\mathbb{R}$; prima notație, adică integrala fără limite de integrare este mai utilizată decât celelalte.

$\int_n$

Integrală multiplă pe mulțimea $\mathbb{R}$; dacă $n = 1$, atunci integrala este *simplă* (vezi notația anterioară); dacă $n > 1$, atunci notația indică următorul calcul:

$$\int_n f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n \text{ ori}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

 $\mathbf{C}^n$

Mulțimea funcțiilor de clasă " n ", adică a funcțiilor reale sau complexe de n ori derivabile, cu derivata de ordin n continuă ($n \in \mathbb{N}$). Dacă $n = 0$, atunci $\mathbf{C}^0$ este mulțimea funcțiilor continue.

 $\mathbf{C}_0^n$

Mulțimea funcțiilor cu suport compact, de clasă " n " ($n \in \mathbb{N}$).

 $f^{(n)}$

Derivata de ordin " n " a funcției " f " ($n \in \mathbb{N}$); dacă $n = 0$, atunci $f^{(0)} \equiv f$.

 $\mathbf{C}^\alpha$

Mulțimea funcțiilor de clasă " $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ", (funcții α -derivabile în sens Hölder); de fapt, aceste funcții sînt de $\lfloor \alpha \rfloor$ ori derivabile, iar derivata de ordin $\lfloor \alpha \rfloor$ ($f^{(\lfloor \alpha \rfloor)}$) verifică următoarea inegalitate:

$$|f^{(\lfloor \alpha \rfloor)}(x) - f^{(\lfloor \alpha \rfloor)}(y)| < C |x - y|^{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor} ,$$

pentru orice x și y din domeniul de definiție; în acest context, " C " este o constantă pozitivă. Toate funcțiile acestei clase sînt continue și, în plus: $\mathbf{C}^{\lfloor \alpha \rfloor} \subseteq \mathbf{C}^\alpha$.

 $L^1(\Gamma)$

Spațiul semnalelor continue cu valori în corpul " $\Gamma \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ", care au modulul integrabil (*spațiul semnalelor continue și stabile*); acest spațiu este de tip Banach, norma aferentă fiind definită astfel:

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \int |f(t)| dt < \infty .$$

 $l^1(\Gamma)$

Spațiul semnalelor discrete cu valori în corpul " $\Gamma \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ", care au modulul sumabil (*spațiul semnalelor discrete stabile*); acest spațiu este de tip Banach, norma aferentă fiind definită astfel:

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f[n]| < \infty .$$

 $L^2(\Gamma)$

Spațiul semnalelor continue cu valori în corpul " $\Gamma \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ", care au pătratul modulului integrabil (*spațiul semnalelor continue de energie finită*); acest spațiu este de tip Hilbert, produsul scalar aferent fiind definit astfel:

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int f(t) \overline{g(t)} dt .$$

Norma canonică asociată se exprimă în forma:

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int |f(t)|^2 dt} < \infty .$$

$l^2(\Gamma)$ Spațiul semnalelor discrete cu valori în corpul " $\Gamma \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ", care au pătratul modulului sumabil (*spațiul semnalelor discrete de energie finită*); acest spațiu este de tip Hilbert, produsul scalar aferent fiind definit astfel:

$$\langle f, g \rangle \stackrel{def}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] \overline{g[n]} ,$$

Norma canonică asociată se exprimă în forma:

$$\|f\| \stackrel{def}{=} \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f[n]|^2} < \infty .$$

δ, δ_0 Impulsul lui Dirac (în cazul continuu) sau unitar (în cazul discret), centrat în originea timpului.

δ_k Impulsul lui Dirac (în cazul continuu) sau unitar (în cazul discret), centrat în momentul de timp " k ".

$\delta^{(n)}$ Derivata de ordin " n " ($n \in \mathbb{N}$) a impulsului lui Dirac (în sensul indicat de Teoria Distribuțiilor).

$\delta_{N\mathbb{Z}}$ Impulsul unitar N -periodic.

u_0 Treapta unitară discretă: $u_0[n] = 0$, pentru $n < 0$, iar $u_0[n] = 1$, pentru $n \geq 0$.

Abrevieri

AR	Model de tip <u>A</u> uto <u>R</u> egresiv.
ARMA	Model de tip <u>A</u> uto <u>R</u> egresiv, cu <u>M</u> edie <u>A</u> lunecătoare.
ARX	Model de tip <u>A</u> uto <u>R</u> egresiv controlat (cu intrări e <u>X</u> ogene).
ELD	<u>E</u> cuatie <u>L</u> iniară cu <u>D</u> iferențe.
FFT	Clasa de algoritmi de implementare eficientă a Transformării Fourier Discrete (<i><u>F</u>ast <u>F</u>ourier <u>T</u>ransform</i>).
FIR	Filtru cu răspuns finit la impuls (<i><u>F</u>inite <u>I</u>mpulse <u>R</u>esponse</i>).
IIR	Filtru cu răspuns infinit la răspuns (<i><u>I</u>nfinite <u>I</u>mpulse <u>R</u>esponse</i>).
MA	Model de tip <u>M</u> edie <u>A</u> lunecătoare.
SFD	<u>S</u> erie <u>F</u> ourier <u>D</u> iscretă.
SID	<u>S</u> istem <u>I</u> nvariant la <u>D</u> eplasări (temporale).
SLID	<u>S</u> istem <u>L</u> iniar <u>I</u> nvariant la <u>D</u> eplasări (temporale).
SPS	<u>S</u> istem de <u>P</u> relucrare a <u>S</u> emnalelor.
TCFC	<u>T</u> ransformarea <u>C</u> ontinuă a lui <u>F</u> ourier pentru semnale <u>C</u> ontinue și stabile.
TCFD	<u>T</u> ransformarea <u>C</u> ontinuă a lui <u>F</u> ourier pentru semnale <u>D</u> iscrete și stabile.
TF	<u>T</u> ransformarea <u>F</u> ourier (continuă sau discretă, după caz).
TFD	<u>T</u> ransformarea <u>F</u> ourier <u>D</u> iscretă.

1 Privire de ansamblu

Germenii matematici ai Teoriei Semnalelor au apărut odată cu definirea noțiunii de *funcție*, adică acum mai bine de 300 de ani. Cu toate acestea, ea a dobândit atributele unei veritabile științe abia în acest secol, datorită numeroaselor salturi tehnologice înregistrate. Progresul științelor și al tehnologiei moderne a pus în evidență un număr din ce în ce mai mare de aplicații în care noțiunile de *semnal* și *prelucrare* a acestuia sînt profund implicate. Ca urmare, deasupra fundamentului teoretic al Teoriei Semnalelor s-a clădit o disciplină aplicativă numită **Prelucrarea Semnalelor**. Astăzi, panoplia aplicațiilor acestei discipline este extrem de vastă, plecînd de la banalele convorbiri telefonice și ajungînd pînă la soluții unor probleme complexe de tehnică spațială sau de natură militară.

La început, nu a fost necesară definirea noțiunii de *semnal*, deoarece aplicațiile de prelucrare a semnalelor se situau în zona de interes a Electronicii sau Electrotehnicii, unde se utiliza direct noțiunea clasică de *funcție*.

Ulterior (și chiar foarte repede), atît rezultatele mai vechi obținute de matematicieni ca J. Fourier, Weierstrass, Hilbert, cît și cele mai noi datorate lui Schwartz, Dirichlet, de Rham, au fost privite din perspectiva aplicațiilor. Acest fapt a creat o deschidere a Matematicii aplicate către Prelucrarea Semnalelor, prin definirea noțiunilor de *semnal* și *prelucrare* în concordanță cu rezultatele matematice.

În acest spirit, *semnalul* este o funcție care se bucură de anumite proprietăți speciale (specifice aplicațiilor practice), pe care le vom prezenta în acest curs. De exemplu, una dintre cele mai importante caracteristici ale funcției numită *semnal* este următoarea: spre deosebire de funcția matematică (descriind un anumit comportament - eventual abstract - numai din perspectivă temporală), semnalul este o funcție care codifică două tipuri de comportamente ale unui sistem fizic concret: unul în domeniul timpului și altul în domeniul frecvenței.

În ceea ce privește *prelucrarea* (*procesarea*) semnalelor, acesta este un termen care se referă la încercarea de a *modela* (*aproxima* sau *reprezenta*) semnalele (de regulă avînd o structură complexă) prin intermediul unor funcții mai simple și mai bine cunoscute fie în timp, fie în frecvență. Această modelare este de dorit din motive ce nu mai necesită o enumerare și, din fericire, ea este posibilă atît în teorie cît și în practică. În teorie, reprezentarea semnalelor se bazează, de exemplu, pe celebrele teoreme de aproximare punctuală ale lui Fourier-Dirichlet [9] sau de aproximare uniformă ale lui Weierstrass-Stone [7]. În practică, rezultatele de acest tip sînt privite ca soluții oferite problemei centrale de modelare a semnalelor cu structură complexă, utilizînd familii de semnale simple și cunoscute (funcții trigonometrice, polinoame, etc.).

În prezent, cadrul de lucru al Prelucrării Semnalelor se găsește la intersecția dintre experiența matematică și cea inginerescă. Se pare că noul tip de cercetător al acestui domeniu trebuie să fie simultan inginer și matematician, așa cum o dovedesc rezultatele publicate în ultima jumătate de secol de către oameni de știință cu formație dublă, cum ar fi: Erdős, Gabor, Oppenheim, de Ville, Walsh, Wigner și mulți alții. Aceste rezultate se referă nu numai la descompunerea unui semnal în altele mai simple, ci și la tehnicile de reconstruire a semnalului plecînd de la componentele sale. Acest punct de vedere a condus la dezvoltarea de algoritmi eficienți de descompunere (de *analiză*) sau de reconstruire (de *sinteză*) a semnalelor, care constituie, în fapt, esența acțiunii de prelucrare. Această orientare (datorată, de fapt, intervenției inginerului în problematica matematicii) marchează o schimbare de direcție de la cercetarea fundamentală bazată pe matematică pură, la cercetarea matematică aplicată.

★

Cursul de față constituie o introducere în terminologia și problematica Prelucrării Semnalelor în general și ale Prelucrării Numerice a Semnalelor în particular. El este alcătuit dintr-un număr de 11 capitole distincte (exceptîndu-l pe acesta) și 2 anexe, care oferă cititorului posibilitatea de a se familiariza treptat cu limbajul specific al acestei discipline. Ultima anexă a fost dedicată exercițiilor propuse, care au o legătură directă cu informațiile prezentate în cadrul cursului.

2 Conceptul de ”semnal”

2.1 Definiție și interpretare

Teoria Semnalelor este o știință destul de vastă, care nu se reduce la domeniul Prelucrării Semnalelor. Ea se găsește la intersecția a numeroase alte științe pentru care noțiunea de *semnal* este centrală sau foarte importantă. Adesea, definițiile date acestui concept sînt adesea incomplete sau chiar contestate. De aceea, noi propunem definiția care urmează și care este destul de larg acceptată, fără a avea pretenția că am reușit să eliminăm inconvenientele de mai sus.

Definiția 2.1

Semnalul este o funcție de forma:

$$f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{M} ,$$

unde:

- $\mathcal{T}$ este o mulțime nevidă, dotată cu o relație de ordine totală, $(\leq)$; ea este numită adesea prin **mulțimea momentelor**, chiar dacă elementele sale nu au întotdeauna semnificația fizică de ”momente de timp”;
- $\mathcal{M}$ este o mulțime nevidă oarecare, numită **ansamblul valorilor semnalului sau codomeniul semnalului**.

În sensul cel mai larg, *semnalul* est o funcție care transportă informații cu privire la starea sau comportarea unui sistem fizic, de unde și numărul mare de aplicații al Teoriei Semnalelor.

În cadrul domeniului Prelucrării Semnalelor, *semnalul* este văzut ca o entitate ce transportă informație între două domenii: cel al *timpului* și cel al *frecvenței*, chiar dacă acest lucru nu apare explicit în definiția de mai sus. Aceasta este o interpretare ușor diferită de cea datorată viziunii matematice, unde domeniul *timpului* constituie aproape întotdeauna singurul cadru de studiu al comportamentului funcției matematice care reprezintă semnalul.

Notă

- Legătura dintre cele două tipuri de domenii de informații este mai profundă și a fost stabilită pentru prima dată de către matematicianul Joseph Fourier. Apoi, la începutul secolului nostru, a apărut o nouă disciplină: *Teoria eșantionajului*, inițiată de către baronul de la Valée-Poussin – autorul citorva rezultate celebre de Teoria numerelor ([2]). După apariție, această teorie a fost dezvoltată mai ales de către Kotel’nikov și Shannon, care au demonstrat o serie de rezultate numite *teoreme de eșantionaj / interpolare*. Una dintre aceste teoreme (pe care o vom prezenta și noi în Capitolul 11) arată raportul care există între spectrul unui semnal *continual* și spectrul uneia dintre versiunile sale eșantionate, pentru o anumită perioadă de eșantionare.

O serie de rezultate fundamentale de Mecanică Cuantică sau din cadrul Teoriei Informației au determinat creșterea interesului față de legătura dintre timp și frecvență. Este cazul, de exemplu, de Principiul de incertitudine formulat de către Heisenberg la început pentru Mecanica Cuantică, dar care are o mare generalitate. În esență, în cazul Prelucrării Semnalelor, acest Principiu arată raportul de invers proporționalitate care există între informația transportată de un semnal în domeniul timpului și cea transportată de acesta în domeniul frecvenței. Alte legături între cele două domenii au fost puse în evidență de către unele rezultate ale lui Nyquist și Gabor din Teoria Informației. Acestea precizează în ce condiții este posibilă evitarea pierderii sau alterării informației frecvențiale cu ocazia transmiterii unui semnal codificat între un emițător și un receptor.

Experiența practică acumulată ulterior acestor rezultate (care nu mai sînt foarte recente, ele împlinind aproape o jumătate de secol), a determinat matematica de a nu mai ignora comportamentul în frecvență al semnalelor. Ce urmare, astăzi, cercetarea aferentă beneficiază de numeroase rezultate de dualitate *timp-frecvență*, obținute relativ recent de către matematicieni ca P.G. Lemarié sau G. Battle ([1, 6]). Pe baza lor, studiul clasic al comportamentului separat al semnalelor în timp și frecvență este adesea înlocuit de o abordare nouă, în care este modelată distribuția energiei semnalului simultan în timp și frecvență ([4]).

Cadrul matematic natural în care se dezvoltă rezultatele teoretice legate de conceptul de *semnal* îl constituie **Teoria Distribuțiilor** (construită de Schwartz), care este o ramură importantă a Analizei Funcționale. Acest cadru trebuie completat cu rezultate provenind din **Teoria Ecuatiilor Diferențiale / cu Diferențe**. Cu toate acestea, în accepția celor mai mulți cercetători ai domeniului Prelucrării Semnalelor, cadrul distribuțiilor este prea larg și general pentru practică. Anumite semnale sintetice care figurează în abordările teoretice nu pot fi niciodată întâlnite în practică; este cazul, de exemplu, al impulsului (ideal al) lui Dirac, δ , sau al derivatelor sale. Din acest motiv, deși pare un demers atractiv, în acest curs, nu s-au făcut referiri la Teoria Distribuțiilor decât în cazuri extrem de rare.

În lumea cercetătorilor din Prelucrarea Semnalelor, *semnalul* este cel mai frecvent considerat un element al unuia din spațiile lui Lebesgue: $L^p(\mathcal{T})$ / $l^p(\mathcal{T})$ (unde $p \geq 1$).

Note

1. Reamintim că:

- $L^p(\mathcal{T})$ este spațiul funcțiilor $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$, care sînt " p -integrabile" pe $\mathcal{T}$, adică al funcțiilor cu valori reale sau complexe verificînd următoarea proprietate:

$$\int_{\mathcal{T}} |f(t)|^p dt < \infty . \quad (1)$$

Acesta este un spațiu de tip Banach, norma aferentă fiind definită astfel:

$$\|f\|^p \stackrel{def}{=} \int_{\mathcal{T}} |f(t)|^p dt . \quad (2)$$

- $l^p(\mathcal{T})$ este spațiul șirurilor de numere reale sau complexe " p -sumabile", adică al șirurilor $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ care verifică următoarea proprietate:

$$\sum_{n \in \mathcal{T} \cap \mathbb{Z}} |x_n|^p < \infty . \quad (3)$$

Și acest spațiu este de tip Banach, norma aferentă fiind definită după cum urmează:

$$\|x\|^p \stackrel{def}{=} \sum_{n \in \mathcal{T} \cap \mathbb{Z}} |x_n|^p . \quad (4)$$

Prin convenție, notația $\mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ va indica de acum înainte oricare din cele 2 spații, fără a preciza cu exactitate de care dintre ele este vorba. Fiecare spațiu $\mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ este, în plus, *separabil*, adică posedă cel puțin o bază *numărabilă*. Această proprietate este esențială în Prelucrarea Semnalelor, deoarece ea permite reprezentarea oricărui semnal al lui $\mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ cu ajutorul unei baze ale cărei elemente pot fi numărate.

2. Dacă $p = 2$, atunci $\mathcal{S}^2(\mathcal{T})$ este și spațiu Hilbert. Produsele scalare ale celor 2 spații sînt definite astfel:

- Pentru $L^2(\mathcal{T})$:

$$\langle f, g \rangle \stackrel{def}{=} \int_{\mathcal{T}} f(t) \overline{g(t)} dt . \quad (5)$$

- Pentru $l^2(\mathcal{T})$:

$$\langle x, y \rangle \stackrel{def}{=} \sum_{n \in \mathcal{T} \cap \mathbb{Z}} x_n \overline{y_n} . \quad (6)$$

Dacă ne situăm în contextul spațiului $\mathcal{S}^2(\mathcal{T})$, atunci entitatea de mai jos se numește **energia** (temporală) a semnalului f , respectiv x :

$$\mathcal{E}(f) \stackrel{def}{=} \|f\|^2 = \int |f(t)|^2 dt \quad \mathcal{E}(x) \stackrel{def}{=} \|x\|^2 = \sum_{n \in \mathcal{T} \cap \mathbb{Z}} |x[n]|^2 \quad (7)$$

$$f \in L^2(\mathcal{T}) \quad x \in l^2(\mathcal{T})$$

Revenind la Definiția 2.1 (de mai sus), putem completa acest enunț cu următoarele precizări:

- în mod normal, $\mathcal{T}$ este o submulțime a corpului numerelor reale, $\mathbb{R}$; această mulțime nu este neapărat mărginită; elementul generic al lui $\mathcal{T}$ este notat cu t și se numește *time*.

- în general, $\mathcal{M}$ este o submulțime fie a corpului complex $\mathcal{C}$, fie a corpului real $\mathbb{R}$; (se știe, totuși, că $\mathbb{R} \subset \mathcal{C}$).

Prin convenție, dacă nu se va preciza altfel, vom considera că $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{C}$ și nu se vor face referiri la Teoria Distribuțiilor decât în cazuri excepționale (cînd vom fi obligați să operăm cu impulsul lui Dirac). Uneori, vom considera că $\mathcal{T} \equiv \mathbb{R}$ sau că $\mathcal{T} \equiv \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ fiind mulțimea numerelor întregi), chiar dacă, în realitate, $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$, respectiv $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}$; valorile semnalului în afara domeniului de definiție $\mathcal{T}$ vor fi considerate nule, în mod natural.

2.2 Clasificări ale semnalelor

Cea mai mare parte a aplicațiilor de Prelucrare a Semnalelor se dezvoltă în contextul spațiilor $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ sau $\mathcal{S}^2(\mathcal{T})$. Acesta sugerează și o primă grupare a semnalelor în două clase:

- $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ este *clasa semnalelor cu spectrul în frecvență* sau *clasa semnalelor stabile*;
- $\mathcal{S}^2(\mathcal{T})$ este *clasa semnalelor cu spectrul în energie* sau *clasa semnalelor de energie finită*.

Această terminologie este justificată de faptul că pentru semnalele din $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ este posibilă definirea corectă a Transformării lui Fourier (TF), deci și a spectrului (adică a distribuției energiei semnalului în frecvență), în timp ce clasa $\mathcal{S}^2(\mathcal{T})$ este mai largă și cuprinde atît semnale stabile cît și alte semnale ce nu admit TF, dar care au energia (7) finită. (Așa cum se va vedea, în cadrul acestu curs, studiul diferitelor tipuri de TF ocupă un rol central.)

Energia finită este o proprietate naturală a semnalelor practice. În natură, există multe semnale ce verifică această proprietate. În general, atunci cînd se operează cu un semnal de energie finită, se presupune automat și că TF a sa este corect definită (deci că el este și stabil). Pentru a aprecia dacă un semnal are energia finită sau nu, în practică se apelează la o evaluare a celor două *suporturi* ale sale: cel temporal și cel frecvențial. **Suportul** unui semnal este o noțiune definită astfel:

- în cazul continuu:

$$\text{Supp}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{t \in \mathbb{R} \mid f(t) \neq 0\}}$$

(închiderea complementarei zerourilor);

- în cazul discret:

$$\text{Supp}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{Z} \mid x[n] \neq 0\}$$

(complementara zerourilor).

În practică, se operează adesea cu semnale avînd suportul *compact* (în cazul continuu) sau *finit* (în cazul discret). Aceste semnale au valori nenule și finite numai pentru o mulțime mărginită și închisă de momente (în cazul continuu), respectiv numai într-o mulțime finită de momente (în cazul discret). În consecință, ele sînt stabile și de energie finită, justificînd (într-o oarecare măsură) presupunerea că semnalelor de energie finită li se poate defini corect TF.

O altă categorie utilizată frecvent cuprinde semnale stabile cu suport temporal infinit, care, în mod normal, au suportul frecvențial (adică al TF asociate) compact sau finit. (Aceasta este o consecință a *Principiului de incertitudine*, la care ne vom referi mai jos.) Pentru aceste semnale, energia este de asemenea finită, dar ea se măsoară în domeniul frecvenței (TF avînd proprietatea de a conserva energia).

Din rațiuni practice, adesea se face referire la o categorie speciale de semnale care au proprietatea de a fi *esențial localizate simultan în timp și în frecvență*. În fapt, un astfel de semnal este tot de energie finită, dar atît suportul său temporal cît și cel frecvențial sînt considerate compacte/finite. Teoretic, datorită **Principiului de incertitudine** al lui Gabor-Heisenberg (vezi, de exemplu, [4]), compacitatea/finitudinea simultană a celor două suporturi este imposibil de atins. Pentru semnalele din această categorie s-apelat la o aproximare (care se bazează pe proprietatea energiei finite, de fapt): valorile semnalului și ale TF asociate aflate în afara

Figura 1: Un exemplu de semnal esențial localizat simultan în timp și în frecvență: fereastra lui Gauss (g) și spectrul său ($|\hat{g}|$).

unor mulțimi compacte/finite sînt considerate neglijabile în raport cu valorile lor din interiorul acelor mulțimi.

Un exemplu clasic de semnal esențial localizat simultan în timp și frecvență este așa numita *fereastră gaussiană*:

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (8)$$

În această expresie: $\sigma > 0$ este *la deviația standard* (astfel denumită datorită utilizării acestei ferestre ca tip de densitate de probabilitate pentru anumite semnale *nedeterminate*), iar $t_0 \in \mathbb{R}$ este punctul de maxim în jurul căruia se repartizează energia lui g . Este binecunoscut faptul că suportul temporal al lui g poate fi considerat aproximativ inclus în intervalul compact $[t_0 - 3\sigma, t_0 + 3\sigma]$, unde se găsește mai mult de 90 % din energia sa. Se poate arăta cu ușurință că TF asociată lui g verifică proprietatea remarcabilă de a rămîne o fereastră gaussiană, suportul frecvențial al lui g fiind aproximat de către intervalul compact $[-3/\sigma, +3/\sigma]$ (vezi și Figura 1). Principiul de incertitudine se exprimă, în acest caz, prin faptul că produsul dimensiunilor celor două suporturi este constant chiar dacă parametrii σ și t_0 variază. Cu cît dimensiunea suportului temporal crește/scade, cu atît dimensiunea suportului frecvențial scade/crește.

În finalul acestui curs, au fost propuse 2 exerciții care ilustrează și mai bine efectul Principiului de incertitudine în Prelucrarea Semnalelor.

O altă clasificare a semnalelor poate fi efectuată în funcție de natura domeniului lor de definiție:

Clasa semnalelor continue ($\mathcal{S}_c$)

Semnalele acetei clase sînt definite pe o mulțime unde momentele variază în mod continuu. Această proprietate este exprimată matematic prin faptul că mulțimea $\mathcal{T}$

posedă cel puțin o componentă conexă și, eventual, un număr finit sau cel mult numărabil de momente izolate. Subliniem diferența dintre termenii "continual" și "continuu": un semnal continual nu este neapărat și un semnal continuu, căci, deși argumentul unei funcții variază continuu, nu este obligatoriu ca funcția însăși să fie continuă. Dacă semnalele continue sînt totuși și continue, atunci ele se numesc *analogice*. Orice semnal continual se notează prin " $f(t)$ ", parantezele rotunde ale argumentului indicînd proprietatea de mai sus, verificată de mulțimea $\mathcal{T}$.

Clasa semnalelor discrete ($\mathcal{S}_d$)

În acest caz, momentele variază de o manieră discretă. Cu alte cuvinte, mulțimea $\mathcal{T}$ conține numai momente izolate și nu are componente conexe. Dacă $\mathbb{Z}$ este mulțimea numerelor întregi, în cazul semnalelor discrete, se consideră că $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{Z}$. În acest context, este absurd să se vorbească de "continuutatea" semnalelor, astfel că ele se mai numesc și *secvențe discrete de semnal*, *semnale numerice* sau *semnale digitale*. Orice semnal discret se notează prin " $x[n]$ ", parantezele drepte indicînd caracterul discret al mulțimii $\mathcal{T}$.

În practică, se utilizează adesea următoarele cazuri particulare de semnale continue sau discrete:

- *Semnale interpolate*, care aparțin în mod convențional clasei $\mathcal{S}_c$. Aceste semnale sînt caracterizate de o variație continuă a amplitudinii (sînt, deci, semnale analogice), variație obținută printr-o *tehnică de interpolare* aplicată semnalelor digitale. (Practic, mulțimea momentelor $\mathcal{T}$ este discretă inițial, semnalul interpolat fiind definit pe o acoperire convexă a acesteia.)
- *Semnale eșantionate (discretizate)*, care aparțin, în mod natural, clasei $\mathcal{S}_d$ și care au fost obținute prin *eșantionarea* semnalelor continue. Pentru aceste semnale, atît amplitudinile cît și momentele variază în mod discret. Practic, eșantionarea constă în a selecționa anumite valori ale unui semnal continual cu ajutorul unei măsuri atomice pentru momente, numită *perioadă de eșantionare*. Valorile selecționate ale semnalului corespund unei submulțimi de puncte izolate, echidistante, extrase din mulțimea (conexă) $\mathcal{T}$, astfel încît distanța dintre puncte să fie egală cu perioada de eșantionare. De notat că mulțimea semnalelor digitale nu se reduce la cea a semnalelor eșantionate; există posibilitatea de a genera semnale numerice fără a utiliza operația de eșantionare.

În mod logic, între operațiile de interpolare și eșantionare există o relație de dualitate imperfectă. Este evident că eșantionarea unui semnal continual urmată de interpolare nu conduce în mod obligatoriu la semnalul original de la care s-a plecat.

Cea mai mare parte a semnalelor acestui curs sînt *deterministe*, adică semnale ale căror valori sînt unic determinate la fiecare moment al domeniului de definiție. Cu toate acestea, în natură semnalele sînt, în general, *nedeterministe*; valorile lor nu sînt cunoscute cu siguranță, dar, de cele mai multe ori, este posibil să precizăm distribuții de probabilitate referitoare la aceste valori. Caracterul nedeterminist al semnalelor practice este datorat, în general, zgomotelor care le corup.

Fără a avea pretenția de a fi epuizat toate posibilitățile, ne oprim la o ultimă clasificare a semnalelor, bazată pe conceptul de *autocorelație*. Acesta este definit după cum urmează:

Definiția 2.2

- În cazul unui semnal continuu f , funcția de două variabile:

$$r_f(\theta, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_2 f(t - \theta) \overline{f(s - \tau)} dt ds \quad \forall \theta, \tau \in \mathbb{R},$$

se numește (funcție de) autocorelație asociată semnalului, dacă integralele aferente sînt convergente (vezi secțiunea de "Notatii și convenții" pentru simbolul " $\int_2$ ").

- În cazul unui semnal discret x , secvența bidimensională:

$$r_x[p, q] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} x[n - p] \overline{x[m - q]} \quad \forall p, q \in \mathbb{Z},$$

se numește (secvență de) autocorelație asociată semnalului, dacă sumele infinite aferente sînt convergente.

Autocorelația este definită în mod tradițional pentru semnale nedeterminate, relațiile de mai sus constituind o adaptare a definiției originale pentru cazul semnalelor deterministe. Momentele (θ, τ) , respectiv $[p, q]$ se numesc *pivoți* de calcul ai autocorelației. Ei reprezintă punctele fixe în raport cu care semnalul este translatat în timp. Intuitiv, autocorelația constituie o măsură a gradului de corelare între valorile succesiveale semnalului și deci – o măsură a *redundanței* sale intrinseci. Redundanța unui semnal exprimă capacitatea evoluției sale trecute de a influența evoluția sa viitoare.

Prototipul semnalului perfect neredundant este *zgomotul alb*, e , care verifică următoarea proprietate ideală:

$$r_e(\theta, \tau) = 0 \quad \forall \theta \neq \tau \quad \text{respectiv :} \quad r_e[p, q] = 0 \quad \forall p \neq q. \quad (9)$$

În spectrul acestui semnal se regăsesc toate frecvențele posibile, cu aceeași putere spectrală (linii spectrale identice), de unde și numele de *zgomot alb*. Toate semnalele care au autocorelații diferite de r_e se numesc (*zgomote*) *colorate*. Liniile spectrale cele mai înalte ale spectrului unui astfel de semnal se numesc *culori specifice*.

Plecînd de la conceptul de autocorelație, este posibilă gruparea semnalelor în următoarele clase:

1. *Clasa semnalelor staționare*, pentru care autocorelația nu depinde decît de diferența pivoților; în consecință, este posibilă redefinirea acestui concept într-o formă care să pună în evidență această proprietate:

$$r_f(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int f(t) \overline{f(t - \tau)} dt \quad \forall \tau \in \mathbb{R}; \quad (10)$$

$$r_x[k] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \overline{x[n - k]} \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

2. *Clasa semnalelor nestaționare*, pentru care nu mai este posibilă punerea în evidență a proprietății anterioare. În acest caz, autocorelația poate fi redefinită în funcție de contextul specific de lucru.

Și această clasificare are o legătură directă cu un anumit tip de comportament în frecvență al semnalelor. Această legătură a sugerat, de fapt, terminologia utilizată. Astfel, de regulă, semnalele staționare sînt considerate a avea un spectru constant în timp; conținutul lor de frecvențe este prefixat și nu se modifică odată cu scurgerea timpului. Un astfel de semnal este, de exemplu, o sinusoidă. Dimpotrivă, pentru semnalele nestaționare, conținutul lor de frecvențe variază odată cu timpul. În Figura 2, a fost trasat graficul unui semnal extrem de simplu, dar avînd un caracter nestaționar. Este vorba despre următorul semnal:

Figura 2: *Un exemplu de semnal nestaționar.*

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega_1 t) & , \quad t \in [T_1, T_2] \\ \sin(\omega_2 t) & , \quad t \in [T_3, T_4] \\ 0 & , \quad t \notin [T_1, T_2] \cup [T_3, T_4] \end{cases} , \quad \text{unde:} \quad \begin{cases} T_1 < T_2 < T_3 < T_4 (\in \mathbb{R}) \\ \omega_1 \neq \omega_2 (\in \mathbb{R}) \end{cases} .$$

Acesta poate fi considerat ca un semnal obținut prin pronunțarea succesivă a două vocale diferite, cu o pauză între ele, în intervalul (T_2, T_3)). Nestaționaritatea acestuia se exprimă prin modificarea în timp a frecvențelor componente ale spectrului.

În natură, semnalele sînt, de regulă, nestaționare. Variația în timp a conținutului lor de frecvențe este cel mai bine pusă în evidență de către semnalele care au o structură *fractală*. Pentru a explica semnificația acestei ultime proprietăți, nu ne vom lansa într-o dizertație matematică complexă (așa cum ar trebui, dacă ar fi să o caracterizăm de o manieră riguroasă). Am preferat, în loc, să o ilustrăm printr-un exemplu simplu și sugestiv. Astfel, orice semnal continuu care posedă o structură intrinsecă fractală are proprietatea că derivata sa există, dar nu este continuă în nici un punct. Pentru un astfel de semnal, între oricare 2 puncte ale domeniului de definiție există cel puțin un punct de "rupere" a derivatei. Acest efect este prezentat, de exemplu, în Figura 3, unde mărirea succesivă a scalei de reprezentare a graficului arată că aspectul său neted este doar aparent. Aceste schimbări bruște de direcție ale tangentei la graficul temporal sînt legate intim de evoluția conținutului de frecvențe în timp. Este suficient să efectuăm o comparație între spectrele a două impulsuri triunghiulare de deschideri diferite: spectrul impulsului mai ascuțit este distribuit către frecvențele mai înalte, ceea ce arată că dacă deschiderea impulsului triunghiular variază, atunci pantele sale laterale variază și aceasta provoacă o modificare a conținutului său de frecvențe. (Studiul acestei proprietăți este propus cititorului într-un exercițiu de la sfîrșitul cursului.)

Figura 3: O ilustrare a caracterului fractal al unui semnal.

3 Problematica generală a Prelucrării Semnalelor

Definirea conceptului de semnal conduce automat la necesitatea precizării termenului de *prelucrare*.

Intuitiv, acesta revine la estimarea parametrilor caracteristici ai semnalului dat, în vederea încadrării lui într-o anumită clasă și a transformării lui într-o formă ulterioară dorită. De regulă, noua formă (transformată) a semnalului trebuie să permită o mai ușoară extragere a informației pe care el o transportă. Sensul general al *operației de prelucrare* este sugerat și de termenii *traitement* (tratament) din limba franceză sau *processing* (procesare) din limba engleză, care sînt, de fapt, sinonime ale cuvîntului *transformare*.

Actualmente, există două puncte de vedere distincte referitoare la conceptul de *prelucrare*:

1. Punctul de vedere de tip **hardware**, potrivit căruia semnalele suferă în cursul prelucrării o serie de transformări cu ajutorul unor scheme sau circuite electronice. În aceste context, operația principală este *filtrarea*, utilizată adesea pentru eliminarea zgomotelor parazite ce însoțesc semnalele utile. Proiectarea acestor scheme se efectuează plecînd de la anumite proprietăți dorite ale semnalului transformat (de exemplu, o anumită configurație a spectrului de frecvențe). De regulă, transformările de acest tip modifică sensibil informația transportată de semnalul inițial.
2. Punctul de vedere **software**, referitor la un ansamblu de tehnici de extragere a informației transportate de către un semnal în scopul utilizării ei ulterioare. În acest context, semnalului i se construiește un model matematic cu proprietăți cunoscute și ușor de caracterizat. Spre deosebire de contextul anterior, aici se urmărește degradarea minimală a informației transportate de semnalul original, adică generarea de modele matematice cu un grad cît mai ridicat de adecvanță și cu o complexitate cît mai redusă.

Pentru a defini mai exact termenul de *prelucrare*, este suficient să efectuăm o trecere în revistă a problematicei generale caracteristice domeniului, din perspectivă *software*.

3.1 Problema matematică

Problema directă

Presupunînd că se cunoaște un semnal $f \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ și că în $\mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ s-a stabilit o bază numărabilă $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se cere să se descompună f în "componente" de forma:

$$f \equiv \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n e_n, \quad (12)$$

unde $c_n \in \mathcal{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (Practic, se cere să se determine șirul coeficienților de descompunere, $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.)

Problema inversă

Presupunînd că se cunoaște: o bază în $\mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ (ca mai sus) și componentele unui semnal $f \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ (coeficienții de descompunere a acestuia în baza dată, de fapt), se cere să se reconstruiască semnalul inițial cu ajutorul componentelor sale.

Dacă problema reconstrucției pare ușor de rezolvat (cunoscînd baza $\mathcal{B}$), cea a descompunerii are un grad de dificultate relativ ridicat. Aceasta datorită mării diversități de baze numărabile care pot fi construite în cadrul spațiilor $\mathcal{S}^p(\mathcal{T})$. În general, soluțiile problemelor matematice de mai sus sînt de natură teoretică și funcționează în contextul spațiilor $L^p(\mathcal{T})$.

Practic, dificultatea rezolvării problemei directe constă în indicarea unei baze adecvate (în raport cu un anumit criteriu). Această problemă se simplifică mult dacă spațiul $\mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ poate fi dotat cu un produs scalar și dacă i se poate indica o bază ortonormată:

$$\langle e_m, e_n \rangle = \delta_0[m - n], \quad \forall m, n \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

În acest remarcabil caz particular, coeficienții de descompunere ai unui semnal $f \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ se pot determina simplu, evaluînd proiecțiile semnalului pe elementele bazei:

$$c_n = \langle f, e_n \rangle \quad (14)$$

Construirea unui produs scalar și a unei baze ortonormate este dificilă în condiții generale. În absența ortogonalității bazei, indicarea unei formule de calcul pentru coeficienții de descompunere constituie o problemă dificilă (dar nu imposibilă; vezi, de exemplu, [11]).

De aceea, se preferă contextul spațiilor $\mathcal{S}^2(\mathcal{T})$, care au deja o structură hilbertiană. De exemplu, dacă $\mathcal{T} = [-\pi, +\pi]$, atunci o bază remarcabilă a spațiului $L^2(\mathcal{T})$ este cea *armonică*:

$$\mathcal{B}_a \stackrel{def}{=} \{1, \sin t, \cos t, \dots, \sin nt, \cos nt, \dots\}. \quad (15)$$

Utilizarea acestei baze a condus la conceptele de *analiză armonică* sau *analiză Fourier*, cu care majoritatea specialiștilor din domeniu sînt familiarizați. O mare parte a aplicațiilor de Prelucrare de Semnal sînt dezvoltate în cadrul acestui tip de analiză. Există însă și alte aplicații, unde analiza clasică armonică este înlocuită de alte tipuri moderne de analiză (de exemplu, de tip frecvență-timp, [11]).

3.2 Problema inginerescă

Din punctul de vedere ingineresc, problema matematică formulată în paragraful anterior trebuie reformulată. În general, matematicianul urmărește să demonstreze existența (și, eventual, unicitatea) descompunerii (12), în timp ce inginerul este preocupat de modalitatea de

construcție efectivă (chiar algoritmică) a componentelor semnalului sau a asemnalului plecînd de la componentele sale.

O posibilă reformulare a problemei centrale a Prelucrării Semnalelor din viziune inginerască ar putea fi următoarea:

Problema analizei de semnal (a descompunerii)

Cunoscînd un semnal $f \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ (adesea prin eșantioanele sale într-un număr finit de momente) și presupunînd că a fost aleasă o bază $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a lui $\mathcal{S}^p(\mathcal{T})$, se cere să se construiască un nou semnal $\phi \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$, avînd proprietățile următoare:

1. ϕ se poate exprima în forma:

$$\phi \equiv \sum_{n=0}^N c_n e_n, \quad (16)$$

unde $N \in \mathbb{N}$ este fixat și finit, iar coeficienții $\{c_n\}_{n=0, \overline{N}} \subset \mathcal{C}$ se pot determina numai cu ajutorul elementelor bazei $\mathcal{B}$ și al semnalului f ;

2. ϕ aproximează cît mai bine pe f , în sensul normei lui $\mathcal{S}^p(\mathcal{T})$, adică: pentru orice $\varepsilon > 0$ (numit "eroare de aproximare"), există $\phi \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ (depinzînd de ε), astfel încît $\|f - \phi\| < \varepsilon$.

Problema sintezei de semnal (a reconstrucției)

Plecînd de la "modelul matematic" ϕ (16) al unui semnal f necunoscut sau doar parțial cunoscut, se cere să se indice valoarea lui f la un anumit moment $t_0 \in \mathcal{T}$, cu un grad de precizie dat de ϕ .

Deși are o nuanță extrem de practică, perechea de probleme inginerști de mai sus este inevitabil legată de aspecte matematice mai profunde. Totuși, aceste probleme nu se reduc la inițierea de aplicații pentru Matematică.

Problemele inginerști de mai sus reclamă soluții cu un profund caracter practic. Contextul de lucru propice dezvoltării unor astfel de soluții este cel al spațiilor $l^p(\mathcal{T})$ sau chiar al spațiilor semnalelor discrete cu suport finit, $l_0^p(\mathcal{T})$.

Soluțiile ambelor probleme "inginerști" se complică sensibil dacă nu se pot construi coeficienții c_n în mod simplu și direct sau dacă elementele bazei nu sînt definite explicit, ci implicit, prin intermediul unor ecuații funcționale. Cu toate acestea, construcția algoritmică a coeficienților de descompunere sau reconstrucția algoritmică a semnalului sînt cerințe naturale, satisfăcute frecvent în aplicațiile practice.

Soluționarea acestor probleme este condiționată de găsirea unei baze $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a lui $\mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ cu proprietăți cît mai interesante. Cunoașterea unei formule analitice precise a fiecărui element din bază poate juca un rol determinant (ca în cazul bazei armonice). Astăzi, însă, Prelucrarea Semnalelor deține un registru mult mai larg de metode de analiză și sinteză de semnal, unele dintre ele operînd cu relații recursive între elementele bazei (vezi, de exemplu, [12] sau [10]).

Cu toate acestea, soluțiile practice date acestor probleme evidențiază că baza $\mathcal{B}$ trebuie să verifice următoarele două proprietăți importante:

Proprietatea de aproximare eficientă

Numărul N din expresia (16) trebuie să fie cît mai mic cu putință, pentru o anumită precizie dată, ε . Aceasta conduce la un număr cît mai mic de operații în evaluarea modelului matematic asociat semnalului original.

Baza $\mathcal{B}$ aleasă trebuie să fie ortonormală (sau ortogonalizabilă prin procedeul clasic al lui Gramm-Schmidt), pentru a simplifica evaluarea coeficienților de descompunere.

Ortonormalitatea bazei $\mathcal{B}$ conduce la următoarele relații, care exprimă, în esență, conținutul termenului de *prelucrare* a unui semnal:

• **Relația de analiză a semnalului:** $c_n = \langle f, e_n \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

• **Relația de sinteză a semnalului:** $f \equiv \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, e_n \rangle e_n.$

Ortogonalitatea bazei asigură, de fapt, diminuarea sau eliminarea redundanței intrinseci a semnalului original. Fiecare element al bazei ortogonale codifică o informație unică, imposibil de regăsit integral în oricare alt element. Astfel, diminuarea redundanței conduce la posibilitatea de a reprezenta semnalul într-o manieră comprimată, mai eficientă.

Nu întotdeauna aceste proprietăți dezirabile sînt ușor de satisfăcut și, mai mult, chiar în cazul în care pot fi verificate, este posibil ca ele să nu fie suficiente pentru a realiza o bună caracterizare a anumitor semnale. Uneori, precizia de caracterizare intră în contradicție cu ortogonalitatea bazei, ca în cazul aplicațiilor de prelucrare și interpretare a imaginilor, unde, din contră, redundanța este o proprietate necesară. Matematica modernă s-a adaptat acestor aspecte și a îmbogățit Teoria Spațiilor Liniare Topologice cu o serie de rezultate noi. De exemplu, conceptul de "bază ortogonală" a fost generalizat prin introducerea noțiunii de *cordaj dens* (vezi, de exemplu, [11]), care permite renunțarea la ortogonalitate cu păstrarea simplității relației de sinteză de mai sus.

3.3 O soluție clasică de prelucrare a semnalelor

Una dintre primele idei în soluționarea problemei a fost aceea că orice semnal poate fi considerat ca o suprapunere aditivă de (alte) semnale staționare atomice "monofrecvențiale" (sinusoide, de exemplu), de diferite amplitudini. Mulțimea globală a acestor semnale atomice depinde de domeniul de definiție $\mathcal{T}$, dar frecvența fiecărui atom este constantă în timp. Această idee a fost inițiată de către Joseph Fourier. Ulterior, ea a fost preluată și îmbogățită de o serie de alți cercetători, care au demonstrat rezultate importante legate de această abordare. În unul din capitolele următoare, vom prezenta și noi un astfel de rezultat: Teorema de aproximare punctuală a lui Dirichlet-Fourier.

Demersul lui Fourier a condus la introducerea termenilor de *serie Fourier* și *analiză armonică (în frecvență)* ale unui semnal. Seria Fourier nu este decît o combinație liniară de semnale monofrecvențiale și descrie comportarea semnalului original în timp și în frecvență. Ea evidențiază nu numai modul de evoluție în timp a semnalului, ci și *conținutul în frecvență* al acestuia (dat de predominanța fiecărui semnal atomic monofrecvențial component). Astfel, semnalul original este de tip "multifrecvențial".

Pentru a ilustra de o manieră mai clară soluția lui Fourier, vom prezenta exemplul care urmează.

Să considerăm că mulțimea momentelor, $\mathcal{T}$ este chiar intervalul compact $[-\pi, +\pi]$ și că semnalul original este continuu și de energie finită: $f \in L^2([-\pi, +\pi])$. Conform teoremelor lui Weierstrass-Stone, mulțimea polinoamelor definite pe $[-\pi, +\pi]$, cu coeficienți din $\mathcal{C}$, este densă în mulțimea semnalelor analogice (continuale și continue) mărginite definite pe $[-\pi, +\pi]$. La rîndul ei, această mulțime este densă în $L^2([-\pi, +\pi])$. Cum funcțiile trigonometrice *sinus* și *cosinus* sînt semnale analogice mărginite, rezultă că mulțimea polinoamelor trigonometrice este densă în $L^2([-\pi, +\pi])$. Datorită acestui fapt, în spațiul separabil $L^2([-\pi, +\pi])$, se poate construi următoarea bază ortogonală numărabilă:

$$\mathcal{B}_a \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \underbrace{1}_{e_0}, \underbrace{\sin t}_{e_{s1}}, \underbrace{\cos t}_{e_{c1}}, \dots, \underbrace{\sin nt}_{e_{sn}}, \underbrace{\cos nt}_{e_{cn}}, \dots \right\} \quad (17)$$

Ortogonalitatea acestei familii de funcții trigonometrice (17) este exprimată de următoarele relații:

$$\begin{aligned} \langle e_0, e_{sn} \rangle &= 0 \quad ; \quad \langle e_0, e_{cn} \rangle = 0, & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \langle e_{sn}, e_{sm} \rangle &= \pi \delta_0[n-m] \quad ; \quad \langle e_{cn}, e_{cm} \rangle = \pi \delta_0[n-m] \quad ; \quad \langle e_{sn}, e_{cm} \rangle = 0, & \forall m, n \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \quad (18)$$

Semnalul f se poate exprima punctual în baza $\mathcal{B}_a$, cu ajutorul următoarelor formule (cunoscute sub numele de *formule ale lui Fourier*) [3]:

<u>Descompunere</u>	<u>Reconstrucție</u>
$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) dt \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt dt \\ \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin nt dt \end{aligned} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$	$f(t) \stackrel{PC}{=} \alpha_0 + \sum_{n \geq 1} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt), \quad \forall t \in [-\pi, +\pi]$

(19)

Formula de reconstrucție de mai sus este exprimată cu ajutorul unui polinom trigonometric infinit, numit *serie Fourier*. Seria Fourier este numai punctual convergentă către semnalul original, dar, în practică, acest tip de convergență (slabă) este suficient pentru a aproxima semnalele obișnuite. Fiecare termen de forma " $(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$ " al sumei de mai sus se numește *armonică* de pulsație n și constituie un element atomic monofrecvențial al seriei Fourier.

Reciproc, relațiile de descompunere conduc la numerele $\{\alpha_n, \beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (unde $\beta_0 = 0$, prin convenție), numite *coeficienți (ai lui) Fourier*. Aceștia oferă o imagine a *puterii spectrale* (adică a distribuției energiei semnalului în frecvență), exprimată de șirul următor, pentru fiecare din frecvențele armonicelor: $\{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Maximele acestui șir indică frecvențele (pre)dominante ale semnalului original.

Odată ce problema matematică a Prelucrării Semnalelor a fost soluționată astfel, nu este foarte dificil să găsim și o soluție problemei ingineresti. Aceasta este sugerată și de o proprietate remarcabilă a coeficienților Fourier, exprimată de una din teoremele lui Parseval:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0. \quad (20)$$

Semnalul aproximativ ϕ din (16) (pagina 11) se poate construi în mod natural. Astfel, se poate fixa un număr $N \in \mathbb{N}^*$ (în funcție de un anumit criteriu de precizie a aproximării), cu ajutorul căruia seria din (19) se poate trunchia ca mai jos:

$$\phi(t) \stackrel{def}{=} \alpha_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt), \quad \forall t \in [-\pi, +\pi]. \quad (21)$$

Suma din expresia (21) conține armonice de pulsații fixe și crescătoare pînă la un anumit ordin. Acest tip de aproximare a semnalului original are și o justificare intuitivă imediată. În natură, majoritatea semnalelor sînt *de bandă limitată*, adică spectrul lor are suport compact sau finit. În consecință, este natural ca puterile armonicelor de înaltă frecvență să poată fi neglijate începînd cu un anumit indice al pulsației.

Soluția lui Fourier (prezentată mai sus) are și alte implicații de natură practică. (Multe dintre acestea vor fi relevate în acest curs.) De exemplu, dacă semnalul original este eșantionat, atunci este posibil ca numărul eșantioanelor sale (considerate pe o perioadă finită de observație) să fie mult mai mare decît numărul de coeficienți Fourier semnificativi asociați. La limită, o sinusoidă de pulsație întreagă poate fi reprezentată cu maxim 2 coeficienți Fourier (media semnalului, α_0 și un β_n indicînd unica armonică din componența acestuia). Dacă aceeași sinusoidă este

eșantionată, atunci numărul eșantioanelor sale poate depăși sensibil numărul de 2 coeficienți Fourier. Acest aspect se datorează tocmai ortogonalității bazei armonice, care este capabilă să reducă redundanța intrinsecă a semnalului original. Sinusoida (sau, mai general, orice armonică de pulsație fixă) este unul dintre semnalele cele mai redundante și mai ușor de reprezentat. În consecință, formulele de reprezentare ale lui Fourier indică și o modalitate de reducere a redundanței intrinseci a unui semnal oarecare, prin descompunerea lui într-un șir de armonici ortogonale, fiecare codificând o informație imposibil de regăsit în celelalte. Fenomenul reducerii redundanței prin ortogonalitate conduce la o reprezentare comprimată a semnalului și stă la baza unor tehnici de compresie de date.

3.4 Conexiuni cu problematica altor discipline

Prelucrarea Semnalelor este conectată cu Teoria Sistemelor printr-o serie de concepte comune, unele dintre ele fiind prezentate și în cadrul acestui curs. Aceste concepte sînt definite într-o abordare unitară, în jurul noțiunii de *sistem de prelucrare a semnalelor*.

Definiția 3.1

Se numește **sistem de prelucrare a semnalelor (SPS)** un sistem dinamic a cărui comportare este determinată de un ansamblu de tehnici de prelucrare a semnalelor, implementate în scopul obținerii unor informații caracteristice unui anumit tip de semnal.

Ca și în cazul conceptului de "semnal", există posibilitatea de a efectua mai multe clasificări ale SPS. De exemplu, SPS pot fi:

- *în timp continuu* (cu intrările și ieșirile semnale continuele);
- *în timp discret* (cu intrările și ieșirile semnale discrete);
- *convertoare analog-numerice (CAN)* (cu intrările semnale analogice și ieșirile semnale digitale);
- *convertoare numeric-analogice (CNA)* (cu intrările semnale digitale și ieșirile semnale analogice).

O altă conexiune interesantă există între problematica prezentată în paragrafele anterioare și cea a Identificării Experimentale a Sistemelor. Este suficient să reamintim că problema specifică a Identificării Sistemelor este de natură inginerescă și constă, în esență, în stabilirea unui model de proces/sistem real, ales astfel încît la stimularea cu același *semnal de intrare*, între *semnalul de ieșire* al modelului (simulat) și cel de ieșire real să fie deosebiri cît mai mici (în sensul unui criteriu de performanță impus). Construirea modelului de sistem revine adesea la o modelare a semnalelor cu care sistemul real operează.

4 Secvențe de semnal în timp discret. Algebra secvențelor discrete.

O ramură importantă Prelucrării Semnalelor o constituie cea dedicată metodelor de procesare a semnalelor digitale. În practică, semnalele digitale ocupă un loc central, datorită posibilității reprezentării lor cu ajutorul unui mijloc automat de calcul. Aceste semnale sînt obținute fie în urma operației de eșantionare (în cele mai frecvente cazuri), fie direct, cu ajutorul unui sistem dinamic discret (fără legătură cu clasa semnalelor continuele). Semnalele digitale pot avea proprietăți speciale diferite de a celor continuele, chiar dacă ele au fost obținute prin eșantionare. Datorită acestui fapt, nu întotdeauna rezultatele Teoriei Semnalelor/Sistemelor Analogice se pot transfera în cazul discret. Reciproc, Teoria Semnalelor/Sistemelor Discrete include și rezultate specifice, care nu se regăsesc sau nu pot fi exprimate în cazul continuu.

În cadrul acestui curs, vor fi prezentate o serie de astfel de rezultate, aflate în conexiune cu Analiza armonică de semnal.

Semnalele digitale sînt reprezentate prin secvențe numerice notate generic astfel:

$$x \stackrel{not}{=} \{x[n]\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \Gamma ,$$

unde Γ desemnează unul din cele 2 corpuri $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Parantezele drepte care însoțesc argumentul secvenței x specifică faptul că semnalul evoluează *în timp discret*. Prin convenție, entitățile $\mathcal{T}$ și $\mathcal{M}$ din Definiția 2.1 (pagina 2) au fost stabilite ca fiind $\mathbb{Z}$, respectiv Γ . Și tot convențional, vom denumi valorile semnalului prin termenul de *eșantioane*, chiar dacă el nu a fost obținut prin operația de eșantionare.

Mulțimea secvențelor discrete o vom nota prin " $\mathcal{S}_d$ ", ca de obicei. Ea include toate spațiile lui Lebesgue, $l^p(\mathbb{Z})$, dar nu se reduce la reuniunea lor.

Cele mai simple exemple de secvențe discrete sînt următoarele:

$$\bullet \text{ Impulsul unitar: } \delta_0[n] \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0 & , \quad n \neq 0 \\ 1 & , \quad n = 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$\bullet \text{ Treapta unitară: } u_0[n] \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0 & , \quad n < 0 \\ 1 & , \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (23)$$

(Impulsul unitar este analogul discret al impulsului lui Dirac, iar treapta unitară a fost definită în cazul continuu de către Heavieside.)

Între aceste două semnale există o corelație exprimată de următoarele formule evidente:

$$u_0[n] = \sum_{k \leq n} \delta_0[k] \quad ; \quad \delta_0[n] = u_0[n] - u_0[n-1] = u_0[-n] - u_0[-1-n] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} . \quad (24)$$

În afara treptei unitare, există și alte semnale care nu fac parte din spațiile lui Lebesgue. Este cazul, de exemplu, al secvențelor periodice, notate generic prin " $\tilde{x}$ ". O secvență periodică de perioadă $N \in \mathbb{N}^*$ verifică următoarea proprietate:

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n+N] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} . \quad (25)$$

Deși pare extrem de banală, proprietatea (25) ascunde o situație în care caracteristicile semnalului continuu destinat eșantionării nu se mai transferă oricărei versiuni eșantionate (discretizate). De exemplu, se poate arăta cu ușurință că dacă ω_0 este pulsația unei armonice de forma:

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) , \quad \forall t \in \mathbb{R} ,$$

iar raportul $\frac{\pi}{\omega_0}$ este un număr irațional, atunci versiunea discretizată:

$$f_d[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi) , \quad \forall n \in \mathbb{Z} ,$$

nu poate fi periodică. În consecință, transferul modelului matematic al seriei Fourier din cazul continuu ar putea fi afectat de o eșantionare inadecvată a semnalelor. Acesta este unul din motivele pentru care modelul lui Fourier a fost imaginat direct în cazul semnalelor discrete, fără a apela la discretizarea semnalelor continue.

Cu toate acestea, clasele de semnale digitale cele mai utilizate în practică sînt $l^1(\mathbb{Z})$ (semnale absolut sumabile) și $l^2(\mathbb{Z})$ (semnale de energie finită). Se poate arăta că orice secvență absolut sumabilă are și energia finită, deci că:

$$l^1(\mathbb{Z}) \subseteq l^2(\mathbb{Z}) . \quad (26)$$

Notă

- În cazul continuu, nici unul dintre cele două subspații $L^1(\mathcal{T})$ și $L^2(\mathcal{T})$ nu este inclus în celălalt, adică există atât semnale absolut integrabile care nu au energie finită cât și semnale de energie finită care nu sînt absolut integrabile. Un exemplu de semnal din prima categorie a fost dat de către Lebesgue, noi renunțînd a-l prezenta datorită complexității sale matematice ridicate.

Cu toate acestea, cele două spații nu se identifică. Se poate arăta ușor că, dacă $\omega_0 \in \mathcal{Q} \frac{\pi}{2}$, atunci, deși următoarea secvență discretă:

$$x[n] = \frac{\sin \omega_0 n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

are energie finită, totuși ea nu este și absolut sumabilă.

Din nou remarcăm faptul că o proprietate din cazul semnalelor continue nu se regăsește și în cazul celor discrete. Cu toate acestea, proprietatea spațiilor discrete este mai bună, căci ea ne permite să operăm cu toate semnalele absolut sumabile ca și cu orice alt semnal de energie finită.

★

Revenind la mulțimea generală $\mathcal{S}_d$, ea poate fi înzestrată cu următoarele operații naturale:

- adunarea secvențelor: $x + y \stackrel{def}{=} \{x[n] + y[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$;
- produsul (punctual al) secvențelor: $x \bullet y \stackrel{def}{=} \{x[n]y[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$;
- produsul dintre o secvență și un scalar din Γ : $\alpha \cdot x \stackrel{def}{=} \{\alpha x[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Atunci $\mathcal{S}_d$ dobîndește următoarele structuri algebrice:

1. $(\mathcal{S}_d, +)$ este grup abelian, cu elementul neutru secvența nulă;
2. $(\mathcal{S}_d, +, \bullet)$ este inel comutativ, cu elementul unitar secvența constantă egală cu 1;
3. $(\mathcal{S}_d, +, \cdot)$ este spațiu vectorial peste corpul Γ ;
4. $(\mathcal{S}_d, +, \bullet, \cdot)$ este algebră unitară comutativă peste corpul Γ .

Structurile de mai sus sînt deosebit de utile în practică, deoarece ele permit construirea unor reguli de operare cu semnalele discrete, care ar putea fi evaluate cu ajutorul unui mijloc automat de calcul. Această "aritmetică de semnal" este, dealtfel, utilizată și în cadrul Toriei Sistemelor; de exemplu, suma a două secvențe discrete poate fi impementată direct cu ajutorul unei scheme de două sisteme conectate în paralel.

Notă

- Prin convenție, operațiile "•" și "•" vor fi specificate explicit numai în cazul în care omiterea lor crează ambiguități. Deci: " $x \bullet y$ " și " $\alpha \cdot x$ " se vor specifica uzual prin: " xy ", respectiv " αx ".

Proprietatea mulțimii $\mathcal{S}_d$ de a fi spațiu vectorial a condus în mod firesc la căutarea unei baze. Direcția de căutare a unei baze a fost sugerată de o proprietate remarcabilă din cazul sistemelor continue; este vorba despre formula convențională de reprezentare a funcției pondere cu ajutorul impulsului lui Dirac:

$$h(t) = \int f(\theta) \delta_0(t - \theta) d\theta, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

Astfel, este natural să fie imaginată o modalitate similară de reprezentare și în cazul discret, înlocuind impulsul lui Dirac cu cel unitar (22). Pentru a putea descrie eficient baza găsită, este necesar să definim o noțiune auxiliară, numită *operator de translatare (shiftare) în timp* (utilizat și în Identificarea Sistemelor).

Fie $k \in \mathbb{Z}$ un număr întreg fixat, cu ajutorul căruia se definește aplicația următoare:

$$\left[\begin{array}{lcl} q^{-k} & : & \mathcal{S}_d \rightarrow \mathcal{S}_d \\ x & \mapsto & q^{-k}(x) \stackrel{not}{=} q^{-k}x \end{array} \right] \left[\begin{array}{lcl} q^{-k}x & : & \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma \\ n & \mapsto & (q^{-k}x)[n] \stackrel{def}{=} x[n-k] \end{array} \right] \quad (28)$$

(Prin convenție, $q^0x \equiv x$.) Această aplicație verifică următoarele proprietăți elementare:

1. $q^{-k}(\alpha x + \beta y) \equiv \alpha q^{-k}x + \beta q^{-k}y, \forall \alpha, \beta \in \Gamma, \forall x, y \in \mathcal{S}_d$;
2. $q^{-k}q^{-l} \equiv q^{-(k+l)}, \forall k, l \in \mathbb{Z}$.

Prima dintre aceste proprietăți este cea de liniaritate, fapt care justifică atât notația utilizată în definiția (28), cât și atributul de *operator (liniar)* asociat aplicației. A doua proprietate este legată de următoarea interpretare a definiției (28):

- în cazul în care $k > 0$, secvența $q^{-k}x$ constituie o versiune *întârziată* în timp a secvenței originale x ;
- în cazul în care $k < 0$, secvența $q^{-k}x = q^{+|k|}x$ constituie o versiune *anticipată* în timp a secvenței originale x .

Astfel, întârzierile sau anticipările succesive se cumulează aditiv, ceea ce este natural. În consecință, q^{-k} a fost denumit *operator de translație (shiftare) în timp* cu k eşantioane.

În cazul impulsului unitar δ_0 , se poate introduce următoarea notație naturală : $q^{-k}\delta_0 \stackrel{not}{=} \delta_k$. Plecînd de la acest operator, o bază a spațiului vectorial $\mathcal{S}_d$ este următoarea:

$$\Delta \stackrel{def}{=} \{\delta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (29)$$

Ea este considerată o bază *canonică*. Orice secvență discretă $x \in \mathcal{S}_d$ poate fi reprezentată în mod unic cu ajutorul bazei canonice Δ în forma următoare:

$$x \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta_k \quad \Longleftrightarrow \quad x[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta_k[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (30)$$

Similitudinea dintre formulele (27) și (30) este evidentă.

5 Sisteme liniare invariante la deplasări

Operațiile algebrice cu care a fost dotată mulțimea semnalelor digitale în capitolul precedent nu sînt în mod necesar specifice Prelucrării Semnalelor. Ele pot fi privite din perspectivă pur matematică. În acest capitol, vom exploata legătura puternică existentă între Prelucrarea Semnalelor și Teoria Sistemelor pentru a dota mulțimea $\mathcal{S}_d$ cu o operație specifică semnalelor: *convoluția*.

Este cunoscut faptul că, în cadrul Teoriei Sistemelor, conceptul de *sistem dinamic* are o importanță majoră. În cadrul Prelucrării Semnalelor, acest concept este definit și utilizat într-o manieră aparte, care permite transferul de proprietăți și de terminologie dinspre "sistem" către "semnal". Atît acest capitol, cât și următoarele două ilustrează maniera în care acest transfer poate fi realizat.

În Prelucrarea Numerică a Semnalelor, conceptul de *sistem (dinamic) (discret)* se definește simplu, ca mai jos:

Definiția 5.1

Se numește **sistem (dinamic) (discret)** orice operator de forma:

$$\left[\begin{array}{lcl} H & : & \mathcal{S}_d \rightarrow \mathcal{S}_d \\ x & \mapsto & H(x) \stackrel{not}{=} H[x] \end{array} \right]$$

În practică, sistemele dinamice discrete se mai numesc și *filtre (numerice)*. Operatorul de deplasare temporală (28) din capitolul precedent este un exemplu de sistem dinamic discret, în spiritul acestei definiții. Evident, argumentul aplicației H (încadrat între paranteze drepte pentru a indica natura sa discretă) se poate numi *intrare*, iar valoarea $H[x]$ poate fi considerată o *ieșire*.

Dacă se impun diferite restricții suplimentare operatorului H , atunci se pot obține diferite tipuri de sisteme discrete. Unul dintre cele mai uzitate este **sistemul (discret) liniar**, (filtrul liniar) care verifică următorul *Principiu al superpoziției*:

$$H[\alpha x_1 + \beta x_2] = \alpha H[x_1] + \beta H[x_2] , \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{S}_d , \quad \forall \alpha, \beta \in \Gamma . \quad (31)$$

(Cu alte cuvinte, H este un operator liniar, adică transformă orice combinație liniară finită a intrărilor într-o combinație liniară finită a ieșirilor.) Un sistem care nu poate verifica acest principiu se numește *neliniar*.

În cadrul acestui capitol, vor fi descrise proprietăți relative la sistemele liniare, care permit exprimarea operației de convoluție. Între relația (30) de reprezentare a unei secvențe discrete cu ajutorul bazei canonice și conceptul de "sistem liniar" există o corelație interesantă. Să considerăm că ieșirea sistemului liniar H corespunzătoare versiunii translate δ_k a impulsului unitar se notează prin: $h_k \stackrel{not}{=} H[\delta_k]$ (pentru orice număr întreg fixat, k). Dacă plecăm de la o secvență oarecare $x \in \mathcal{S}_d$ *mărginită*, exprimată în forma (30), atunci ieșirea y corespunzătoare lui x prin sistemul liniar *stabil* H se poate evalua astfel:

$$y = H[x] = H \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta_k \right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] H[\delta_k] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y[k] \delta_k . \quad (32)$$

(Ultima egalitate provine din exprimarea semnalului discret y în baza canonică.)

Notă

- În general, pentru un operator oarecare H , operația de intervertire a sa cu o sumă infinită arbitrară nu este posibilă. Însă, în contextul acestui capitol, suma infinită este de un tip special: combinație liniară de impulsuri unitare translate în timp. În acest caz particular, potrivit unor rezultate de Analiză funcțională, se constată că, deoarece semnalul $y = H[x]$ din (32) admite o unică scriere în forma:

$$y = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y[k] \delta_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} H[x][k] \delta_k ,$$

rezultă identitatea următoare:

$$H \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \delta_k \right] \equiv y \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} H[x][k] \delta_k .$$

Aceasta sugerează un anumit mod de intervertire, în care operatorul H acționează asupra eșantionului și nu asupra impulsului unitar.

- Celălalt tip de intervertire (utilizat în (32)) poate fi justificat apelînd la raționamentul care urmează (unde se va observa că atât condiția de mărginire a semnalului x cât și cea de stabilitate a sistemului H sînt naturale).

În natură, semnalele provin (de regulă) de la fenomene care prezintă o stabilitate intrinsecă, astfel că ele nu pot avea amplitudini indefinit de mari. Este deci natural să considerăm că semnalele practice sînt mărginite. Mulțimea semnalelor discrete mărginite, notată prin $\mathcal{S}_{0d}$, poate fi dotată cu aceleași structuri algebrice ca și $\mathcal{S}_d$ și, în plus, ei i se poate asocia următoarea normă canonică ("norma sup"):

$$\|x\| \stackrel{def}{=} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]| < \infty , \quad \forall x \in \mathcal{S}_{0d} .$$

Relativ la această normă, $\mathcal{S}_{0d}$ devine spațiu Banach. Totodată, "norma sup" generează în $\mathcal{S}_{0d}$ o topologie cu ajutorul distanței canonice:

$$d(x, y) \stackrel{def}{=} \|x - y\| .$$

Această topologie este separată în sens Hausdorff (adică pentru orice 2 puncte diferite, se pot construi două vecinătăți disjuncte) și posedă o bază numărabilă de vecinătăți ale originii. În plus, topologia este *liniară*, în sensul că operațiile ”+” și ”.” ale spațiului vectorial $(\mathcal{S}_{0d}, +, \cdot)$ sînt continue (în raport cu această topologie).

În consecință, conform unui rezultat de Analiză funcțională, seria (32) este *uniform convergentă* (în topologia construită mai sus).

Dacă se impune condiția ca operatorul liniar H să fie și continuu în origine, atunci el este (evident) global continuu și atunci un alt rezultat din Analiza funcțională demonstrează că el poate interverti cu orice serie uniform convergentă. În particular, el poate interverti cu seria (32).

Continuitatea în origine a lui H este o condiție naturală, ea presupunînd că sistemul răspunde cu ieșiri din ce în ce mai apropiate de zero dacă intrările converg la zero. Acesta este cazul majorității sistemelor fizice care posedă proprietatea de *stabilitate intrinsecă*. Fenomenele din natură nu se desfășoară decît în aparență în mod haotic, ele avînd limitări intrinseci. Chiar și evoluțiile de natură explozivă se atenuează după ce punctul culminant a fost atins. Liniaritatea în origine a lui H este sinonimă cu stabilitatea intrinsecă a sistemului pe care îl reprezintă.

Relația (32) se poate exprima în mod echivalent astfel:

$$y[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h_k[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (33)$$

Dependența lui $h_k[n]$ atît de n cît și de k (relevantă de noua exprimare) îngreunează interpretarea. Cu toate acestea, deoarece fiecare h_k este răspunsul sistemului la o versiune translatată în timp a impulsului unitar, este greu de presupus că între aceste răspunsuri nu există nici o corelație din punct de vedere practic. Cea mai pluzibilă legătură este sugerată de următorul caz particular de sistem discret liniar:

Definiția 5.2

Se numește **sistem invariant la deplasări (temporale)** (SID) un sistem (discret) care verifică următoarea proprietate: dacă intrarea la momentul n produce ieșirea la momentul n , atunci intrarea la momentul $n - k$ va produce ieșirea la momentul $n - k$.

Practic, proprietatea de invarianță la deplasări temporale prezentată în cadrul acestei definiții exprimă operația de intervertire dintre operatorii H și q^{-k} :

$$H [q^{-k} x] = q^{-k} H[x], \quad \forall x \in \mathcal{S}_d. \quad (34)$$

Interpretarea acestei proprietăți este imediată: operatorul H (care poartă și informația referitoare la timpul mort al sistemului, adică la întârzierea pe care o suferă ieșirea în raport cu intrarea) aplică *aceeași întârziere* oricărui eșantion al intrării, fără a avea preferințe față de unele eșantioane în raport cu altele. Majoritatea sistemelor dinamice din practică verifică această proprietate naturală, fiind practic imposibil de găsit un sistem care să aplice întârzieri diferite eșantioanelor intrării.

Dacă un SID este, în plus, liniar, atunci el se numește *Sistem Liniar Invariant la Deplasări (temporale)* (SLID) (sau, pe scurt, *filtru liniar*, invarianța la deplasări temporale fiind o proprietate subînțeleasă). Un astfel de sistem posedă următoarea proprietate remarcabilă, care provine din îmbinarea celor 2 caracteristici ale sale (liniaritatea și invarianța la deplasări):

- dacă $h \stackrel{\text{not}}{=} H[\delta_0] = h_0$, atunci:

$$h[n - k] = H[\delta_0][n - k] = (q^{-k} H[\delta_0])[n] = H[q^{-k} \delta_0][n] = H[\delta_k][n] = h_k[n], \quad (35)$$

$$\forall n, k \in \mathbb{Z}.$$

Această proprietate arată că, în cazul SLID, este suficient să cunoaștem secvența $h = H[\delta_0]$ pentru a caracteriza complet ieșirea y corespunzătoare unei intrări oarecare x . Practic, h nu este

altceva decît *secvența pondere* sau *răspunsul la impulsul unitar* al SLID, concept binecunoscut din Teoria Sistemelor. După cum se cunoaște, din punctul de vedere al suportului secvenței pondere, sistemele liniare sînt de două tipuri:

1. Cu răspuns finit la impuls (adică de tip "FIR" (*Finite Impulse Response*)), pentru care suportul secvenței pondere este finit.
2. Cu răspuns infinit la impuls (adică de tip "IIR" (*Infinite Impulse Response*)), pentru care suportul secvenței pondere este infinit.

Ieșirea unui SLID este complet caracterizată cu ajutorul relației de intrare-ieșire de mai jos (rezultată direct din formulele (33) și (35)):

$$y[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (36)$$

Această relație sugerează introducerea unei noi operații între secvențele de semnal discret: *produsul (suma) de convoluție*:

$$x \star y \stackrel{def}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] q^{-k} y \quad \Longleftrightarrow \quad (x \star y)[n] \stackrel{def}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] y[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (37)$$

Convergența seriilor de mai sus nu este asigurată în cazul general, fără a impune restricții suplimentare semnalelor discrete care pot fi convolute. De exemplu, dacă semnalele discrete din definiția (37) sînt absolut sumabile ($x, y \in l^1(\mathbb{Z})$), atunci se poate arăta că produsul de convoluție este corect definit.

În condițiile în care această operație este corect definită (de exemplu, pentru secvențele absolut sumabile), ea verifică următoarele proprietăți principale:

1. Asociativitate: $x \star (y \star z) \equiv (x \star y) \star z$.
2. Comutativitate: $x \star y \equiv y \star x$.
3. Distributivitate față de adunarea secvențelor: $x \star (y + z) \equiv x \star y + x \star z$.
4. Existența elementului unitar: $x \equiv x \star \delta_0$.

Dacă se notează prin $\mathcal{S}_{d*}$ mulțimea (nevidă) a semnalelor discrete din $\mathcal{S}_d$ pentru care produsul de convoluție este corect definit, atunci $(\mathcal{S}_{d*}, +, \star, \cdot)$ este o algebră unitară comutativă.

De cele mai multe ori, în practică, se consideră că un SLID satisface încă de la început toate condițiile suficiente pentru a asigura buna definire a produsului de convoluție dintre intrare și funcția pondere. De aceea, aceste condiții nu vor mai fi amintite de fiecare dată cînd ne vom referi la operația de convoluție.

Pe baza proprietăților produsului de convoluție, se pot formula următoarele două caracterizări ale SLID:

1. Răspunsul ansamblului de două SLID *înseriate* (în cascadă), avînd secvențele pondere h , respectiv g , este identic cu al unui SLID avînd secvența pondere egală cu $h \star g$, indiferent de ordinea de înseriere.
2. Răspunsul ansamblului de două SLID *cuplate în paralel* (avînd secvențele pondere ca mai sus) este identic cu al unui sistem care are secvența pondere egală cu $h + g$.

Operația de convoluție dintre secvențele discrete de semnal este analoagă celei din cazul continuu, dar, în general, nu constituie o versiune "discretizată" și nici o aproximare a acesteia. Numai în cazul în care se operează cu semnale și sisteme corect eșantionate este posibil transferul operației de convoluție din cazul continuu în cel discret.

6 Stabilitate

Numeroase cercetări au fost dedicate (în cadrul Teoriei Sistemelor) proprietății de *stabilitate* a unui sistem dinamic. În capitolul de față, nu ne propunem să realizăm o trecere în revistă a acestor rezultate, demersul respectiv fiind deja inițiat și dezvoltat în alte lucrări. Ceea ce este interesant de relevat în contextul acestui curs se referă la transferul proprietății de *stabilitate* de la conceptul de ”sistem” la cel de ”semnal”, utilizând funcția pondere ca un semnal caracteristic asociat sistemului.

Definiția clasică a *stabilității* unui sistem dinamic este următoarea:

Definiția 6.1

Un sistem (dinamic) este **stabil** dacă verifică următoarea proprietate: intrări mărginite provoacă ieșiri mărginite.

Intuitiv, proprietatea de stabilitate exprimă capacitatea sistemului de a nu avea evoluții explozive, dacă intrările sale baleiază o gamă limitată de valori. Practic, un sistem stabil este capabil să urmărească intrarea cu care a fost stimulat, fără a dobîndi un comportament de tip diferit de al acesteia.

În cazul sistemelor liniare invariante la deplasări temporale, această definiție se poate exprima în mod echivalent la nivelul funcției pondere caracteristice asociate, așa cum arată următorul rezultat:

Propoziția 6.1

Un SLID avînd secvența pondere h este stabil dacă și numai dacă h este un semnal discret absolut sumabil ($h \in l^1(\mathbb{Z})$).

Demonstrație

Fie: $\mathcal{H} \stackrel{not}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]|$ (convergentă sau divergentă).

$\Rightarrow$ Presupunem că sistemul este stabil.

Vom demonstra că seria $\mathcal{H}$ este convergentă.

Pentru aceasta, să presupunem, prin absurd, contrariul, adică faptul că: $\mathcal{H} = \infty$.

Dacă S_h este suportul secvenței h , această presupunere conduce la relația următoare:

$$\mathcal{H} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| = \sum_{-k \in S_h} |h[-k]| = \infty . \quad (38)$$

În aceste condiții, se poate construi semnalul de intrare:

$$x[n] \stackrel{def}{=} \begin{cases} \frac{\overline{h[-n]}}{|h[-n]|} & , \quad -n \in S_h \\ 0 & , \quad -n \in \mathbb{Z} \setminus S_h \end{cases} ,$$

care va produce următoarea reacție a SLID (folosind relația de intrare-ieșire (36) de la pagina 20):

$$y[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h[n-k] = \sum_{-k \in S_h} \frac{\overline{h[-k]}}{|h[-k]|} h[n-k] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Se constată că această intrare este mărginită, căci: $|x[n]| \leq 1, \forall n \in \mathbb{Z}$. În consecință, ar trebui ca ieșirea sistemului să fie tot mărginită, deoarece el verifică proprietatea de stabilitate formulată în Definiția 6.1. Ori, folosind (38), se constată că:

$$y[0] = \sum_{-k \in S_h} \frac{\overline{h[-k]}}{|h[-k]|} h[-k] = \sum_{-k \in S_h} |h[-k]| = \mathcal{H} = \infty ,$$

ceea ce contrazice Definiția 6.1.

Astfel, h nu poate fi decît o secvență absolut sumabilă.

$\Leftarrow$ Presupunem că $\mathcal{H} < \infty$.

Vom verifica Definiția (6.1).

Fie x o secvență discretă oarecare, avînd valorile mărginite de numărul $M > 0$ (adică x verifică următoarea proprietate: $|x[n]| < M, \forall n \in \mathbb{Z}$). Dacă stimulăm sistemul cu această intrare, atunci se constată că ieșirea sa (dată de relația de intrare-ieșire (36)) verifică inegalitatea următoare:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h[n-k] \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x[k]| |h[n-k]| \leq M \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[n-k]| = M \mathcal{H},$$

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

care arată că sistemul este stabil.

□ _____ (Propoziția 6.1)↑

Acest rezultat sugerează extinderea conceptului de *stabilitate* la nivelul semnalelor discrete. Astfel, orice secvență discretă absolut sumabilă se va numi **semnal (discret) stabil**. Spațiul $l^1(\mathbb{Z})$ este format din toate semnalele stabile ale mulțimi $\mathcal{S}_d$. În mod analog, spațiul $L^1(\mathbb{Z})$ va conține toate semnalele (continue) stabile din $\mathcal{S}_c$.

Semnalele stabile (continue sau discrete) au o mare importanță în Prelucrarea Semnalelor, deoarece ele permit buna definire atît a operației de convoluție cît și a Transformării Fourier. Ele sînt, astfel, semnale pentru care informația frecvențială pe care o transportă poate fi reprezentată eficient.

7 Cauzalitate

Proprietatea de *cauzalitate* a unui sistem dinamic ocupă, de asemenea, un loc important în cercetarea din cadrul Teoriei Sistemelor. (Ea este asociată adesea conceptului de *sistem de fază minimă*.)

Definiția clasică a acestei proprietăți este următoarea:

Definiția 7.1

Un sistem dinamic este cauzal dacă verifică următoarea proprietate: ieșirea sa la orice moment de timp depinde numai de intrările la momente anterioare sau cel mult simultane celui moment considerat.

Această definiție exprimă faptul că evoluția unui sistem cauzal este determinată numai de către istoria anterioară a intrărilor și nu de felul cum vor evolua acestea în viitor. Evident, acest fapt este natural în practică, fenomenele fizice evoluînd pe baza unui determinism de tipul "cauză-efect" (de unde și numele proprietății).

Ca și în cazul stabilității, în cazul sistemelor liniare invariante la deplasări, proprietatea de cauzalitate se poate exprima echivalent printr-o caracteristică a funcției pondere asociate.

Propoziția 7.1

Un SLID avînd secvență pondere h este cauzal dacă și numai dacă suportul acesteia este nenegativ ($\text{Supp}(h) \subseteq \mathbb{Z}_+$).

Demonstrație _____ ↓

$\Rightarrow$ Presupunem că sistemul este cauzal.

Vom demonstra că $Supp(h) \subseteq \mathbb{Z}_+$.

Pentru aceasta, să presupunem, prin absurd, că există un moment negativ $k < 0$, astfel încât $h[k] = h[-|k|] \neq 0$.

În aceste condiții, se poate construi semnalul de intrare $x \equiv q^{+k}\delta_0 = \delta_{-k}$, care va produce următoarea reacție a SLID (folosind relația de intrare-ieșire (36) de la pagina 20):

$$y[n] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x[m] h[n-m] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_{-k}[m] h[n-m] = h[n+k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

În particular,

$$y[0] = h[k] = \underbrace{x[-k] h[k]}_1 + \underbrace{\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{-k\}} x[m] h[-m]}_0 \neq 0,$$

rezultat care arată că această valoare a ieșirii depinde de o valoare ulterioară a intrării, adică de $x[|k|]$. Definiția 7.1 este contrazisă, deci presupunerea inițială este absurdă. Atunci, pentru orice moment negativ $k < 0$, $h[k] = 0$.

$\Leftarrow$ Presupunem că $Supp(h) \subseteq \mathbb{Z}_+$.

Vom verifica Definiția (7.1).

Fie x o secvență discretă oarecare. Dacă stimulăm sistemul cu această intrare, atunci se constată că ieșirea sa (dată de relația de intrare-ieșire (36)) verifică egalitatea:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k] = \\ &= h[0] x[n] + h[1] x[n-1] + h[2] x[n-2] + \dots, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

care arată că sistemul este cauzal.

□ _____ (Propoziția 7.1)↑

În general, sistemele cauzale au secvențe pondere de forma: $h u_0$, unde u_0 este treapta unitară discretă (23) (vezi pagina 15).

Această formă a funcției pondere este similară *funcțiilor original* din cadrul Teoriei Transformatei Laplace.

Propoziția 7.1 permite extinderea conceptului de cauzalitate peste mulțimea semnalelor discrete. Astfel, orice semnal discret cu suport nenegativ se va numi **cauzal**. Prototipul secvențelor cauzale este treapta unitară discretă, u_0 .

Ca urmare a acestei definiții, un semnal discret oarecare $x \in \mathcal{S}_d$ posedă două componente remarcabile:

1. componenta *cauzală*: $x_c \stackrel{def}{=} \{x[n] u_0[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$;
2. componenta *anticauzală*: $x_{\bar{c}} \stackrel{def}{=} \{x[n] u_0[-n-1]\}_{n \in \mathbb{Z}}$,

în raport cu care el se exprimă în forma:

$$x \equiv x_c + x_{\bar{c}}. \quad (39)$$

Dacă o secvență discretă are componenta anticauzală nebanală, atunci ea se numește *necauzală*. Dacă o secvență necauzală are componenta cauzală banală, atunci ea se numește *anticauzală*.

8 Semnale și sisteme descrise prin ecuații cu diferențe

8.1 Stabilitatea și cauzalitatea sistemelor descrise prin ecuații cu diferențe

Unul dintre cele mai utilizate modele matematice de sistem dinamic liniar este cel descris prin ecuații liniare cu diferențe. Aceasta, deoarece el permite introducerea conceptului de *funcție de transfer*, exprimat fie cu ajutorul operatorului de deplasare temporală, fie - mai comod - cu ajutorul Transformatei $\mathcal{Z}$. (În cadrul acestui curs, acest concept este evitat, el fiind prezentat și utilizat în contextul altor discipline, cum ar fi: Teoria Sistemelor, Ingineria Reglării Automate sau Identificarea Sistemelor.)

În legătură acest tip de model matematic, ne propunem să ilustrăm modul în care el poate reflecta proprietățile de stabilitate și cauzalitate (prezentate în capitolele anterioare).

Definiția 8.1

Se numește **ecuație liniară cu diferențe** (ELD), avînd ordinele $N \in \mathbb{N}$ și $M \in \mathbb{N}$, următoarea expresie:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (40)$$

unde: $\{a_k\}_{k \in \overline{0,N}} \subset \Gamma$ și $\{b_l\}_{l \in \overline{0,M}} \subset \Gamma$ sînt coeficienții constanți ai ecuației, iar $x, y \in \mathcal{S}_d$.

În această ecuație, secvența necunoscută este, de regulă, y , iar a_0 este întotdeauna nenul. De altfel, relația (40) este utilizată adesea pentru a caracteriza comportamentul unui sistem liniar avînd intrarea x și ieșirea y . În acest caz, operatorul H nu mai este definit explicit, ci implicit, prin intermediul relației (40).

Modelul ELD poartă diverse denumiri (preluate din Identificarea experimentală a Sistemelor), în funcție de structura ecuației (40):

- Model de tip ARMA (AutoRegresiv și de Medie Alunecătoare), dacă:
 - $N, M \in \mathbb{N}^*$;
 - x este un zgomot alb;
 - a_0, a_1, b_0 și b_1 sînt nenule.
- Model de tip AR (AutoRegresiv), dacă:
 - $N \in \mathbb{N}^*, M = 0$;
 - x este un zgomot alb;
 - a_0 și a_1 sînt nenule, iar $b_0 = 1$.
- Model de tip MA (Medie Alunecătoare), dacă:
 - $N = 0, M \in \mathbb{N}^*$;
 - x este un zgomot alb;
 - $a_0 = 1$, iar b_0 și b_1 sînt nenule.
- Model de tip ARX (AutoRegresiv cu control eXogen), dacă:
 - $N \in \mathbb{N}, M \in \mathbb{N}^*$;
 - $a_0 \neq 0, b_0 = 0$ și $b_1 \neq 0$.

De cele mai multe ori, pentru a descrie cît mai bine comportamentul unui sistem liniar prin intermediul unei ELD, este necesară o precizare nu numai a coeficienților acesteia, ci și a condițiilor de lucru exprimate printr-o serie de restricții impuse secvențelor de intrare și/sau ieșire. Aceste restricții sînt furnizate de aspecte practice, adică de anumite caracteristici ale procesului real, care trebuie să se regăsească și în modelul său. Exemplul următor arată ce se poate întîmpla dacă modelul descris prin intermediul unei ELD nu satisface o anumită condiție de *cauzalitate*: ieșirea nu mai este determinată în mod unic de către intrare; în plus, *stabilitatea* sistemului este caracterizată în mod diferit pentru fiecare dintre soluții.

Exemplu

- Fie următoarea ELD:

$$y[n] - a y[n-1] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Se poate verifica ușor că dacă intrarea este de forma: $x = \{a^n \delta_0[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, atunci există două tipuri de soluții ale acestei ecuații:

- o soluție cauzală: $y = \{a^n u_0[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$;
- o soluție anticauzală: $y = \{-a^n u_0[-n-1]\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Aceasta se datorează ambiguității de exprimare a impulsului unitar în termeni de treaptă unitară (vezi relațiile (24), de la pagina 15).

Stabilitatea fiecărei soluții de mai sus este asigurată pentru valori ale parametrului a total opuse: $|a| < 1$ – în cazul soluției cauzale și $|a| > 1$ – în cazul soluției anticauzale.

Notă

- Anumite rezultate din Matematică arată că, în condiții foarte generale, o ELD nu are soluție unică. Revenind la exemplul anterior, acest fapt se poate constata cu ușurință, căci, indiferent de intrarea x , dacă y_0 este o soluție a acestei ecuații, atunci $y_0[n] + C a^n$ (unde $C \in \Gamma$ este o constantă) verifică aceeași ecuație. Aceasta se datorează unui rezultat binecunoscut din Teoria Ecuațiilor cu Diferențe, potrivit căruia orice soluție a ecuației omogene asociate:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (41)$$

adunată la o soluție particulară a ecuației inițiale conduce la o altă soluție a acesteia.

Din acest cadru matematic general, se poate extrage un set de restricții pe care trebuie să le satisfacă modelul ELD pentru a putea fi adecvat unui SLID. De exemplu, se poate preciza un set de condiții inițiale de forma:

$$Supp(x) \subseteq \overline{n_0, +\infty} \implies Supp(y) \subseteq \overline{n_0, +\infty},$$

care exprimă proprietatea de cauzalitate. În acest caz, ecuația (40) se poate pune sub o formă echivalentă, care să evidențieze mai bine cauzalitatea:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{l=0}^M \frac{b_l}{a_0} x[n-l], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (42)$$

Această relație recursivă dintre ieșirile și intrările sistemului arată cum se poate evalua ieșirea curentă plecînd de la cele mai recente valori ale intrării și ieșirii, dar anterioare sau simultane momentului curent. Plecînd de la condițiile inițiale stipulate mai sus, egalitatea (42) constituie practic un program de calcul iterativ al ieșirii sistemului, pe măsură ce noi date ale intrării stimulează sistemul.

Un caz particular interesant de ELD este cel în care $N = 0$. Ieșirea este evaluată direct din intrare, după relația următoare:

$$y[n] = \sum_{l=0}^M \frac{b_l}{a_0} x[n-l], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (43)$$

Această relație descrie comportamentul unui SLID de tip FIR, funcția pondere identificându-se cu:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & , \quad n \in \overline{0, M} \\ 0 & , \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \overline{0, M} \end{cases}$$

(datorită comutativității operației de convoluție). Acest tip de sistem este cel mai adecvat pentru a exprima proprietatea de cauzalitate.

Sistemele de tip IIR nu pot fi caracterizate atât de simplu ca și cele de tip FIR. Întotdeauna, în cazul IIR, $N \geq 1$, adică ieșirea curentă depinde cel puțin de o valoare a sa anterioară. Cu toate acestea, stabilitatea sistemului este adesea exprimată cu ajutorul acestui tip de model. Se știe că pentru a testa existența soluțiilor stabile ale unei ELD, se evaluează rădăcinile *polinomului său caracteristic*, adică a polinomului exprimat în termeni de operatori de întârziere ca mai jos:

$$\mathcal{P}(q^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_N q^{-N} = a_N (q^{-1} - z_1) \dots (q^{-1} - z_N) . \quad (44)$$

Astfel, în cazul soluțiilor anticauzale, ele sînt și stabile pentru rădăcini $z_1, \dots, z_N$ incluse în discul unitar din planul complex, $\mathcal{U}$. Soluțiile cauzale pot fi stabile, dacă, din contră, rădăcinile lui $\mathcal{P}$ sînt în afara discului unitar și nu aparțin frontierei sale ($\partial\mathcal{U}$).

8.2 Reprezentarea prin grafuri de semnale a ecuațiilor cu diferențe

Revenind la Definiția 8.1, expresia generală a ecuației (40) poate fi reprezentată cu ajutorul unui graf de semnale ca în Figura 4. Ecuația (40) a fost normalizată prin împărțirea cu a_0

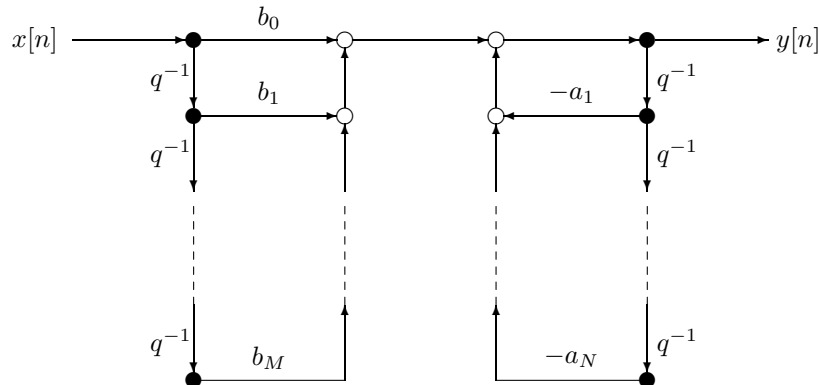


Figura 4: Reprezentarea unui sistem descris de o ecuație cu diferențe utilizînd graful de semnale.

(totdeauna nenul) și renotarea coeficienților:

$$y[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

În Figura 4, fiecare arc al grafului ce conține o etichetă indică fie multiplicarea cu o constantă (în cazul arcelor etichetate cu simbolurile coeficienților ecuației cu diferențe), fie aplicarea unei întârzieri (în cazul arcelor purtînd eticheta " q^{-1} "). Aceste operații se aplică semnalului aflat la originea arcului. Orice arc fără etichetă indică multiplicarea semnalului de la origine cu constanta unitară, adică transmiterea lui neperturbată. Dacă într-un nod al grafului sosesc mai multe arce, semnalul asociat originii arcului ce pleacă din acel nod este egal, prin convenție, cu suma semnalelor furnizate de arcele ce sosesc. Aceste noduri au fost simbolizate diferit de nodurile din care pleacă mai multe arce și care indică o distribuie a semnalului de intrare pe mai multe căi.

Această reprezentare este utilă pentru a ilustra modul cum poate fi implementat un algoritm numeric ce operează cu semnale discrete. Este cazul, de exemplu, al algoritmilor aferenți calculului valorilor Transformatei Fourier Discrete.

Pentru a proiecta un program de calcul al semnalului de ieșire, y , trebuie luate în considerare o serie de rezultate referitoare la grafurile de semnale. Aceste rezultate oferă posibilitatea simplificării structurii din Figura 4, fapt care conduce la micșorarea complexității de calcul a algoritmului proiectat. Este vorba, în principal, despre Teoremele lui Tellegen și de transpoziție ([8]), potrivit cărora schema anterioară este echivalentă cu cea din Figura 5. Principalul avantaj

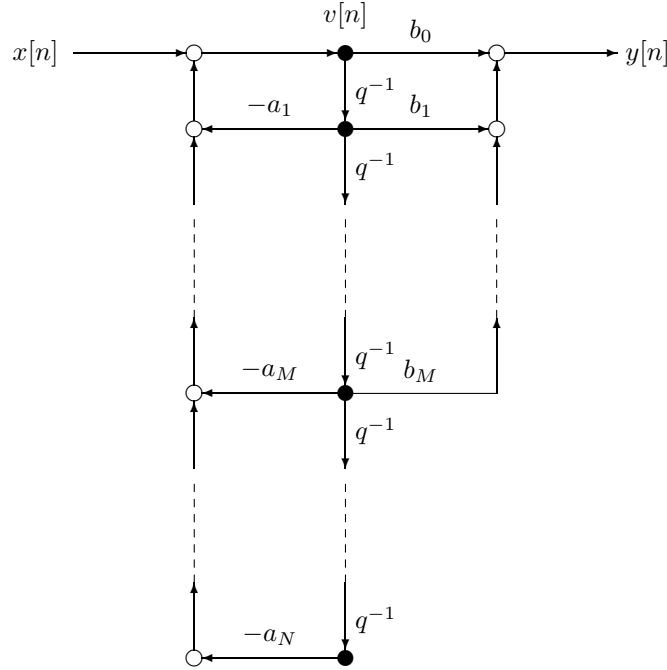


Figura 5: Schema eficientă de implementare a calculului unui semnal determinat de o ecuație cu diferențe.

al acestei scheme de implementare îl constituie reducerea numărului de blocuri de întârziere de la $(M + N)$ la $\max\{M, N\}$ (egal cu N în această figură). O întârziere odată aplicată este automat memorată pentru ambele părți ale schemei (stîngă și dreaptă). În schema din figura precedentă, există o redundanță la nivelul blocurilor de întârziere, eliminată aici.

Semnalul intermediar (v), introdus în nodul central, poate fi utilizat în cadrul algoritmului pentru a separa calculul părții stîngi de cel al părții drepte. De exemplu, să presupunem că este necesară evaluarea unei anumite valori a lui y – să zicem $y[K]$, unde K este mult mai mare decît ordinele N și M ale ecuației. Atunci este suficient să se utilizeze repetat numai partea stîngă a schemei pentru a calcula cele K valori ale lui v , să se memoreze ultimele M valori ale acestuia și, în final, să se folosească o singură dată multiplicările și adunările din partea dreaptă pentru a evalua $y[K]$. Această abordare aduce o scădere a timpului de calcul al algoritmului (prin scăderea numărului de operații efectuate), deci o creștere a eficienței sale. Subliniem că acest rezultat nu poate fi obținut cu schema din Figura 4.

9 Reprezentarea sistemelor discrete în domeniul frecvenței

Descrierea evoluției unui semnal este o problemă importantă în Teoria Semnalelor. (Problema specifică a Prelucrării Semnalelor este concentrată, de fapt, în jurul acestei probleme.) În general, pentru o clasă destul de largă de semnale uzuale, această descriere se efectuează relativ la două domenii: cel al timpului și cel al frecvenței. Aparent, cele două domenii par necorelate, dacă ne referim la semnal ca o funcție de timp. În realitate, însă, între ele există numeroase corelații de dualitate. O astfel de corelație este exprimată de Principiul de

incertitudine: dacă informația de tip temporal este ”episodică” (adică energia semnalului se concentrează pe o durată finită), atunci informația de tip frecvențial este ”persistentă” (adică energia semnalului se răspîndește pe un spectru infinit de frecvențe).

În cazul secvențelor discrete de semnal, descrierea comportamentului lor temporal este adesea modelată cu ajutorul SLID. Operația caracteristică a oricărui SLID este convoluția (așa cum am arătat în capitolele anterioare). Aceasta unifică reprezentarea în timp a secvenței de intrare și de ieșire ca o sumă ponderată de impulsuri unitare deplasate. Răspunsul la impuls (funcția pondere) devine, astfel, principalul instrument de descriere a evoluției în timp a semnalelor ce se transformă în cadrul unui SLID. Cu toate acestea, în afara impulsului unitar, există și alte tipuri de semnale care pot furniza descieri ale unui SLID. Dintre acestea, o importanță specială o au semnalele discrete sinusoidale sau exponențiale complexe, care conduc la *reprezentarea SLID în domeniul frecvenței*. Această caracteristică a semnalelor exponențiale complexe se datorează următoarei proprietăți fundamentale a SLID (care va fi demonstrată în acest capitol):

- *Răspunsul unui SLID real și stabil la o intrare sinusoidală este de aceeași frecvență cu a intrării, dar de amplitudine și fază determinate de sistem.*

Comportamentul în frecvență al unui SLID este descris prin intermediul unui nou concept, numit *răspuns în frecvență*. Pentru a-l defini, se pleacă de la un SLID avînd secvența pondere h stabilă. Acesta este stimulată la intrare cu semnalul următor:

$$x[n] = e^{j\omega n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Aici, j este numărul imaginar unitar ($j^2 = -1$), iar $\omega \in \mathbb{R}$ este un număr fixat, numit *pulsatie*. Ieșirea sistemului corespunzătoare acestei intrări este:

$$y[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] e^{+j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] e^{-j\omega k}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dacă definim entitatea:

$$H(e^{j\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] e^{-j\omega k}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

atunci relația anterioară se poate exprima în mod echivalent prin:

$$y[n] = e^{j\omega n} H(e^{j\omega}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (45)$$

Această nouă relație descrie schimbările suferite de amplitudinea și faza exponențialei complexe în funcție de pulsația ω . Buna definire a acestor relații este asigurată dacă h este o secvență stabilă, deoarece:

$$|H(e^{j\omega})| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k] e^{-j\omega k}| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| < \infty, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Practic, se observă că, în acest caz, operația de convoluție este de asemenea corect definită și, aparent, pulsația intrării se regăsește în ieșire modificată.

Definiția 9.1

Entitatea $H(e^{j\omega})$ definită prin:

$$H(e^{j\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] e^{-j\omega k}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (46)$$

se numește **răspuns în frecvență** al SLID avînd funcția pondere h .

În general, răspunsul în frecvență este o cantitate complexă, deci are atît o parte reală, cît și una imaginară, notate astfel:

$$\begin{cases} H_R(e^{j\omega}) = \text{Re}\{H(e^{j\omega})\} \\ H_I(e^{j\omega}) = \text{Im}\{H(e^{j\omega})\} \end{cases}.$$

Totodată, ca orice număr complex, răspunsul în frecvență are o amplitudine (magnitudine), $|H(e^{j\omega})|$ și un argument (o fază), $\varphi_h(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \arg(H(e^{j\omega}))$.

Cu aceste notații, răspunsul în frecvență admite următoarea exprimare:

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + j H_I(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi_h(\omega)}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Această relație sugerează utilizarea amplitudinii și a fazei pentru descrierea comportamentului în frecvență a unui SLID. Pentru acest tip de descriere, răspunsul în frecvență al sistemului are aceeași importanță ca și răspunsul său la impulsul unitar, utilizat pentru descrierea comportamentului temporal. De regulă, cele două tipuri de descriere sînt ilustrate cu ajutorul următoarelor reprezentări grafice:

- graficul în timp al răspunsului la impulsul unitar (adică al secvenței pondere);
- graficul în frecvență (pulsatie) al amplitudinii răspunsului în frecvență;
- graficul în frecvență (pulsatie) al fazei răspunsului în frecvență.

Răspunsul în frecvență are următoarele proprietăți imediate:

- $H(e^{j\omega})$ este o funcție analitică pe cercul unitar $\partial\mathcal{U}$ din planul complex (deoarece se dezvoltă în serie de puteri ale lui $e^{j\omega}$, pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$).
- $H(e^{j\omega})$ privită ca funcție de ω este 2π -periodică.

Cu aceste definiții și notații, rezultatul care urmează arată că, împotriva aparenței sugerată de relația (45), proprietatea SLID enunțată la începutul capitolului este totuși adevărată.

Propoziția 9.1

Fie un SLID caracterizat de funcția pondere reală și stabilă $h \in l^1(\mathbb{Z})$. Atunci răspunsul său evaluat pentru o intrare armonică de pulsație $\omega \in \mathbb{R}$ este tot o armonică cu aceeași pulsație, dar avînd amplitudinea și faza determinate de către secvența h .

Demonstrație _____ ↓

Pentru a ușura exprimările matematice (dar fără a diminua generalitatea), vom considera că semnalul de intrare al SLID din enunț este o armonică de forma:

$$x[n] \stackrel{\text{def}}{=} A \cos(\omega n + \varphi) = \underbrace{\frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega n}}_{x_+[n]} + \underbrace{\frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega n}}_{x_-[n]}, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

unde $A > 0$ este amplitudinea și $\varphi \in \mathbb{R}$ este faza intrării (constante în raport cu pulsația curentă, ω).

Dacă ținem cont de relația (45) de mai sus, și de faptul că sistemul este liniar, atunci răspunsul sistemului la intrarea x_+ este următorul:

$$y_+[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega n} H(e^{j\omega}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Analog, răspunsul sistemului corespunzător intrării x_- se poate evalua după cum urmează:

$$\begin{aligned} y_-[n] &= \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] e^{+j\omega k} e^{-j\omega n} = \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] e^{+j\omega k} = \\ &= \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega n} \overline{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h[k]} e^{-j\omega k}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ținînd cont de faptul că secvența pondere a sistemului este reală, rezultă că $h \equiv \bar{h}$ și, în consecință:

$$\overline{H(e^{j\omega})} = H(e^{-j\omega}), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Aceasta permite exprimarea lui y_- în forma:

$$y_-[n] = \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega n} \overline{H(e^{j\omega})}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

În final, răspunsul sistemului la armonica x este dat de următoarele relații:

$$\begin{aligned} y[n] &= y_+[n] + y_-[n] = \frac{A}{2} \left[e^{j(\omega n + \varphi)} H(e^{j\omega}) + e^{-j(\omega n + \varphi)} \overline{H(e^{j\omega})} \right] = \\ &= \frac{A}{2} |H(e^{j\omega})| \left[e^{j(\omega n + \varphi + \varphi_h(\omega))} + e^{-j(\omega n + \varphi + \varphi_h(\omega))} \right] = \\ &= A |H(e^{j\omega})| \cos(\omega n + \varphi + \varphi_h(\omega)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Prin urmare, ieșirea sistemului este tot o armonică de aceeași pulsație cu a intrării, dar avînd amplitudinea egală cu $A |H(e^{j\omega})|$ și faza egală cu $(\varphi + \varphi_h(\omega))$.

□ _____ (Propoziția 9.1)↑

Această propoziție arată, în plus, felul cum sistemul modifică parametrii inițiali ai armonicii: amplitudinea originală este modulată de magnitudinea răspunsului în frecvență, iar la faza originală se adaugă argumentul răspunsului în frecvență.

10 Tipuri de Transformări clasice ale lui Fourier

Reprezentarea în frecvență a sistemelor dinamice a condus în mod natural la definirea unui instrument care să descrie corelația existentă între domeniul timpului și cel al frecvenței pentru semnalele uzuale. Este vorba despre *Transformarea (lui) Fourier* (TF), care constituie un operator de energie constantă, inversabil, exprimînd dualitatea existentă între cele două tipuri de informații transportate de un semnal stabil.

În capitolele precedente, au fost făcute numeroase referiri la această transformare, fără a fi, însă, definită explicit. Acest capitol este dedicat prezentării succinte a tipurilor clasice uzuale de TF. Nu vor fi detaliate demonstrațiile unor rezultate fundamentale din cazul continuu, aceasta depășind obiectivul cursului. Chiar și în cazul discret, prezentarea se va reduce la o enumerare a TF, detalii corespunzătoare suplimentare fiind prezentate într-o lucrare viitoare.

TF a fost una dintre primele transformări utilizate destinate a preciza conținutul în frecvență al unui semnal. Există mai multe definiții clasice ale acestei transformări, dar în acest cadru, vor fi prezentate succint numai 4 dintre acestea, cele mai importante:

1. Transformarea Continuă a lui Fourier pentru semnale continue și stabile (TCFC)
2. Transformarea Continuă a lui Fourier pentru semnale discrete și stabile (TCFD)
3. Seria Fourier Discretă pentru semnale discrete și periodice (SFD).
4. Transformarea Fourier Discretă pentru semnale discrete de suport finit (TFD).

10.1 Transformarea Continuă a lui Fourier pentru semnale continue și stabile (TCFC)

Dacă pentru Teoria Sistemelor Continue Transformata Laplace constituie instrumentul principal de lucru, pentru Teoria Semnalelor Continue, acest instrument este *Transformata Fourier Continuă*.

Cadrul matematic de lucru în Teoria Semnalelor Continue este conturat de proprietățile spațiilor lui **Lebesgue**, de tip **Banach**: $L^p(\mathcal{T})$ ($p \in \mathbb{N}^*$), definite în Capitolul 2. Funcțiile din $L^p(\mathcal{T})$ nu sînt toate mărginite, în sensul strict matematic al definiției acestei proprietăți.

Condiția de mărginire este de dorit în analiza de semnal, ea nefiind, în același timp și restrictivă; majoritatea semnalelor din natură sînt, totuși, mărginite. Elementele spațiilor de mai sus sînt "aproape mărginite", sau, în termeni matematici – *mărginite aproape peste tot* ("apt"), în sensul că mulțimea momentelor în care un astfel de semnal este nemărginit are măsură **Lebesgue** nulă. Aceasta corespunde posibilității apariției unor valori accidentale nemărginite ale semnalelor, la anumite momente, mulțimea acestor momente fiind, totuși, neglijabilă în raport cu domeniul de definiție. Dintre toate spațiile amintite, sînt interesante $L^1(\mathcal{T})$ (spațiul semnalelor stabile) și $L^2(\mathcal{T})$ (spațiul semnalelor de energie finită).

Studiul acestor semnale se poate efectua cu ajutorul noțiunii de *spectru în frecvență*, care arată distribuția de putere a unui anumit semnal în raport cu frecvențele componente. Integrala acestei distribuții de putere este *energia spectrală* a semnalului. Aceste noțiuni se exprimă matematic cu ajutorul Transformatei Fourier Continue, pe care o vom defini în cele ce urmează. Pentru aceasta, vom pleca de la o teoremă importantă de Analiză Matematică, datorată lui P. Dirichlet și J. Fourier (a cărei demonstrație este prezentată în [9]).

Teorema 10.1 (P. Dirichlet, J. Fourier)

Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avînd proprietățile:

- a) *f este periodică, de perioadă $2T$;*
- b) *f este continuă pe porțiuni și are derivate laterale finite chiar și în punctele de discontinuitate;*
- c) *pentru fiecare moment $t \in \mathbb{R}$, se definește următoarea prelungire a lui f , care ia valori medii în punctele de discontinuitate:*

$$\tilde{f}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} .$$

Atunci f permite următoarea "reprezentare armonică":

$$\tilde{f}(t) \stackrel{PC}{=} a_0 + \sum_{k \geq 1} \left(a_k \cdot \cos \frac{k\pi t}{T} + b_k \cdot \sin \frac{k\pi t}{T} \right) , \quad \forall t \in \mathbb{R} , \quad (47)$$

unde seria numerică este punctual convergentă la $\tilde{f}$, iar coeficienții care intervin sînt definiți de următoarele relații:

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) dt \\ a_k & = & \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} f(t) \cdot \cos \frac{k\pi t}{T} dt \quad \forall k \geq 1 \\ b_k & = & \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} f(t) \cdot \sin \frac{k\pi t}{T} dt \quad \forall k \geq 1 . \end{array} \right. \quad (48)$$

În contextul acestei teoreme, se observă că $\tilde{f} \stackrel{\text{apt}}{=} f$, deoarece f este continuă pe porțiuni. Astfel, între $\tilde{f}$ și f nu se mai face, practic, nici o deosebire. Termenul de *reprezentare armonică* provine de la denumirea de *armonică de pulsație* $\Omega \in \mathbb{R}$, dat semnalului:

$$A(\Omega, t) \stackrel{\text{def}}{=} a(\Omega) \cdot \cos \Omega t + b(\Omega) \cdot \sin \Omega t \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Acesta poate fi exprimat în forma restrînsă:

$$A(\Omega, t) = \mathcal{P}(\Omega) \cdot \sin (\Omega t + \varphi(\Omega)) \quad \forall t \in \mathbb{R} ,$$

unde:

- $\mathcal{P}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^2(\Omega) + b^2(\Omega)}$ se numește ”puterea armonice de pulsație Ω ”;
- $\varphi(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \arctg \left(\frac{b(\Omega)}{a(\Omega)} \right)$ se numește ”faza armonice de pulsație Ω ”.

Practic, Teorema 10.1 arată că orice semnal continuu uzual, periodic, poate fi aproximat cu o sumă de *componente armonice* de diferite puteri și pulsații. Sistemul de armonice componente ale semnalului operează cu o mulțime discretă de pulsații constante în raport cu timpul, determinate de perioada semnalului: $\left\{ \frac{k\pi}{T} \right\}_{k \in \mathbb{N}^*}$.

În plus, această teoremă arată că familia de funcții armonice:

$$\mathcal{H}_T \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sin \frac{k\pi}{T} t \right\}_{k \in \mathbb{N}^*} \cup \left\{ \cos \frac{k\pi}{T} t \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (49)$$

este un sistem de generatori ai spațiului Hilbert de semnale continue, reale și $2T$ -periodice. În acest spațiu, produsul scalar este definit prin:

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) g(t) dt .$$

Familia $\mathcal{H}_T$ este, mai mult, chiar ortogonală, după cum o demonstrează următoarele relații:

$$\begin{cases} \left\langle \sin \frac{p\pi}{T} t, \sin \frac{q\pi}{T} t \right\rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \sin \frac{p\pi}{T} t \sin \frac{q\pi}{T} t dt = \delta_0[p - q], & \forall p, q \in \mathbb{N}^* \\ \left\langle \cos \frac{p\pi}{T} t, \cos \frac{q\pi}{T} t \right\rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \cos \frac{p\pi}{T} t \cos \frac{q\pi}{T} t dt = \delta_0[p - q], & \forall p, q \in \mathbb{N} \\ \left\langle \sin \frac{p\pi}{T} t, \cos \frac{q\pi}{T} t \right\rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \sin \frac{p\pi}{T} t \cos \frac{q\pi}{T} t dt = 0, & \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N} . \end{cases} \quad (50)$$

Datorită acestor relații, familia $\mathcal{H}_T$ este o bază ortogonală, numită *baza armonică (canonică) a lui Fourier*. Teorema 10.1 este unul dintre primele rezultate de analiză (relațiile (48)) și sinteză (relațiile (47)) ale semnalelor, utilizând funcții simple și cunoscute, organizate sub forma unei baze ortogonale a spațiului de lucru.

Deoarece condiția de periodicitate este prea restrictivă, matematicianul și fizicianul francez **Joseph Fourier**, căruia i se datorează, de fapt, interpretarea anterioară, a considerat că orice funcție este periodică, putînd exista funcții cu perioada infinită. El a demonstrat următorul rezultat fundamental:

Teorema 10.2 (J. Fourier)

Fie $f \in L^1(\mathbb{R})$ derivabilă pe porțiuni, cu derivate laterale finite. Atunci, între f și $\tilde{f}$ (de mai sus) se poate stabili următoarea relație integrală:

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{jy(t-x)} dx dy \quad \forall t \in \mathbb{R} . \quad (51)$$

Pe baza acestor două rezultate, se poate enunța următoarea definiție:

Definiția 10.1

Se numește **Transformare Fourier Continuă** operatorul:

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathbb{R}, \mathcal{C}) \\ f & \mapsto & \mathcal{F}(f) \stackrel{\text{not}}{=} \mathcal{F}f \stackrel{\text{not}}{=}} \hat{f} \end{array} \right. ,$$

unde:

$$\left[\begin{array}{lcl} \hat{f} : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{C} \\ \Omega & \mapsto & \hat{f}(\Omega) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-j\Omega t} dt \end{array} \right.$$

este **Transformata Fourier Continuă** a semnalului continuu stabil, f .

Modulul $|\hat{f}|$ se mai numește și *putere spectrală*, iar graficul său în funcție de pulsație se numește *spectru*. (Uneori, spectrul este considerat a fi graficul pătratului lui $|\hat{f}|$.) El arată distribuția energiei semnalului (definită în Capitolul 2) în domeniul frecvenței. Valorile de pe ordonata graficului puterii spectrale se numesc *linii spectrale*. Înălțimea unei linii spectrale corespunzătoare unei anumite pulsații Ω este chiar *puterea armonice de pulsație Ω* , care intră în componența semnalului f , concept deja definit mai sus.

Notă

- Pentru semnalele nedeterminate staționare, analogul puterii spectrale este *densitatea spectrală de putere*, definită astfel:

$$\phi_f(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(r_f)(\Omega) , \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}$$

(proporțională cu TF a funcției de autocorelație (11), (pagina 7)). Se poate arăta ușor că:

$$|\hat{f}(\Omega)|^2 = \phi_f(\Omega) , \quad \forall \Omega \in \mathbb{R} .$$

Proprietatea de mai sus sugerează atât similitudinea dintre celor două noțiuni, cât și introducerea conceptului de *energie spectrală* a unui semnal f :

$$\mathcal{E}_s(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int \phi_f(\Omega) d\Omega = \int |\hat{f}(\Omega)|^2 d\Omega .$$

Prin convenție, vom nota prin " η " cantitatea " $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ " care apare în definiția de mai sus. Rațiunea pentru care a fost introdus factorul η în această definiție este următoarea: datorită lui, se poate exprima Principiul lui Parseval de conservare a energiei la trecerea între domeniile "timp" și "frecvență" în forma simetrică de mai jos:

$$\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}_s(f) \iff \int |f(t)|^2 dt = \int |\hat{f}(\Omega)|^2 d\Omega . \quad (52)$$

Capacitatea TF de a codifica și conserva energia semnalului studiat este una dintre cele mai importante proprietăți a acesteia. Egalitatea lui Parseval (52) este o relație de unificare a celor două tipuri de energii: cea "temporală" (dată de norma semnalului studiat) și cea "spectrală". Este absolut natural să ne imaginăm că semnalul inițial (temporal) și cel transformat (frecvențial) posedă aceeași energie, aceasta fiind, de fapt, o informație care trebuie să se transfere nealterată între cele două domenii de studiu. O alterare a energiei printr-un astfel de transfer conduce în mod evident la o pierdere din informația transportată de semnal. În practică, Principiul lui Parseval este verificat cel mai bine de către semnalele esențial localizate în timp și frecvență, despre care am mai amintit în Capitolul 2.

Datorită modului cum a fost definit, operatorul Fourier $\mathcal{F}$ este liniar peste spațiul semnalelor stabile. În plus, TF este, așa cum se poate observa ușor, o funcție analitică (indefinit derivabilă).

Între Teorema 10.2 (Joseph Fourier) și Definiția 10.1 există o corelație intimă. Această corelație conduce la recuperarea semnalului inițial din TF a sa, după următoarea *formulă de inversiune*:

$$\tilde{f}(t) = \eta^2 \int e^{+j\Omega t} \left(\int f(\tau) e^{-j\Omega \tau} d\tau \right) d\Omega = \eta \int \hat{f}(\Omega) e^{+j\Omega t} d\Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (53)$$

Ultima integrală de mai sus se numește **Transformată Fourier Inversă**. Relativ la această formulă, trebuie făcută observația că identificarea a două semnale stabile se face după regula "apt" (amintită anterior). De fapt, spațiul semnalelor stabile, $L^1(\mathbb{R})$, se dotează cu relația de echivalență "apt" și, apoi, prin convenție, se consideră că notația " $L^1(\mathcal{T})$ " desemnează mulțimea claselor de echivalență corespunzătoare relației de echivalență și nu mulțimea inițială.

Cu aceste observații, se poate specifica perechea de relații duale care urmează:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(f)(\Omega) & \stackrel{def}{=} \eta \int f(t) e^{-j\Omega t} dt \stackrel{not}{=} \hat{f}(\Omega) \\ \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(t) & \stackrel{def}{=} \eta \int \hat{f}(\Omega) e^{+j\Omega t} d\Omega \stackrel{apt}{=} f(t) \end{cases} \quad (54)$$

Simetria exprimării celor două Transformări Fourier duale (directă ($\mathcal{F}$) și inversă ($\mathcal{F}^{-1}$)) justifică încă o dată utilizarea cantității " η " din definiția transformatei directe.

Dualitatea dintre cele două formule nu are numai un aspect matematic. În practica Prelucrării de Semnale, se consideră că Transformarea Fourier directă este un instrument de trecere de la studiul comportării unui semnal în timp, la cel al comportării sale în frecvență (pulsatie). Revenirea din domeniul frecvențelor la cel al timpului se realizează cu transformarea inversă. Acest instrument devine și mai puternic, prin completarea spațiului semnalelor stabile cu impulsul lui Dirac, (δ_0). Astfel, se pot scrie următoarele relații convenționale remarcabile:

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\delta_0)(\Omega) & \stackrel{def}{=} \eta \int \delta_0(t) e^{-j\Omega t} dt \stackrel{not}{=} \hat{\delta}_0(\Omega) = \eta \\ \mathcal{F}^{-1}(\hat{\delta}_0)(t) & \stackrel{def}{=} \eta \int \hat{\delta}_0(\Omega) e^{+j\Omega t} d\Omega = \delta_0(t) \end{cases} \quad (55)$$

De aici, rezultă o nouă relație convențională, extrem de uzitată și atribuită lui Poisson:

$$\int e^{+j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{\eta^2} \delta_0(t) = 2\pi \delta_0(t). \quad (56)$$

10.2 Transformarea Continuă a lui Fourier pentru semnale discrete și stabile (TCFD)

Teoria Semnalelor Discrete constituie cel mai important instrument din Prelucrarea Semnalelor, datorită orientării problemelor și rezultatelor ei spre aspecte de natură practică și algoritmică.

Semnalele digitale sînt secvențe discrete de numere din corpul $\Gamma \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, deci mulțimea momentelor, $\mathcal{T}$ (Definiția 2.1, (pagina 2)), este o submulțime cel mult numărabilă a lui $\mathbb{R}$. Pentru a pune în evidență indexarea de tip discret a elementelor secvenței, se consideră, prin convenție, că $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{Z}$. Tot prin convenție, domeniul de definiție al unui astfel de semnal se extinde la mulțimea numerelor întregi, $\mathbb{Z}$, prin completare cu zerouri.

În cazul semnalelor discrete, beneficiem de mai multe instrumente de descriere a comportamentului lor în frecvență. Unul dintre ele este sugerat de Transformata Fourier Continuă aplicată semnalelor continue (descrisă anterior) și construcția lui se bazează pe extinderea domeniului de definiție al operatorului Fourier la spațiul $l^1(\mathbb{Z})$. Acest spațiu poate fi privit ca un set de semnale obținute prin eșantionarea semnalelor continue din spațiul $L^1(\mathbb{R})$ (o operație de eșantionare efectuată corect nu schimbă structura intrinsecă a semnalului).

Fie $x \in l^1(\mathbb{Z})$ o secvență stabilă arbitrară. Atunci, se poate formula următoarea definiție:

Definiția 10.2

Se numește **Transformare Fourier (Continuă)** aplicată secvențelor discrete (TCFD) operatorul definit astfel:

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathcal{F} : l^1(\mathbb{Z}) & \rightarrow & Hom(\mathbb{Z}, \mathcal{C}) \\ x & \mapsto & \mathcal{F}(x) \stackrel{not}{=} \mathcal{F}x \stackrel{not}{=} \hat{x} \end{array} \right],$$

unde:

$$\left[\begin{array}{ccc} \hat{x} : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{C} \\ \omega & \mapsto & \hat{x}(\omega) \stackrel{not}{=} X(e^{j\omega}) \stackrel{def}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-j\omega n} \end{array} \right]$$

este **Transformata Fourier Continuă** a secvenței discrete stabile, x .

Factorul η care apare în Definiția 10.1 este omis aici, din considerente practice. Abia acum se poate recunoaște definiția originală a transformatei **Fourier**, cu care, de altfel, se operează în practică. Definiția cu factor η este utilă în abordările de natură mai mult teoretică. Buna definire a transformatei este asigurată de inegalitatea următoare:

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]| < \infty ,$$

care provine din apartenența secvenței x la spațiul semnalelor stabile. Astfel, seria " $X(e^{j\omega})$ " este absolut convergentă și, mai mult, datorită cunoscutului criteriu de uniform convergență al lui Weierstrass, ea este și uniform convergentă (ca funcție de ω). În plus, transformata astfel definită dobândește o nouă proprietate, aceea de a fi 2π -periodică, după cum se poate constata ușor.

Transformata Fourier a impulsului unitar este următoarea:

$$\hat{\delta}_0(\omega) \stackrel{not}{=} \Delta_0(e^{j\omega}) = 1 , \quad \forall \omega \in \mathbb{R} ,$$

fapt care corespunde relației aferente din cazul semnalelor continue.

Pentru revenirea la secvența inițială din imaginea Fourier a sa, se utilizează definiția de mai jos, care asociază secvenței x o nouă secvență, notată cu " $\tilde{x}$ ", obținută prin transformarea inversă. Această definiție ține cont de 2π -periodicitatea transformatei directe și de principiul utilizării informației neredundante, transportate de semnal.

Definiția 10.3

Se numește **Transformată Fourier inversă asociată secvenței discrete** x secvența:

$$\tilde{x}[n] \stackrel{def}{=} \eta^2 \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{+j\omega n} d\omega , \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Utilizând această definiție, se constată că secvența asociată impulsului unitar, provenind de la transformata constantă egală cu 1 este chiar impulsul unitar: $\tilde{\delta}_0 \equiv \delta_0$. Aceasta conduce la o relație similară celei convenționale din cazul continuu, în care intervine impulsul **Dirac**:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{+j\omega n} d\omega = 2\pi \delta_0[n] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} . \quad (57)$$

Ținând cont de această proprietate interesantă, se constată că, între secvențele x și $\tilde{x}$ se stabilește următoarea relație naturală de dualitate:

$$x \equiv \tilde{\tilde{x}} ,$$

care este similară relației "apt" din cazul continuu. În consecință, în cazul discret, se poate opera cu:

- O transformată *analitică*, pentru trecerea din domeniul timpului în cel al frecvenței:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-j\omega n}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}; \quad (58)$$

- O transformată *sintetică*, pentru revenirea în domeniul timpului, din cel al frecvenței:

$$x[n] = \eta^2 \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{+j\omega n} d\omega, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (59)$$

Notă

- Terminologia utilizată aici este mult mai generală în Prelucrarea de Semnal. Astfel, *Analiza de semnal* este o ramură a Prelucrării Semnalelor, al cărei obiect de studiu îl constituie descompunerea semnalului cu ajutorul unei transformate sau după o bază a spațiului din care face el parte. Scopul final al unei analize de semnal este interpretarea acestei decompuneri. Ramura duală Analizei de de semnal este *Sinteza de semnal*, al cărei obiect de studiu îl constituie reconstruirea semnalului din "date analitice", adică din datele rezultate în urma unei analize. Scopul final al sintezei este obținerea unui semnal reconstruit cât mai precis (cât mai aproape de cel original).

Între aceste 2 ramuri pot interveni operații intermediare cum ar fi: codaj, cuantificare, transmisie de date, filtrare, etc. Cele două ramuri împreună cu operațiile intermediare conturează cadrul de lucru în care se dezvoltă aplicațiile din Prelucrarea Semnalelor.

10.3 Serii Discrete de tip Fourier pentru semnale discrete și periodice (SFD)

Utilizarea Transformatei Fourier continue a constituit doar o modalitate de caracterizare în frecvență a semnalelor discrete. În practică, însă, deși caracterul discret și chiar durată finită ale secvențelor simplifică substanțial exprimarea acestei transformări, totuși variația continuă a pulsației constituie o problemă imposibil de soluționat, datorită caracterului cuantificat al reprezentărilor numerice prin intermediul unui mijloc automat de calcul. Acest fapt a condus la ideea exprimării pulsațiilor în mod cuantificat, adică la o nouă Transformare Fourier, ale cărei proprietăți sînt, în mare parte, similare transformării continue. De notat că, deși transformarea continuă poate fi utilizată atît în contextul semnalelor continue cît și în contextul semnalelor digitale, cea *discretă* este specifică secvențelor discrete, aplicarea ei semnalelor analogice efectuîndu-se numai după operația de eșantionare a acestora în timp.

Operația naturală de obținere a unei astfel de transformări este cea de *eșantionare în frecvență*. Aceasta constă în selectarea de valori ale transformării continue în pulsații echidistante. Este de dorit ca operația să se poată desfășura fără calcularea prealabilă a transformării continue, dar, teoretic, acest lucru nu este posibil în general. De aceea, transformarea discretă care se utilizează și care nu apelează la calculul prealabil al celei continue, va constitui – în majoritatea cazurilor – doar o aproximare a transformării obținute prin eșantionare în frecvență. Pentru a preciza mai bine aceste lucruri, să considerăm că $x \in l^1(\mathbb{Z})$ este o secvență discretă stabilă, asupra căreia aplicăm Transformarea Fourier continuă, $\mathcal{F}$. Dacă notăm cu " $\mathcal{F}_d(x)$ " versiunea discretizată a lui $\mathcal{F}(x)$, adică:

$$\mathcal{F}_d(x)(\omega_n) = \mathcal{F}(x)(\omega_n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

(cu $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – o mulțime de pulsații fixe și, eventual, echidistante), iar cu " $TFD(x)$ " – un nou tip, discret, de Transformată Fourier, care nu apelează la calculul prealabil al lui $\mathcal{F}(x)$, atunci, în general, între $\mathcal{F}_d(x)$ și $TFD(x)$ nu este o identitate perfectă:

$$\mathcal{F}_d(x)(\omega_n) \approx TFD(x)(\omega_n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Introducerea unei transformări de tip " TFD " în locul celei de tip " $\mathcal{F}_d$ " este justificată și de alt aspect decît cele prezentate, aspect care nu ține numai de cazul discret. Secvențele periodice au energii infinite, deci nu sînt absolut sumabile. Pentru ele, transformarea $\mathcal{F}$ (deci nici $\mathcal{F}_d$) nu este bine definită, astfel că ea nu poate fi utilizată ca instrument de reprezentare în frecvență, în

acest caz. Totuși, este necesară această reprezentare și pentru clasa secvențelor periodice – des întâlnite în practică – și, de aceea, trebuie adaptat instrumentul anterior într-o manieră care să-i afecteze cât mai puțin calitățile.

Apărent, *Transformarea Fourier discretizată*, $\mathcal{F}_d$, poate fi utilizată cu succes pentru secvențele de durată finită. Totuși, această transformare pierde o proprietate importantă: nu mai verifică Teorema de convoluție (care va fi prezentată în capitolul următor), deci nu mai poate constitui un instrument de caracterizare a comportării în frecvență pentru sistemele liniare discrete invariante la deplasări.

Toate acestea conduc la redefinirea vechii transformări pentru secvențele discrete. Această redefinire pleacă de la cazul secvențelor periodice. Fie $\tilde{x} \in \mathcal{S}_d$ o secvență periodică de perioadă $N \in \mathbb{N}^*$ (eventual, putem considera că $N \neq 1$, pentru a evita cazul banal). Deci:

$$\tilde{x}[n + kN] = \tilde{x}[n] \quad \forall n, k \in \mathbb{Z} .$$

În particular, $\tilde{x}[0] = \tilde{x}[N]$. Această secvență nu va putea fi reprezentată cu ajutorul Transformării Fourier continue, deoarece ea nu este nici stabilă, nici cauzală. De aceea, se procedează astfel: se construiește un set de pulsații speciale și se exprimă ”seria Fourier” asociată secvenței $\tilde{x}$ ca o suprapunere de secvențe exponențiale complexe, de pulsații egale cu cele din setul definit anterior. Apoi, se va utiliza seria Fourier (astfel construită) pentru a defini ”Transformarea Fourier Discretă” asociată secvențelor de durată finită.

Utilizarea seriilor Fourier pentru cazul semnalelor periodice nu este o noutate. Și în cazul continuu s-a procedat la fel: întâi s-a definit seria Fourier asociată unui semnal periodic (Teorema 10.1 (Dirichlet & Fourier)), pagina 31, demonstrându-se punctual convergența ei la un semnal egal *apt* cu semnalul analizat, dacă acesta este cel puțin continuu pe porțiuni, apoi rezultatul a fost extins la cazul semnalelor continue de durată finită (care au fost prelungite pe $\mathbb{R}$ prin periodicitate). În cazul discret, vom vedea că una din cele 2 serii Fourier care se definesc, coincide cu secvența originală.

Considerînd că N este *perioada fundamentală* a secvenței, se poate defini următorul concept:

Definiția 10.4

Se numește ”**pulsăție fundamentală**” *cantitatea*:

$$\omega_1^N \stackrel{def}{=} \frac{2\pi}{N} .$$

Setul de pulsații speciale asociat pulsației fundamentale este format din multipli întregi ai acesteia:

$$\left\{ \omega_n^N \stackrel{def}{=} n \omega_1^N = \frac{2\pi n}{N} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} .$$

Tot în acest context, se utilizează în mod frecvent notația următoare:

$$w_N^n \stackrel{not}{=} e^{-j \omega_n^N} , \quad \forall n \in \mathbb{Z} . \quad (60)$$

Astfel, spre deosebire de seriile Fourier asociate semnalelor continue și periodice, în acest caz, se lucrează doar cu cele N exponențiale complexe distincte, grupate în mulțimea următoare:

$$\mathcal{E}_N \stackrel{def}{=} \left\{ e_k^N \right\}_{k \in \mathbb{Z}} ,$$

unde: $e_k^N[n] \stackrel{not}{=} \overline{w}_N^{kn} , \forall n, k \in \mathbb{Z}$. Se observă că $e_0^N \equiv 1$ și exponențiala ” e_k^N ”, cu $k \neq 0$, are perioada egală cu N/k . Practic, mulțimea $\mathcal{E}_N$ are doar un număr finit de elemente, datorită acestei proprietăți:

$$\mathcal{E}_N = \left\{ e_k^N \right\}_{k=0, N-1} .$$

Dacă se notează prin ” $\mathcal{S}_d^N$ ” mulțimea secvențelor N -periodice din $\mathcal{S}_d$ (secvențe notate generic prin ” $\tilde{x}$ ”), pentru care N nu este neapărat perioadă principală, atunci luînd în considerare

structura de spațiu vectorial (peste corpul Γ) a lui $\mathcal{S}_d$, se poate arăta imediat că $\mathcal{S}_d^N$ este un subspațiu al lui $\mathcal{S}_d$. Mai mult, $\mathcal{E}_N \subseteq \mathcal{S}_d^N$, deoarece $\mathcal{S}_d^N$ include atât secvențele constante cât și secvențele de perioade N/k , unde $k = \overline{1, N-1}$. Pe acest subspațiu, se poate defini (corect) următorul produs scalar:

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \overline{\tilde{y}[n]}, \quad \forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{S}_d^N,$$

relativ la care $\mathcal{S}_d^N$ devine spațiu Hilbert. Evident, sîntem interesați de găsirea unei baze specifice a acestuia, ușor de manevrat în practică, avînd proprietatea de ortogonalitate. Datorită relațiilor remarcabile:

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega_p^N n) \sin(\omega_q^N n) = \frac{N}{2} \delta_0[p-q] \\ \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega_p^N n) \cos(\omega_q^N n) = \frac{N}{2} \delta_0[p-q] \\ \sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega_p^N n) \cos(\omega_q^N n) = 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega_p^N n) = 0 \\ \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega_p^N n) = 0 \\ \forall p, q \in \mathbb{Z}^*, \end{array} \right] \quad (61)$$

rezultă că mulțimea $\{Re(\mathcal{S}_d^N), Im(\mathcal{S}_d^N)\}$, avînd $2N-1$ elemente din $\mathcal{S}_d^N$, este ortogonală. Mai mult, egalitatea:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \bar{w}_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{kn} = \begin{cases} N & , \quad k \in N\mathbb{Z} \\ 0 & , \quad k \in \mathbb{Z} \setminus N\mathbb{Z} \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (62)$$

(cu ajutorul căreia se poate demonstra oricare din egalitățile anterioare), arată că și mulțimea $\mathcal{E}_N$ este ortogonală:

$$\langle e_p^N, e_q^N \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{(q-p)n} = N \delta_0[p-q], \quad \forall p, q \in \overline{0, N-1}. \quad (63)$$

Atunci mulțimea " $\frac{1}{\sqrt{N}} \mathcal{E}_N$ " este ortonormată, deci liniar-independentă. Rezultă că și mulțimea " $\frac{1}{N} \mathcal{E}_N$ " este liniar-independentă, dar numai ortogonală. Dacă ea este și sistem de generatori pentru $\mathcal{E}_N$, atunci are caracter de bază ortogonală în $\mathcal{E}_N$; dimensiunea acestui spațiu va fi finită și egală cu N .

Din fericire, se constată că, pentru o secvență oarecare, $\tilde{x} \in \mathcal{S}_d^N$, se pot evalua următoarele numere, numite *coeficienți Fourier*:

$$\widetilde{X}[k] \stackrel{not}{=} \langle \tilde{x}, e_k^N \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] w_N^{nk}, \quad \forall k \in \overline{0, N-1}. \quad (64)$$

Deoarece $w_N^{nN} = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, rezultă imediat că: $\widetilde{X}(k+N) = \widetilde{X}(k)$, adică $\widetilde{X} \in \mathcal{S}_d^N$, fapt care justifică notația utilizată (" $\widetilde{X}$ ").

Secvența acestor coeficienți are o proprietate remarcabilă:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{X}[k] \bar{w}_N^{nk}, \quad \forall n \in \overline{0, N-1}, \quad (65)$$

fapt care demonstrează că mulțimea $\frac{1}{N} \mathcal{E}_N$ este și sistem de generatori, adică bază în $\mathcal{S}_d^N$. În consecință, dimensiunea spațiului $\mathcal{S}_d^N$ față de corpul $\mathcal{C}$ este N , în timp ce dimensiunea sa față de corpul $\mathbb{R}$ este $(2N-1)$.

Apartenența la $\mathcal{S}_d^N$ a ambelor secvențe $\tilde{x}$ și $\widetilde{X}$ permite formularea următoarei definiții:

Definiția 10.5

$\widetilde{X}$ și $\widetilde{x}$ se numesc **Serii Fourier Discrete (SFD)**:

- $\widetilde{X}$ este seria directă (de analiză);
- $\widetilde{x}$ este seria inversă (de sinteză).

Definiția se bazează pe dualitatea formulelor celor două tipuri de serii **Fourier**, arătată mai sus.

Prin convenție, ca și în cazul transformării continue, se poate utiliza notația:

$$SFD(\widetilde{x}) \stackrel{not}{=} \widetilde{X} ,$$

pentru a indica aplicația care asociază unei secvențe periodice $\widetilde{x}$ seria Fourier directă. Reciproc, pentru seria inversă, se va utiliza notația:

$$ISFD(\widetilde{X}) \stackrel{not}{=} \widetilde{x} .$$

Practic, atât SFD cât și $ISFD$ sînt operatori ce acționează pe $\mathcal{S}_d^N$ și produc tot cîte o secvență din $\mathcal{S}_d^N$.

10.4 Transformarea Fourier Discretă pentru semnale discrete avînd suportul finit (TFD)

Reprezentarea unei secvențe periodice a fost un pas important pe calea studiului exprimării secvențelor de durată finită cu ajutorul unei transformări discrete ce derivă din Transformarea Fourier continuă. Aceasta, deoarece din orice secvență de durată finită se poate construi o secvență periodică într-un mod foarte natural: se utilizează prelungirea prin periodicitate. Mai exact, se poate utiliza secvența periodică $\widetilde{x} \in \mathcal{S}_d^N$ asociată secvenței de durată finită $x \in \mathcal{S}_d$, construită astfel: $\widetilde{x}[n] \stackrel{def}{=} x[n \% N]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (prelungire prin periodicitate). Aici, operația " $n \% N$ " indică restul împărțirii numărului n la numărul N . Deoarece pentru secvențele periodice se obțin reprezentări cu ajutorul seriilor **Fourier** discrete, se poate considera că reprezentarea asociată pentru $\widetilde{x}$ este validă și pentru x .

Reprezentarea secvenței de durată finită ar putea coincide cu reprezentarea secvenței periodice asociate. Cu toate acestea, vom vedea că este posibilă utilizarea unui instrument specific al secvențelor de durată finită, chiar dacă, în construcția lui, sînt utilizate observațiile anterioare.

Convenim să notăm prin " $\mathcal{S}_{dN}$ " mulțimea secvențelor de durată finită, avînd lungimea egală cu $N \in \mathbb{N}^*$. Matematic, această mulțime se poate exprima astfel:

$$\mathcal{S}_{dN} \stackrel{def}{=} \left\{ x \in \mathcal{S}_d \mid Supp(x) \subseteq \overline{0, N-1} \right\} .$$

Prin convenție, am considerat că elementele lui $\mathcal{S}_{dN}$ sînt de forma:

$$x \in \mathcal{S}_{dN} \iff x[n] = 0, \quad \forall n \notin \overline{0, N-1} ,$$

fapt care, evident, nu micșorează generalitatea. Este posibil să existe un moment n_0 în suportul $\overline{0, N-1}$, pentru care $x[n_0] = 0$, dar acest lucru nu se întîmplă pentru toate punctele suportului. De asemenea, această secvență poate fi privită ca avînd orice durată finită $M \geq N$, printr-o completare adecvată cu zerouri, adică: $\mathcal{S}_{dN} \subseteq \mathcal{S}_{dM}$, $\forall M \geq N$.

Dacă se utilizează notația:

$$q^{-m} \mathcal{S}_{dN} \stackrel{def}{=} \left\{ x \in \mathcal{S}_d \mid Supp(x) \subseteq \overline{m, N+m-1} \right\} ,$$

unde $m \in \mathbb{Z}$, atunci $q^0 \mathcal{S}_{dN} = \mathcal{S}_{dN}$ și familia de mulțimi: $\{q^{-m} \mathcal{S}_{dN}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ acoperă întreaga gamă de secvențe cu durată finită, de lungime N . Deoarece prin operatorul " q^{-m} " mulțimile $\mathcal{S}_{dN}$ și $q^{-m} \mathcal{S}_{dN}$ sînt echivalente ($\forall m \in \mathbb{Z}$), se consideră că mulțimea "prototip" a acestei familii este chiar $\mathcal{S}_{dN}$. Mai mult, dacă se ia în considerare structura de spațiu vectorial a fiecărei mulțimi din familie, este evident că oricare două dintre ele sînt spații vectoriale izomorfe. De aceea, în cele ce urmează, atenția va fi focalizată asupra mulțimii $\mathcal{S}_{dN}$.

Fie $x \in \mathcal{S}_{dN}$ o secvență arbitrar aleasă. Atunci secvența periodică asociată este descrisă de formula: $\tilde{x}[n] = x[n \% N]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Reciproc, orice secvență de durată finită poate fi construită din una periodică, prin reținerea valorilor pe o perioadă:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & , \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & , \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \overline{0, N-1} \end{cases}$$

Se observă că putem exprima mai concis expresia secvenței de durată finită astfel definită, dacă utilizăm o secvență prototip numită *fereastră dreptunghiulară*:

$$\mathcal{R}_N[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & , \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \overline{0, N-1} \end{cases} \quad (66)$$

Astfel, se poate scrie că $\mathcal{R}_N \in \mathcal{S}_{dN}$ și, în plus:

$$x \equiv \mathcal{R}_N \cdot \tilde{x} .$$

Relațiile simple la care s-a ajuns reflectă dualitatea naturală care există între spațiile de semnale $\mathcal{S}_{dN}$ și $\mathcal{S}_d^N$, care sînt, la rîndul lor, izomorfe.

Pentru secvența " $\tilde{x}$ ", construită anterior, se poate evalua Seria Fourier Discretă asociată, notată cu " $\tilde{X}$ ", care, așa cum s-a văzut, este tot o secvență N -periodică. Pentru a menține dualitatea "timp"-"frecvență" și în cazul secvențelor de durată finită, *coeficienții Fourier* ai lui x se aleg, prin definiție, astfel (alegere sugerată de observațiile anterioare):

$$X[k] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_N[k] \cdot \tilde{X}[k] , \quad \forall k \in \mathbb{Z} .$$

Prin analogie cu formulele ce descriu Seriile Fourier directă și inversă descrise anterior, se pot stabili relațiile de mai jos:

$$X[k] = \mathcal{R}_N[k] \cdot \tilde{X}[k] , \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad ; \quad x[n] = \mathcal{R}_N[n] \cdot \tilde{x}[n] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} ,$$

adică:

$$\begin{aligned} X[k] &= \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{kn} & , \quad k = \overline{0, N-1} \\ 0 & , \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \overline{0, N-1} \end{cases} \\ x[n] &= \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \bar{w}_N^{nk} & , \quad n = \overline{0, N-1} \\ 0 & , \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \overline{0, N-1} \end{cases} \end{aligned} \quad (67)$$

În acest context, se poate formula următoarea definiție:

Definiția 10.6

X și x se numesc **Transformate Fourier Discrete (TFD)**:

- X este **transformata directă (de analiză)**;
- x este **transformata inversă (de sinteză)**.

Aplicația care asociază unei secvențe de durată finită transformata " X " de mai sus se va nota prin " TFD " (deci $TFD(x) \equiv X$) și se va numi **Transformare Fourier Discretă (Directă)**.

Analog, aplicația care returnează secvența de durată finită de la care provine o "TFD" se va nota prin "ITFD" (deci $ITFD(X) \equiv x$) și se va numi **Transformare Fourier Discretă Inversă**. Ca și în cazul Seriilor Fourier Discrete, aceste transformări sînt operații interne ale mulțimii secvențelor de durată finită, efectuînd o trecere din domeniul discret al timpului în cel discret al frecvenței.

În practică, șirurile de date reprezentînd un anumit semnal sînt periodice sau de durată finită, astfel încît SFD și TFD sînt instrumentele cele mai utilizate în analizele și sintezele de semnal. Deși fiecare dintre ele acționează asupra cîte unei clase de secvențe discrete, totuși, prin modul cum au fost definite, între aceste instrumente există o puternică analogie. Datorită acestui fapt, prin convenție, se extinde domeniul de definiție al Transformării Fourier Discrete și pentru secvențele periodice. Astfel, noua transformare, notată tot cu "TFD" (respectiv "ITFD") devine, prin convenție, operatorul "SFD" (respectiv "ISFD") – dacă acționează asupra unei secvențe periodice – sau operatorul "TFD" (respectiv "ITFD") – dacă se aplică unei secvențe de durată finită. Această extindere este neambiguă, clasele de semnal asupra cărora se lucrează fiind disjuncte și izomorfe.

Calculul efectiv al unei TFD permite o implementare eficientă cu ajutorul unor algoritmi recursivi. Unii dintre aceștia vor fi prezentați într-o lucrare viitoare. De exemplu, se poate arăta că dacă durata (sau perioada) semnalului discret este de forma $N = 2^L$, atunci există o familie de algoritmi rapizi de calcul al TFD, numiți *Fast Fourier Transform* (FFT), care permit evaluarea acestora cu numai $2^L L$ operații.

11 Proprietăți fundamentale ale TCFD

În Prelucrarea Numerică a Semnalelor, instrumentul teoretic cel mai utilizat pentru a furniza descrieri în frecvență este TCFD. Atît SFD cît și TFD sînt transformări utilizate în practică, ce au fost definite plecînd de la TCFD și nu în mod independent de aceasta. De aceea, este natural să ilustrăm într-un capitol separat proprietățile fundamentale ale acestei transformări, care se vor transfera și derivatelor ei practice. Totodată, aceste proprietăți constituie suportul altor caracteristici ale transformărilor practice, care vor fi prezentate într-o lucrare viitoare.

11.1 Teorema de convoluție

Una dintre cele mai importante proprietăți ale TCFD este legată de SLID, mai exact de comportamentul acestora în frecvență. De altfel, o subproblemă a Prelucrării Semnalelor este cea a convoluției, care se poate formula astfel:

Problema convoluției

Dacă este disponibil un instrument de descriere a conținutului în frecvență al semnalelor, se cere să se precizeze cum reacționează acest instrument în raport cu operația de convoluție dintre semnale.

Cu alte cuvinte, se caută relația dintre imaginea în frecvență a unui semnal obținut prin convoluția altor 2 semnale și imaginile în frecvență ale acestora.

În cazul de față, instrumentul considerat este chiar TCFD. Problema convoluției se reduce la a căuta relația existentă între imaginile prin TCFD a următoarelor 3 semnale discrete stabile: x , y și $x \star y$.

Evident, această problemă se poate soluționa direct, aplicînd operatorul Fourier $\mathcal{F}$ semnalului $x \star y$. Cu toate acestea, pentru a continua să ilustrăm legătura existentă între Teoria Sistemelor și Prelucrarea Semnalelor în ceea ce privește definirea și construirea noțiunilor fundamentale, vom soluționa problema prin referire la conceptul de SLID.

Așa cum s-a arătat în Capitolul 9, cel care caracterizează comportamentul în frecvență al unui SLID avînd funcția pondere stabilă $h \in l^1(\mathbb{Z})$ este răspunsul în frecvență, notat prin

$H(e^{j\omega})$. Definiția 9.1 (pagina 28) arată, de fapt, că:

$$H(e^{j\omega}) = (\mathcal{F}h)(\omega) = \hat{h}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Această proprietate justifică atât notația utilizată pentru răspunsul în frecvență, cât și interesul de a soluționa problema convoluției în termeni de sisteme.

Teorema 11.1 (Teorema de convoluție)

Fie un SLID caracterizat de funcția pondere stabilă $h \in l^1(\mathbb{Z})$. Dacă $x \in l^1(\mathbb{Z})$ este un semnal de intrare stabil, atunci răspunsul sistemului, y , este tot un semnal stabil și între TCFD ale lui x , h și y are loc următoarea relație:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (68)$$

Demonstrație _____ ↓

Faptul că ieșirea unui SLID stabil corespunzătoare unei intrări stabile este tot un semnal stabil este evident. În aceste condiții, fiecare dintre semnalele x , h și y admite TF bine definită. Aceasta ne permite să efectuăm următoarele calcule (în care intervin succesiv: Definiția 10.2, relația de intrare-ieșire (36) și din nou Definiția 10.2):

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} y[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] x[n-k] e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] e^{-j\omega k} x[n-k] e^{-j\omega(n-k)} = \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] e^{-j\omega k} \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} x[m] e^{-j\omega m} \right) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Acest rezultat demonstrează complet teorema.

□ _____ (Teorema 11.1) ↑

Notă

- Demonstrația rezultatului de mai sus se putea realiza și pe altă cale, folosind definiția TCFD inverse, dată de relația (59), de la pagina 36.

Acest rezultat arată cum este influențat comportamentul în frecvență al unui semnal la trecerea printr-un SLID. Așa cum era de așteptat, răspunsul în frecvență are un rol important în stabilirea configurației TF a ieșirii, iar Teorema de convoluție indică și modul în care el acționează: multiplicativ. Relația obținută este naturală, căci, așa cum se cunoaște deja, orice SLID pentru care intrarea, ieșirea și funcția pondere au Transformate $\mathcal{Z}$ convergente într-o zonă comună $\mathcal{A}$ din planul complex, are funcția de transfer $\mathcal{Z}(h)$ dată de următoarea relație:

$$\mathcal{Z}(h) \equiv \frac{\mathcal{Z}(y)}{\mathcal{Z}(x)}.$$

Dacă în zona $\mathcal{A}$ este inclus și cercul unitar $\partial\mathcal{U}$, atunci această relație exprimată în punctele lui $\partial\mathcal{U}$ este echivalentă chiar cu (68) din Teorema de convoluție.

Pentru a ilustra intuitiv semnificația acestei proprietăți a TCFD, să considerăm un SLID numit *filtru ideal de tip "trece jos"*, caracterizat de următorul răspuns în frecvență:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| \leq \omega_0 < \pi \\ 0 & , \quad \omega_0 < |\omega| \leq \pi \end{cases},$$

unde ω_0 este *pulsația de tăiere*. Conform Teoremei de convoluție, acest filtru are proprietatea de a *trunchia* informația în frecvență a intrării, adică de a furniza un semnal de ieșire avînd spectru nul în afara benzii de pulsații $[-\omega_0, +\omega_0]$. Aceasta, datorită faptului că răspunsul în frecvență al sistemului a acționat ca o *fereastră spectrală* multiplicativă asupra TF a intrării. În general, plecînd de la acest exemplu, se consideră adesea că răspunsul în frecvență al unui SLID este o fereastră spectrală aplicată TF a intrării.

În Prelucrarea Semnalelor, relația în frecvență (68) se poate exprima echivalent astfel:

$$\mathcal{F}(x \star y) \equiv \mathcal{F}(x) \cdot \mathcal{F}(y) , \quad \forall x, y \in l^1(\mathbb{Z}) . \quad (69)$$

Aceasta este expresia care soluționează, de fapt, problema convoluției. Ea arată că TCFD a produsului de convoluție este egal cu produsul clasic al TCFD calculat pentru fiecare din semnalele aflate în convoluție.

11.2 Proprietăți de simetrie

În afara proprietății de convoluție exprimată mai sus, TCFD posedă o serie de alte proprietăți de calcul, grupate sub numele de *proprietăți de simetrie*. Acestea pot fi exprimate prin introducerea unor noi tipuri de semnale discrete.

Fie $x \in \mathcal{S}_d$ o secvență discretă oarecare. Acestea i se pot asocia următoarele semnale discrete:

- *semnalul simetric conjugat*, definit prin: $x_e[n] \stackrel{def}{=} \frac{x[n] + \overline{x[-n]}}{2} , \quad \forall n \in \mathbb{Z}$;
- *semnalul antisimetric conjugat*, definit prin: $x_o[n] \stackrel{def}{=} \frac{x[n] - \overline{x[-n]}}{2} , \quad \forall n \in \mathbb{Z}$;
- *semnalul simetric în oglindă*, definit prin: $x_s[n] \stackrel{def}{=} x[-n] , \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Indicii "e" și "o" pe care i-am utilizat mai sus sînt sugerați de termenii *even* (par) și *odd* (impar) din limba engleză. Într-adevăr, dacă secvența inițială, x , are valori reale, atunci x_e desemnează *componenta pară*, iar x_o – *componenta impară* a acesteia.

Aceste noi tipuri de secvențe sugerează unele proprietăți pe care le poate avea o secvență discretă, așa cum se poate constata din definiția care urmează.

Definiția 11.1

Secvența discretă $x \in \mathcal{S}_d$ se numește:

1. **simetric conjugată** dacă: $x[n] = \overline{x[-n]} , \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.
2. **antisimetric conjugată** dacă: $x[n] = -\overline{x[-n]} , \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.
3. **simetrică în oglindă** dacă: $x[n] = x[-n] , \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Se poate verifica ușor că secvența x_e este simetric conjugată, secvența x_o este antisimetric conjugată, iar secvența x_s este simetrică în oglindă (adică pară).

În plus, între x , x_e și x_o există următoarea relație remarcabilă:

$$x \equiv x_e + x_o . \quad (70)$$

În cazul secvențelor cu valori reale, această relație arată descompunerea lui x în componentele sale pară și impară.

În ceea ce privește proprietatea de simetrie în oglindă, secvențele discrete care o verifică sînt folosite adesea pe post de funcții pondere ale unor filtre numerice, numite *filtre în oglindă*. În practică, filtrele în oglindă sînt cauzale și de tip FIR, adică secvența pondere este simetrică față

de verticala trecînd prin mijlocul suportului. Interesul practic al acestor filtre este justificat prin faptul că, așa cum se poate demonstra cu ușurință, răspunsul lor în frecvență are fază variind liniar cu pulsația. De aceea, filtrele în oglindă sînt și filtre de fază liniară. Caracterul liniar al fazei atrage după sine calcularea rapidă și eficace a întîrzierii pe care o suferă semnalul de intrare în raport cu cel de ieșire, la trecerea printr-un filtru în oglindă.

Conceptele de simetrie ”în timp” (de mai sus) conduc, în domeniul frecvenței, la următoarele noțiuni aflate în conexiune cu TCFD ale secvenței stabile $x \in l^1(\mathbb{Z})$:

- *conjugata simetrică* asociată TCFD, definită prin:

$$X_e(e^{j\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X(e^{j\omega}) + \overline{X(e^{-j\omega})}}{2}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R};$$

- *conjugata antisimetrică* asociată TCFD, definită prin:

$$X_o(e^{j\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X(e^{j\omega}) - \overline{X(e^{-j\omega})}}{2}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Se constată cu ușurință că aceste două funcții complexe verifică următoarele relații de simetrie:

$$\begin{cases} X_e(e^{j\omega}) = \overline{X_e(e^{-j\omega})} \\ X_o(e^{j\omega}) = -\overline{X_o(e^{-j\omega})} \end{cases}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Se remarcă faptul că atât X_e cât și X_o nu sînt imaginile prin operatorul TCFD ale secvențelor x_e , respectiv x_o , chiar dacă notația ar sugera acest lucru.

De altfel, sumarul proprietăților de simetrie ale TCFD este prezentat în Tabelul 1 care urmează.

Notă

- În acest tabel, am utilizat următoarele notații: α_R , α_I sînt partea reală, respectiv imaginară a entității complexe α , X_E este imaginea prin TCFD a secvenței x_e , iar X_O este imaginea prin TCFD a secvenței x_o .

Tabelul 1: *Sumarul proprietăților de simetrie ale TCFD.*

Secvență	x	$\overline{x}$	x_s	x_R	x_I	x_e	x_o
TCFD	$X(e^{j\omega})$	$\overline{X(e^{-j\omega})}$	$X(e^{-j\omega})$	$X_e(e^{j\omega})$	$-jX_o(e^{j\omega})$	$X_R(e^{j\omega})$	$+jX_I(e^{j\omega})$

12 Noțiuni privind eșantionarea și interpolarea semnalelor

Cele mai utilizate *semnale practice* (adică reale, cauzale și stabile) sînt generate prin intermediul operației de eșantionare în timp. De aceea, eforturile cercetătorilor s-au dirijat și către studiul condițiilor în care proprietățile semnalelor continue se pot transfera în discret, prin eșantionare.

Acest capitol este dedicat în întregime prezentării unor rezultate fundamentale de Teoria eșantionării, fără a înainta, însă, către rezultate mai recente și mult mai complexe.

Este bine cunoscut, astăzi, că semnalele digitale obținute prin eșantionarea celor continue conțin, de regulă, o informație incompletă, ”trunchiată”, referitoare la comportarea reală în frecvență. Chiar și comportarea în timp poate fi redată în mod distorsionat prin eșantionare, dacă nu se respectă anumite reguli atunci cînd se efectuează această operație.

Teorema de eșantionare a lui Shannon, care stabilește una dintre aceste reguli, este un rezultat extrem de puternic în Prelucrarea Semnalelor. Intuitiv, aceasta are următoarea semnificație:

- *Considerînd că este operantă ideea de bază a analizei armonice clasice (de tip Fourier), potrivit căreia un semnal stabil se poate aproxima cu ajutorul unei superpoziții finite de semnale monofrecvențiale (armonici), pentru a putea reprezenta acest semnal în formă discretizată, este necesar ca perioada de eșantionare să fie inferioară jumătății perioadei celei mai rapid oscilante armonici din componența lui.*

Necesitatea acestei restricții este evidentă: o perioadă de eșantionare mai mare conduce la imposibilitatea sesizării unui anumit număr de armonici, care fac parte din semnalul inițial, dar care nu vor mai figura și în cel eșantionat; este vorba despre acele armonici ale căror jumătăți de perioade sînt inferioare perioadei de eșantionare. Este ușor de imaginat ce se poate întîmpla dacă un semnal continuu sinusoidal este eșantionat cu un pas superior sau egal cu jumătatea perioadei sale fundamentale:

- în caz de egalitate, se obține un semnal discret constant și nu periodic;
- în caz de inegalitate, se obține fie un semnal aperiodic, fie unul periodic, dar de perioadă fundamentală diferită de cea a semnalului inițial.

Dacă se respectă regula lui Shannon, se constată că, pe măsură ce perioada de eșantionare scade, semnalul discretizat îl "redă" cît mai fidel în timp pe cel continuu. Considerente practice, legate de realizabilitatea fizică a sistemului cu care se poate realiza eșantionarea, fac ca această perioadă să nu poată fi micșorată la infinit.

În acest capitol, vom ilustra restricția impusă de Shannon pe o cale riguroasă, studiind efectul în frecvență al eșantionării.

Notă

- În general, studiul comportării unui semnal (sau sistem) în domeniul timpului este mai aproape de intuiție decît cel al comportării sale în frecvență. Cu toate acestea, în Prelucrarea Semnalelor, domeniul preferențial în care se desfășoară analiza de semnal este cel al frecvenței, așa cum am sugerat pe tot parcursul acestui curs. Este, deci, natural să se încerce dezvăluirea a cît mai multe corelații care există între cele două domenii de studiu. O astfel de corelație a reprezentat-o Principiul de incertitudine. Teorema de eșantionare relevă o altă legătură interesantă dintre cele două domenii de reprezentare a semnalelor.

12.1 Scurt istoric al dualității dintre eșantionare și interpolare

Problema reprezentării semnalelor continue prin intermediul unor versiuni eșantionate este automat însoțită de problema duală, a reconstruirii prin interpolare a acestora. Prin discretizarea unui semnal continuu, informația conținută între momentele de eșantionare nu figurează în versiunea digitală a acestuia, de aceea, este natural să se pună problema aproximării ei prin interpolare. Astfel, termenii de *eșantionare* și *interpolare* ar trebui utilizați în dualitate. Cu toate acestea, tehnicile de interpolare au fost inventate între secolele XVII și XVIII, înainte ca termenul de eșantionare să fi fost definit. Aceasta s-a petrecut abia către sfîrșitul secolului XIX. Faptul pare normal, căci interpolarea a interesat mai mult matematicienii, din perspectiva Analizei matematice și a studiului graficelor de funcții. În plus, eșantionarea este legată intim de un anumit nivel de dezvoltare tehnologică, insuficient în momentul cînd au apărut primele lucrări cu privire la interpolare. Eșantionarea a fost studiată sistematic după conturarea Teoriei numerelor (care s-a dezvoltat ca ramură de sine stătătoare a Matematicii, după explozia Analizei matematice într-o pleiadă de subramuri). Tot la conturarea unei Teorii a eșantionării a contribuit și mai noua viziune privitoare la studiul comportamentului unei funcții atît în timp, cît și în frecvență.

Începuturile Teoriei eșantionării sînt legate de numele matematicianului de origine belgiană Charles-Jean (baron) de la Valée Poussin, care a oferit, în 1896, o demonstrație pentru una dintre teoremele celebre ale Teoriei numerelor [2]. Tot el este acela care, în 1908, a demonstrat o (primă) "teoremă de eșantionare" și una "de interpolare", legate de comportarea funcțiilor

mărginite. Astfel, Valée Poussin indică următoarea formulă de interpolare a unei funcții reale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mărginită pe intervalul închis $[a, b]$:

$$F_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha_k \in [a, b]} f(\alpha_k) \frac{\sin m(t - \alpha_k)}{m(t - \alpha_k)}, \quad (71)$$

în care: $\alpha_k \stackrel{\text{def}}{=} k\pi/m$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, iar $m \in \{n, (n+1)/2\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Datorită faptului că:

$$\frac{\sin m(t - \alpha_k)}{m(t - \alpha_k)} = \begin{cases} 1 & , \text{ dacă } t = \alpha_k \\ 0 & , \text{ dacă } t \in \{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{k\}} \end{cases},$$

rezultă că $F_m(\alpha_k) = f(\alpha_k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, adică $\{F_m(\alpha_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ constituie o versiune eșantionată a lui f în nodurile $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ și, totodată, F_m o interpolează pe f între aceste noduri. Dacă $\text{Supp}(f) \subseteq [a, b]$ (adică f are suport compact), atunci formula de interpolare (71) devine:

$$F_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\alpha_k) \frac{\sin m(t - \alpha_k)}{m(t - \alpha_k)}. \quad (72)$$

Ambele expresii ale formulei de interpolare a lui Valée Poussin pun în evidență utilizarea unui *nucleu de interpolare* de tip "sinus atenuat" ("sinus cardinal"),

$$Sa(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin t}{t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (73)$$

care, ulterior, a fost înlocuit cu alte tipuri de nuclee pentru a ajunge la noi formule de interpolare.

După 1908, formula de interpolare indicată de Vallée Poussin a suscitat interesul specialiștilor preocupați de o nouă disciplină, care avea să devină *Teoria Comunicației*. Aceasta a condus la primele rezultate de Teoria Eșantionării, dintre care se pot menționa aici cele ale unor cercetători ca: M. Theis (1919), K. Ogura (1920), J.M. Wittacker (1927), V.A. Kotel'nikov (1933), C.E. Shannon (1940), J.L. Brown (1963, 1967), P. Aachen (1977) [2].

Plecînd de la Principiul de incertitudine, Teoria actuală a eșantionării relevă două categorii de rezultate: unele referitoare la discretizarea semnalelor de bandă limitată și altele – la discretizarea celor de bandă infinită. A doua categorie de rezultate a fost inițiată de către J.L. Brown și P. Aachen, este extrem de recentă și pare a deschide o nouă perspectivă în direcția eșantionării semnalelor. În schimb, prima categorie este considerată clasică, ea fiind construită în jurul *Teoremei centrale de eșantionare-interpolare*, demonstrată independent de către V.A. Kotel'nikov în 1933 și C.E. Shannon în 1940 (publicată abia în 1949).

Teorema 12.1 (V.A. Kotel'nikov, C.E. Shannon)

Dacă funcția continuă și absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, de energie finită, f , are banda de frecvențe inclusă în intervalul $[-\pi\Omega_0, +\pi\Omega_0]$ (unde $\Omega_0 > 0$ este o pulsație fixă), atunci ea poate fi reprezentată exact utilizînd numai valorile cunoscute în punctele "de eșantionare" de forma: $\{k/\Omega_0\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Formula de interpolare exactă aferentă este următoarea:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{\Omega_0}\right) \frac{\sin \pi(\Omega_0 t - k)}{\pi(\Omega_0 t - k)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (74)$$

Privind această teoremă, este evidentă similitudinea care există între formulele de interpolare (72) indicată de Vallée Poussin și (74) propusă de către Kotel'nikov & Shannon. Cu toate acestea, în formula lui Vallée Poussin nu se face nici o referire la domeniul frecvențelor. Ea se face simțită abia în formula lui Kotel'nikov & Shannon.

Forța teoremei de eșantionare-interpolare de mai sus este dată de faptul că ea operează cu o formulă *exactă* de reconstrucție a funcției inițiale din eșantioanele sale. Unele rezultate din Matematică propun și alte formule de interpolare (de exemplu, de tip Hermite, Lagrange, Legendre, Gauss; vezi [5]), dar, în general, acestea nu sînt exacte, decît pentru polinoame.

12.2 Efectul în frecvență al eșantionării semnalelor de bandă limitată. Fenomenul de aliere.

A doua parte a acestui capitol este dedicată studiului efectului în frecvență produs de operația de eșantionare. Scopul acestui studiu este de a găsi pe cale analitică o regulă practică de alegere a perioadei de eșantionare, plecând de la structura globală a informației frecvențiale transportate de un semnal de bandă limitată.

Să considerăm că semnalul analogic $x_a : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$ are TF bine definită, dată de următoarea relație cunoscută:

$$\mathcal{F}(x_a)(\Omega) \stackrel{\text{not}}{=} \widehat{x_a}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int x_a(t) e^{-j\Omega t} dt, \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}.$$

Note

- Față de Definiția 10.1 (de la pagina 33), aici factorul η a fost omis, din considerente formale, pentru a facilita anumite interpretări. De altfel, relația de mai sus descrie definiția clasică a TF.
- Buna definire a TF este asigurată dacă semnalul x_a este stabil: $x_a \in L^1(\mathbb{R})$. Uneori, i se cere semnalului să fie și de energie finită, deci: $x_a \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. De regulă, însă, această condiție este înlocuită în Matematică cu alta mai puțin restrictivă; este vorba de condiția de descreștere de tip polinomial la infinit:

$$|x_a(t)| < t^{-m},$$

unde $m > 1$ și t aparține unei vecinătăți a infinitului.

În aceste condiții, formula de recuperare a semnalului analogic inițial din imaginea prin TF a sa este următoarea:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{x_a}(\Omega) e^{+j\Omega t} d\Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Fie $T > 0$ un număr numit *perioadă de eșantionare*. Atunci, folosind semnalul x_a și numărul T , se poate genera următoarea secvență discretă:

$$x[n] \stackrel{\text{def}}{=} x_a(nT), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (75)$$

Noul semnal astfel obținut este o *versiune eșantionată (discretizată)* a semnalului inițial. Relația din domeniul timpului care leagă semnalele x_a și x (de naturi diferite) va conduce la o anumită interdependență dintre TF ale acestora. Este evident că buna definire a TCFC a semnalului analogic (notată prin $\widehat{x_a}(\Omega)$) atrage după sine buna definire a TCFD a versiunii sale eșantionate (notată prin $X(e^{j\omega})$):

$$X(e^{j\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-j\omega n}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

În această expresie, ω se numește *pulsatie normalizată*, datorită faptului că TCFD este 2π -periodică, deci că variația pe $\mathbb{R}$ a pulsației Ω a fost concentrată într-o variație pe intervalul $[-\pi, +\pi]$ a pulsației ω . Datorită acestui fapt, secvența discretă se poate recupera din imaginea sa prin TCFD astfel:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{+j\omega n} d\omega, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Propoziția 12.1

În contextul definit anterior, între TCFC a semnalului inițial x_a și TCFD a versiunii sale eșantionate, x , se poate stabili următoarea relație:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{x_a}\left(\frac{\omega + 2k\pi}{T}\right), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Folosind formulele inverse ale celor două tipuri de TF de mai sus, se poate exprima următoarea egalitate:

$$x[n] = x_a(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{+j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{x_a}(\Omega) e^{+jn\Omega T} d\Omega, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (76)$$

Aceasta sugerează descompunerea închiderii mulțimii $\mathbb{R}$ (adică a lui $\mathbb{R}$ plus punctele de la infinit) în următoarea familie de intervale închise:

$$\overline{\mathbb{R}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[(2k-1) \frac{\pi}{T}, (2k+1) \frac{\pi}{T} \right].$$

Folosind această descompunere, egalitatea (76) se transformă după cum urmează:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{(2k-1)\frac{\pi}{T}}^{(2k+1)\frac{\pi}{T}} \widehat{x_a}(\Omega) e^{+jn\Omega T} d\Omega, \right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Cu schimbarea de variabilă: $\Lambda = \Omega - 2k\pi/T$ și ținînd cont de faptul că $e^{2nk\pi j} = 1$ rezultă mai departe că:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} \widehat{x_a} \left(\Lambda + \frac{2k\pi}{T} \right) e^{+jn\Lambda T} d\Lambda, \right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

În acest punct, este natural să introducem următoarea notație: $\omega \stackrel{not}{=} \Lambda T$, care indică trecerea de la pulsația generală la cea normalizată. Se obține, astfel, exprimarea echivalentă de mai jos:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \widehat{x_a} \left(\frac{\omega + 2k\pi}{T} \right) e^{+j\omega n} d\omega, \right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Suma infinită din această expresie fiind convergentă, poate interverti cu integrala, astfel că se ajunge la următoarea identitate:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{+j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{x_a} \left(\frac{\omega + 2k\pi}{T} \right) \right] e^{+j\omega n} d\omega, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (77)$$

De aici, se poate identifica imediat forma TCFD a versiunii eșantionate:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{x_a} \left(\frac{\omega + 2k\pi}{T} \right), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (78)$$

□ _____ (Propoziția 12.1)↑

Legătura dintre cele două TF, indicată de această propoziție, se numește și *formulă de eșantionare în frecvență* sau *formulă de aliere (aliasing)* (adică de suprapunere a benzilor de frecvență). De fapt, ultima denumire provine din următoarea definiție mai generală:

Definiția 12.1

Fie următoarele entități:

- Δc – o cantitate numerică pozitivă numită **cuantă** sau **increment**;
- f – o funcție care transformă cuanta într-un număr oarecare;
- F – o aplicație oarecare definită pe $\mathbb{R}$;
- β – un număr arbitrar;
- F_e – o nouă aplicație definită astfel:

$$F_e(\alpha, \Delta c) \stackrel{def}{=} f(\Delta c) \sum_{k \in \mathbb{Z}} F[(\alpha + k\beta)\Delta c] , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} . \quad (79)$$

Atunci relația de legătură dintre F și F_e se numește **formulă de aliere (aliasing)**.

Formula de aliere (78) demonstrată în Propoziția 12.1 poate sugera o regulă de alegere adecvată a perioadei de eșantionare, în așa fel încît conținutul de frecvențe al semnalului continuu să se regăsească și în cadrul versiunii sale eșantionate. Cu alte cuvinte, perioada de eșantionare trebuie aleasă în așa fel încît în suma relevantă de formula de aliere să rămînă doar un singur termen, adică, de exemplu, cel corespunzător lui $k = 0$. În acest caz, formula de aliere se simplifică sensibil:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \widehat{x_a}\left(\frac{\omega}{T}\right) , \quad \forall \omega \in [-\pi, +\pi] , \quad (80)$$

iar x este considerată o versiune *corect* eșantionată (discretizată) a lui x_a . Este destul de greu de satisfăcut restricția (80) dacă semnalul continuu inițial este de bandă nelimitată. Nu aceeași dificultate este prezentă și în cazul semnalelor continue de bandă limitată, caz pe care îl vom studia în cele ce urmează, printr-un exemplu sugestiv.

Să presupunem că semnalul continuu x_a are TCFC de tip ”fereastră triunghiulară” centrată în origine, de deschidere $\Omega_0 > 0$ și înălțime 1, ca în Figura 6. Expresia matematică a TCFC

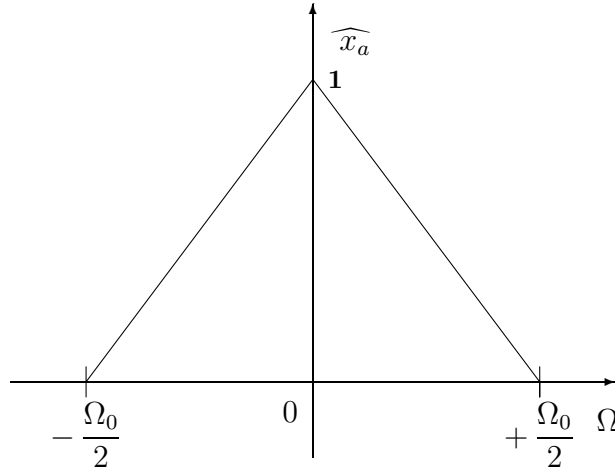


Figura 6: Fereastră spectrală triunghiulară de deschidere Ω_0 și amplitudine unitară.

asociate acestui semnal este următoarea:

$$\widehat{x}_a(\Omega) = \begin{cases} 0 & , \quad \Omega \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\Omega_0}{2}, +\frac{\Omega_0}{2}\right] \\ 1 + 2\frac{\Omega}{\Omega_0} & , \quad \Omega \in \left(-\frac{\Omega_0}{2}, 0\right) \\ 1 - 2\frac{\Omega}{\Omega_0} & , \quad \Omega \in \left[0, +\frac{\Omega_0}{2}\right) \end{cases} \quad (81)$$

În aceste condiții, modul de alegere al perioadei de eșantionare T este influențat de următoarea familie de TCFC aliate: $\left\{ \widehat{x}_a\left(\frac{\cdot + 2k\pi}{T}\right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$, unde, în cazul particular al acestui exemplu, fiecare element al familiei este definit prin:

$$\widehat{x}_a\left(\frac{\omega + 2k\pi}{T}\right) = \begin{cases} 0 & , \quad \omega \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\omega_0}{2} - 2k\pi, +\frac{\omega_0}{2} + 2k\pi\right] \\ 1 + \frac{4k\pi}{\omega_0} + 2\frac{\omega}{\omega_0} & , \quad \omega \in \left(-\frac{\omega_0}{2} - 2k\pi, 0\right) \\ 1 - \frac{4k\pi}{\omega_0} - 2\frac{\omega}{\omega_0} & , \quad \omega \in \left[0, +\frac{\omega_0}{2} - 2k\pi\right) \end{cases} \quad (82)$$

unde $\omega_0 \stackrel{not}{=} \Omega_0 T$. Această familie este formată din funcții cu suport compact (benzi limitate), care ar trebui să nu se suprapună, pentru a nu altera informația în frecvență prin însumarea descrisă de formula de aliere (78). Se constată că lărgimea de bandă caracteristică elementului generic al familiei este constantă și egală cu $\omega_0 = \Omega_0 T$, în timp ce banda de frecvențe este localizată după cum urmează:

$$Supp\left[\widehat{x}_a\left(\frac{\omega + 2k\pi}{T}\right)\right] = \left[-\frac{\omega_0}{2} - 2k\pi, +\frac{\omega_0}{2} + 2k\pi\right] \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (83)$$

Semnalul x_a va fi corect eșantionat dacă forma graficului TCFC asociate (din Figura 6) se regăsește nedistorsionată pe orice perioadă a graficului TCFD asociate versiunii discrete, x . Numai în acest caz informația în frecvență a semnalului continuu x_a va fi transportată integral și de versiunea sa discretizată, x .

Practic, se disting două cazuri posibile referitoare la alegerea lui T : unul în care valoarea lui T conduce la suprapunerea benzilor de frecvență ale familiei (82) și altul în care această valoare conduce la evitarea acestui fenomen. Vom analiza separat fiecare din aceste două cazuri.

A. Suprapunerea benzilor de frecvență

În acest caz, suporturile TCFC din suma de aliere (date de (83)) se intersectează între ele. De exemplu, este suficient ca numai suporturile adiacente să aibă intersecția nenulă pentru ca graficul TCFD a versiunii eșantionate să arate ca în Figura 7. Distorsionarea conținutului în frecvență către frecvențele înalte, relevată de acest grafic, este cunoscută sub numele de *fenomen de aliere* (*aliasing*). Practic, efectul fenomenului de aliere este coruperea semnalului eșantionat cu un zgomot de înaltă frecvență, avînd puterea spectrală determinată de puterea semnalului original la frecvențe joase; se spune, în acest caz, că frecvențele înalte *s-au aliat* cu cele joase pentru a distorsiona semnalul original.

Perioada de eșantionare T variază, în acest caz, în următoarele mulțimi:

1. $T > \frac{4\pi}{\Omega_0}$ (adică $\omega_0 > 4\pi$), situație care indică suprapunerea a cel puțin 3 benzi de frecvență consecutive pentru a descrie informația corespunzătoare unei anumite pulsații $\omega \in \mathbb{R}$. Acest fapt conduce la distorsionarea totală a graficului inițial a lui $\widehat{x}_a$, care nu se va mai regăsi, astfel, pe nici o sub-bandă din banda $[-\pi, +\pi]$ de pulsații normalizate.

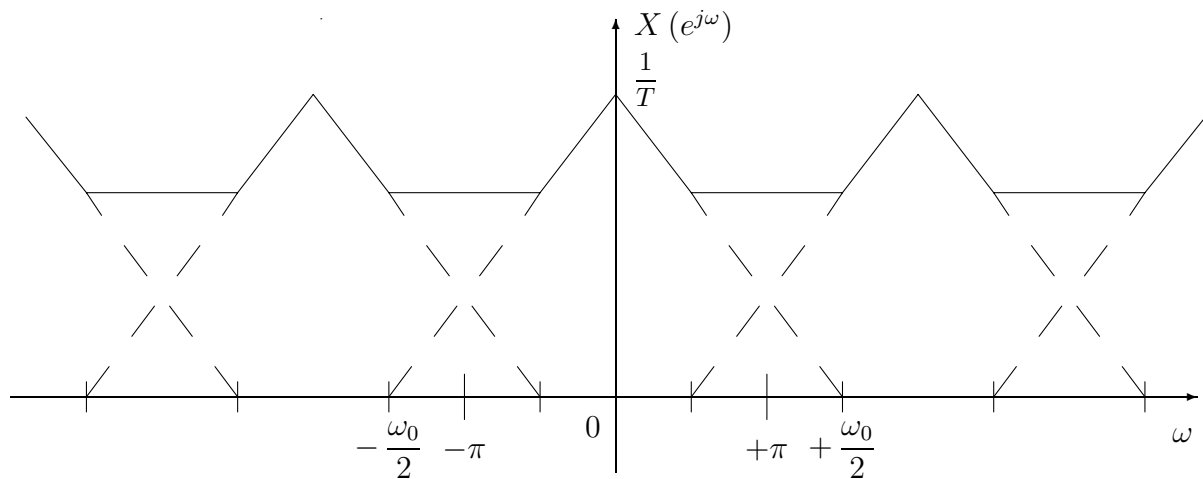


Figura 7: *Fenomenul de aliere: distorsionarea spectrului din zona frecvențelor înalte de către spectrul din zona frecvențelor joase.*

2. $T \in \left(\frac{2\pi}{\Omega_0}, \frac{4\pi}{\Omega_0}\right]$ (adică $\omega_0 \in (\pi, 2\pi]$), situație în care numai câte 2 benzi de frecvențe consecutive se pot suprapune, provocând palierul din Figura 7. În acest caz, există întotdeauna o sub-bandă din $[-\pi, +\pi]$ unde informația frecvențială inițială este reflectată fidel: $\left[\frac{\omega_0}{2} - 2\pi, 2\pi - \frac{\omega_0}{2}\right]$.

Ambele cazuri prezentate mai sus ilustrează o alegere necorespunzătoare a perioadei de eșantionare, fapt care provoacă distorsionarea informației în frecvență, adică apariția fenomenului de aliere. Una dintre consecințele negative importante ale acestui fenomen este și imposibilitatea reconstruirii semnalului continuu inițial folosind numai eșantioanele sale, deoarece versiunea sa discretizată este incapabilă să redea fidel "vibrațiile locale" (componentele de frecvență înaltă) prezente între momentele de eșantionare.

B. Dihotomia benzilor de frecvență

Condiția de nesuprapunere a benzilor TCFC aliate descrisă de relația (80) se exprimă în mod echivalent astfel:

$$0 < T \leq \frac{2\pi}{\Omega_0} \iff \frac{\omega_0}{2} \in (0, \pi] . \quad (84)$$

În cazul limită când $T = \frac{2\pi}{\Omega_0}$, benzile se ating în capete, dar aceasta nu produce distorsiuni ale graficului, deoarece $\widehat{x_a}$ este nulă pe frontiera suportului său (vezi Figura 8). De notat totuși

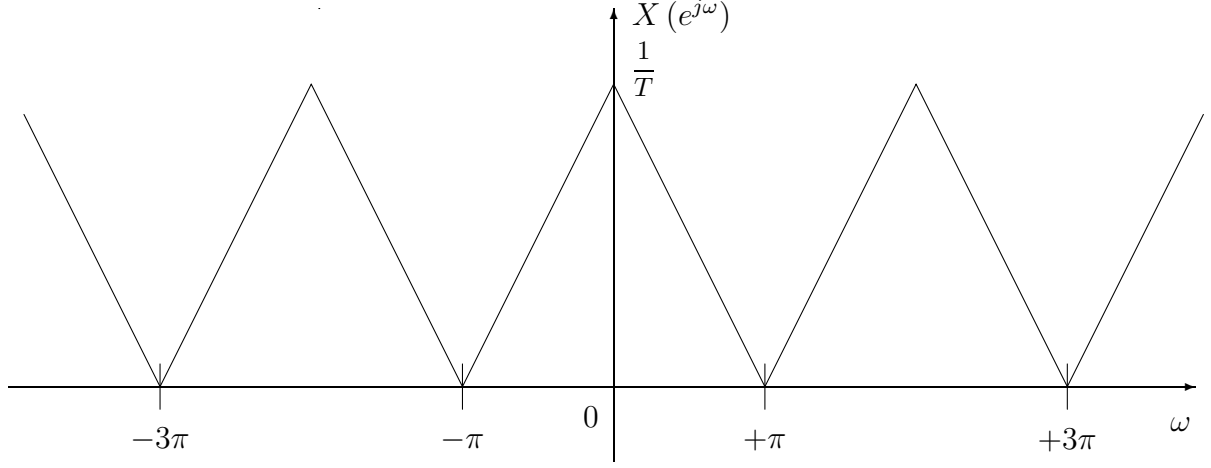


Figura 8: *Cazul limită al eșantionării critice: $T = \frac{2\pi}{\Omega_0}$.*

că, în acest caz, pentru ferestre spectrale care nu își anulează valorile în capetele suportului, mici distorsiuni pot apare în punctele $\{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$, ca urmare a însumării acestor valori.

În celălalt caz, când $T < \frac{2\pi}{\Omega_0}$, benzile de frecvențe sînt total dihotomice, fapt care permite ilustrarea graficului TCFD ca în Figura 9. Datorită acestui fapt, condiția (84) conduce, în

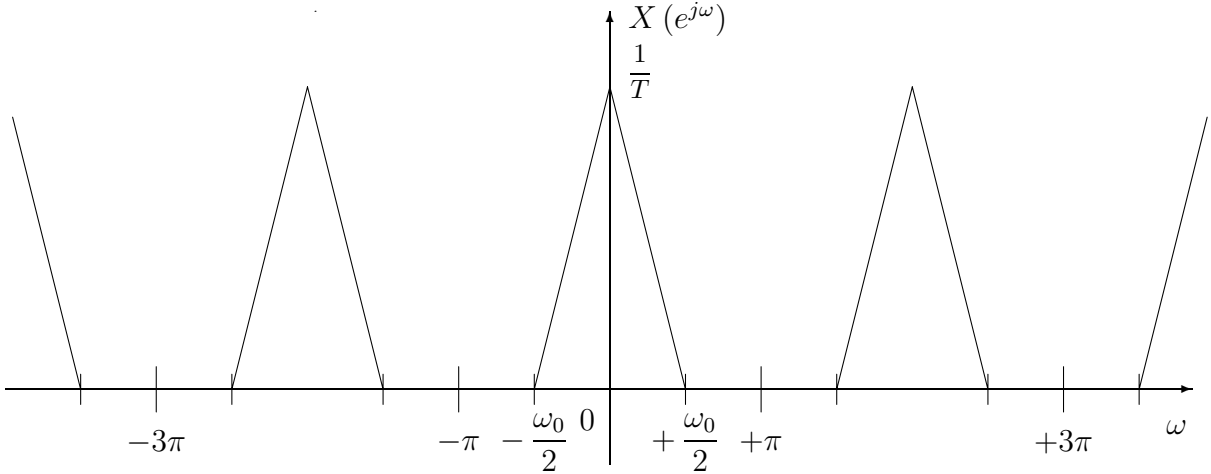


Figura 9: *Cazul eșantionării corecte: $T < \frac{2\pi}{\Omega_0}$.*

particular, la următoarea exprimare a formulei de aliere (80):

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \widehat{x_a}\left(\frac{\omega}{T}\right) , \quad \forall \omega \in [-\pi, +\pi] . \quad (85)$$

Această relație descrie într-o manieră analitică ceea ce graficele anterioare au ilustrat pe cale intuitivă: comportarea în frecvență a semnalului continuu este fidel și integral redată de comportarea în frecvență a versiunii sale discretizate, pe orice perioadă a TCFC asociate. Benzii de pulsații $\left[-\frac{\Omega_0}{2}, +\frac{\Omega_0}{2}\right]$ a TCFC îi corespunde următoarea familie de (sub-)benzi a TCFC asociate: $\left\{\left[2k\pi - \frac{\omega_0}{2}, 2k\pi + \frac{\omega_0}{2}\right]\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Practic, din această familie, cea mai interesantă este (sub-)banda "principală", $\left[-\frac{\omega_0}{2}, +\frac{\omega_0}{2}\right]$ (din cadrul perioadei principale).

Această discuție conduce la concluzia că eșantionarea unui semnal continuu este corect efectuată dacă perioada de eșantionare verifică relația (84), care mai poate fi exprimată echivalent prin:

$$\nu \stackrel{\text{not}}{=} \frac{1}{T} \geq \frac{\Omega_0}{2\pi}. \quad (86)$$

Cantitatea $\nu_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Omega_0}{2\pi}$ se numește *rata (critică) de eșantionare a lui Nyquist*. Ea nu este altceva decât dublul frecvenței celei mai înalte prezente în spectrul semnalului continuu (pulsăția maximală din exemplul anterior este $\Omega_0/2$, deci frecvența maximală este $\frac{\Omega_0}{4\pi}$). Regăsim, deci, o regulă de alegere a perioadei/frecvenței (ratei) de eșantionare corectă, care este atribuită lui Shannon și Nyquist și care este valabilă în cazul general al semnalelor continue de bandă limitată (nu numai în cazul semnalului continuu din exemplul anterior):

- *frecvența de eșantionare trebuie să fie cel puțin egală cu rata critică a lui Nyquist.*

În cazul semnalelor practice de bandă limitată, această regulă de eșantionare corectă trebuie respectată întotdeauna, pentru a minimiza erorile de reprezentare. În Figura 10 am ilustrat concluzia acestui paragraf luând în considerare anvelopa spectrală a unui semnal vocal (avînd pînă la 5 formante principale). De regulă, pentru un astfel de semnal, $\Omega_0/4\pi$ variază în mulțimea

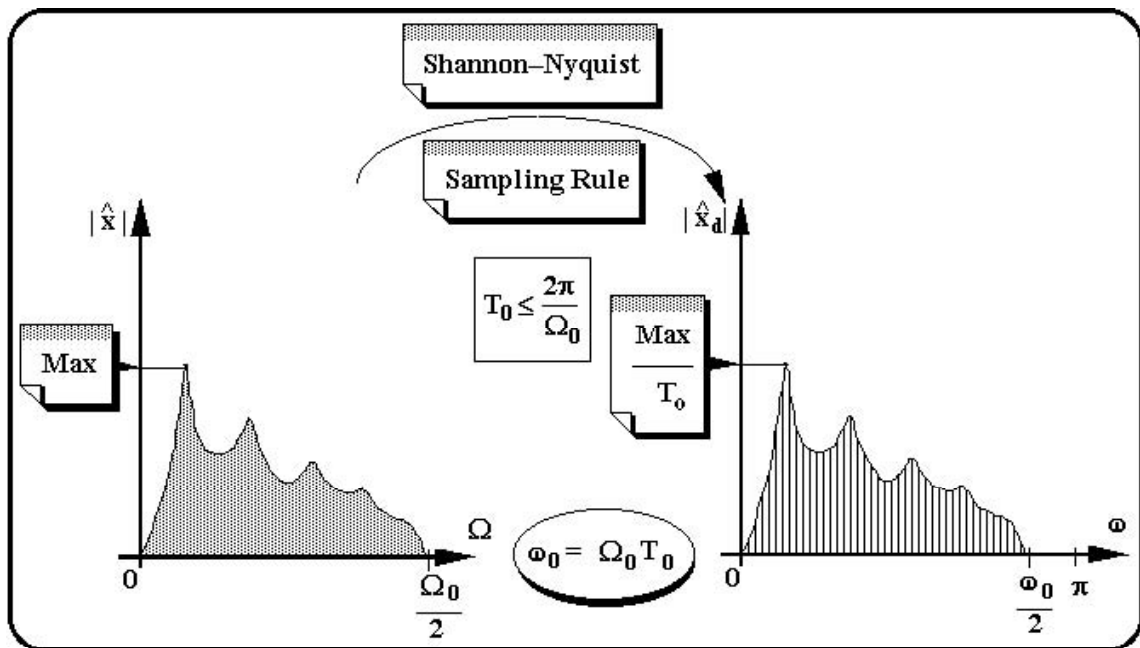


Figura 10: Regula de eșantionare corectă a lui Shannon-Nyquist, în cazul semnalelor de bandă limitată.

$\{4, 8, 16\} kHz$, în funcție de numărul formantelor. Frecvențele de eșantionare cele mai utilizate sînt, în acest caz, următoarele: $8 kHz$ – pentru semnale vocale în bandă telefonică ($0 - 4 kHz$); $16 kHz$ – pentru semnale vocale de bandă extinsă ($0 - 8 kHz$); $32 kHz$ – pentru semnale vocale în bandă largă ($0 - 16 kHz$); peste $32 kHz$ (de exemplu, $44.1 kHz$) – pentru semnale vocale în bandă largă, de mare fidelitate, destinate stocării pe discuri compacte (CD).

12.3 Despre interpolarea semnalelor de bandă limitată, corect eşantionate

Corecta eşantionare a unui semnal continuu implică şi posibilitatea reconstituirii lui cu ajutorul unei formule de interpolare, plecînd de la versiunea sa discretizată. Teorema 12.1 (de la pagina 46) stabileşte deja o formulă de interpolare exactă valabilă în acest caz. Vom arăta în continuare cum se verifică această teoremă în cazul exemplului studiat mai sus (fereastra spectrală triunghiulară).

Să considerăm că semnalul x_a avînd TCFC de forma indicată în Figura 6 şi relaţia (81) este corect eşantionat, versiunea sa discretizată fiind notată cu x . Perioada de eşantionare T satisface, atunci, următoarea inegalitate: $0 < \Omega_0 \leq \frac{2\pi}{T}$, iar imaginea prin TCFC a lui x este exprimată de relaţia:

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \widehat{x_a}(\Omega), \quad \forall \Omega \in \left[-\frac{\pi}{T}, +\frac{\pi}{T}\right]. \quad (87)$$

Pentru a reveni la x_a , se poate utiliza formula TCFC inverse, cu limite finite de integrare, ţinînd cont că suportul ei este compact şi inclus în intervalul $\left[-\frac{\pi}{T}, +\frac{\pi}{T}\right]$:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x_a}(\Omega) e^{+j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} \widehat{x_a}(\Omega) e^{+j\Omega t} d\Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pe acest interval, însă, TCFC este proporţională cu TCFC (vezi (87)), astfel că egalitatea de mai sus poate continua cu:

$$x_a(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} X(e^{j\Omega T}) e^{+j\Omega t} d\Omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-j\Omega T n} \right) e^{+j\Omega t} d\Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

După intervertirea sumei cu integrala şi evaluarea acesteia din urmă, se ajunge la următoarea exprimare:

$$x_a(t) = \frac{T}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} e^{j\Omega(t-nT)} d\Omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \frac{\sin\left(\frac{t-nT}{T} \pi\right)}{\frac{t-nT}{T} \pi}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Practic, deoarece $x[n] = x_a(nT)$, am obţinut următoarea formulă de interpolare exactă:

$$x_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_a(nT) Sa\left(\frac{t-nT}{T} \pi\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ea are aceeaşi formă cu cea din Teorema 12.1 şi pune în evidenţă utilizarea unui nucleu de interpolare de tip *sinus atenuat (cardinal)*. Exactitatea acestei formule se datorează în principal satisfacerii condiţiei de eşantionare corectă a lui Shannon-Nyquist.

Aşa cum am mai precizat, nucleul de tip "sinus atenuat" poate fi înlocuit cu alte nuclee. În general, orice formulă de tipul:

$$x_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \phi_n(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

unde: $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ este familia coeficienţilor de interpolare, iar $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ este familia funcţiilor elementare de interpolare, de regulă de acelaşi tip. În cazul particular al formulei din Teorema 12.1, se verifică uşor că: $\phi \equiv Sa$, iar $c_n = x_a(nT)$. Este posibilă chiar păstrarea caracterului exact al formulei de interpolare în condiţiile utilizării unor nuclee speciale. De exemplu, în [11] a fost dedusă o astfel de formulă, în care valorile nucleului de interpolare sînt generate recursiv, folosind *undine discrete*.

Totuşi, alegerea nucleului de interpolare de tip "sinus atenuat", are mai multe avantaje practice, exceptînd cel al exactităţii formulei de interpolare.

Unul dintre ele este acela că valorile coeficienților de interpolare se obțin direct prin eșantionarea (corectă a) semnalului continuu și nu prin intermediul altor operații (cum ar fi, de exemplu, produsul scalar). Această operație este mult mai ușor de implementat.

Un alt avantaj practic este legat de comportarea intrare-ieșire a sistemelor. Să considerăm că semnalul continuu stabil x_a stimulează intrarea unui SLID caracterizat de funcția pondere h_a , de asemenea stabilă. Răspunsul sistemului se poate evalua cu ajutorul operației de convoluție:

$$y_a(t) = (x_a \star h_a)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau) h_a(t - \tau) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dacă se alege o perioadă de eșantionare T astfel încît să se evite fenomenul de aliere pentru oricare dintre semnalele continue de mai sus, atunci se poate arăta că sistemul discret avînd secvența pondere $h[n] \stackrel{\text{def}}{=} h_a(nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ este tot liniar și invariant la deplasări temporale. În plus, dacă $x[n] \stackrel{\text{def}}{=} x_a(nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ și $y[n] \stackrel{\text{def}}{=} y_a(nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, atunci ieșirea corespunzătoare intrării x este chiar y :

$$y[n] = (x \star h)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] h[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

De fapt, această proprietate arată că, în condițiile unei eșantionări corecte, operația de convoluție este conservată prin discretizare, ceea ce implică posibilitatea de a simula funcționarea SLID continue cu ajutorul SLID discrete, implementabile pe un mijloc automat de calcul.

Dezavantajul alegerii nucleului de tip "sinus atenuat" provine din restricția impusă de cunoașterea apriorică a benzii de frecvență în care semnalul continuu transportă o informație relevantă. Chiar dacă semnalul este de bandă limitată, de cele mai multe ori, determinarea precisă a limitei ei superioare este dificil de efectuat. Este cazul, de exemplu, al semnalelor de bandă îngustă sau al celor cu informația în frecvență concentrată către această limită. Pe de altă parte, chiar și în cazul cunoașterii acestei limite, ea poate conduce la utilizarea unei rate Nyquist imposibil de implementat în practică. Cu toate acestea, nivelul tehnologic actual permite eșantionarea corectă a multor semnale reale "dificile" (adică de bandă largă), cum ar fi: semnalul vocal, seismic, cardiologic, acustic submarin, etc.

★

Acest capitol a prezentat succint principalele principii legate de eșantionarea și interpolarea semnalelor. Eșantionarea rămîne sursa principală de generare a semnalelor discrete cu care se operează în practică și de aceea, în afara celor ilustrate în acest context, există numeroase alte probleme și rezultate legate de aceasta. De exemplu, există soluții date problemei de eșantionare și în cazul semnalelor de bandă nelimitată sau soluții complexe, cu perioadă de eșantionare variabilă în timp, în funcție de conținutul real de frecvențe al semnalului continuu. Dar, majoritatea aplicațiilor actuale sînt dezvoltate pe baza principiilor generale de eșantionare relevate în cadrul acestui capitol.

A Transformarea $\mathcal{Z}$ în Prelucrarea Semnalelor

A.1 Definiții și proprietăți elementare

Studiul sistemelor liniare continue este fundamental legat de Transformarea Laplace, care constituie un instrument deosebit de util în rezolvarea ecuațiilor diferențiale caracteristice acestui tip de sisteme. O mare parte a definițiilor și proprietăților ce însoțesc această transformare pot fi extinse și pentru semnalele discrete, noțiunea de "sistem" rămânând transparentă.

În cazul sistemelor liniare discrete, utilizarea aceleiași transformări ar conduce la o serie de neajunsuri prin pierderea unor proprietăți importante și prin tendința de a furniza interpretări greoaie sau incorecte. De aceea, analogul natural al Transformării Laplace este, în acest caz, *Transformarea $\mathcal{Z}$* , care va fi definită în cele ce urmează.

Fie $x \in \mathcal{S}_d$ o secvență oarecare.

Definiția A.1

Se numește **Transformată $\mathcal{Z}$ (directă)** asociată secvenței discrete x aplicația de mai jos, definită pe **zona de convergență** $\mathcal{A}_c(x)$ (determinată de x):

$$\left[\begin{array}{ll} X : \mathcal{A}_c(x) & \rightarrow \mathcal{C} \\ z & \mapsto X(z) \stackrel{def}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] z^{-n} \end{array} \right.$$

Operatorul:

$$\left[\begin{array}{ll} \mathcal{Z} : \mathcal{S}_d & \rightarrow \bigsqcup_{x \in \mathcal{S}_d} Hom(\mathcal{A}_c(x), \mathcal{C}) \\ x & \mapsto \mathcal{Z}(x) \stackrel{def}{=} X \end{array} \right.$$

(unde " X " este aplicația de mai sus) se numește **Transformare $\mathcal{Z}$ (directă)** aplicată secvențelor discrete.

Practic, terminologia utilizată mai sus este similară celei din capitolele precedente pentru Transformata (Transformarea) Fourier continuă. Nici notația " X " nu este întâmplătoare, căci, dacă se particularizează variabila complexă z prin: $z = e^{j\omega}$, unde $\omega \in \mathbb{R}$, atunci Definiția A.1 conduce exact la definiția TCFC. Astfel, TCFC se obține prin restricționarea domeniului de definiție al Transformatei $\mathcal{Z}$ (care este zona de convergență a seriei de puteri, $\mathcal{A}_c(x)$, determinată de fiecare secvență discretă în parte) la cercul unitar din planul complex, (notat cu " $\partial\mathcal{U}$ "; cu " $\mathcal{U}$ " s-a notat discul unitar închis, iar " ∂ " este operația de luare a frontierei). Pentru aceasta, este necesar ca $\partial\mathcal{U}$ să aparțină zonei de convergență.

Pentru a studia buna definire a acestei transformate, este util să considerăm că $\mathcal{Z}(x) \equiv X$ are 2 componente:

- Componenta *principală* (Laurent): $X_L(z) \stackrel{def}{=} \sum_{n \geq 0} x[n] z^{-n}$;
- Componenta *analitică* (Taylor): $X_T(z) \stackrel{def}{=} \sum_{n < 0} x[n] z^{-n}$.

Componenta analitică are o importanță mai redusă, mai ales că, în Prelucrarea (Numerică) a Semnalelor se lucrează adesea cu "semnale cauzale" ($x(n) = 0, \forall n < 0$). Totuși, această componentă trebuie luată de asemenea în considerare la exprimarea condițiilor de convergență pentru seria de definiție. Pentru a evalua zona de convergență, se apelează la rezultatele cunoscute din Analiza complexă. Astfel, forma acestei zone este de tip "coroană circulară" centrată în origine, cu razele corespondente date de formulele lui Cauchy:

- Raza inferioară: $\mathcal{R}_-(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x[n]|}$;
- Raza superioară: $\mathcal{R}_+(x) = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x[-n]|} \right)^{-1}$.

Zona de convergență a unei secvențe stabile include cercul unitar, $\mathcal{U}$ (adică $\mathcal{R}_-(x) \leq 1$ și $\mathcal{R}_+(x) \geq 1$), iar raza superioară a unei secvențe cauzale este infinită.

Setul de formule duale (de analiză și de sinteză) ale Transformării Fourier sugerează căutarea unei transformări "inverse" (sintetice) și pentru Transformarea $\mathcal{Z}$. Rezultatul matematic central pe baza căruia se poate defini Transformarea $\mathcal{Z}$ inversă este *Teorema integrală a lui Cauchy*, potrivit căreia:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} z^{k-1} dz = \delta_0[k], \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

unde γ este un contur închis ce înconjoară originea planului complex, iar δ_0 este impulsul unitar discret (simbolul lui Kronecker). Prin convenție, conturul γ se consideră parcurs în sens direct trigonometric – acesta fiind sensul săgeții ce însoțește integrala curbilinie. Formula lui **Cauchy** arată că:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi j \quad \& \quad \oint_{\gamma} z^k dz = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}.$$

Fie $x \in \mathcal{S}_d$ o secvență pentru care zona de convergență a Transformatei $\mathcal{Z}$ este nevidă: $\mathcal{A}_c(x) \neq \emptyset$. Dacă înmulțim expresia Transformatei $\mathcal{Z}$ a lui x cu cantitatea " z^{k-1} ", pentru $z \in \mathcal{A}_c(x)$, se obține:

$$z^{k-1} X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] z^{k-n-1}.$$

Această expresie o putem integra de-a lungul unui contur închis γ , care se află în întregime în zona de convergență $\mathcal{A}_c(x)$ și care înconjoară originea. Datorită acestui fapt, suma infinită (care este absolut convergentă pe $\mathcal{A}_c(x)$) poate fi intervertită cu integrala curbilinie, rezultatul final fiind exact eșantionul de ordin " k " al secvenței inițiale, x :

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{k-1} dz = x[k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Rezultatul la care s-a ajuns arată cum se poate recupera secvența originală cunoscând Transformarea $\mathcal{Z}$ directă și permite definirea Transformării inverse dorite:

Definiția A.2

Se numește **Transformată $\mathcal{Z}$ inversă** asociată Transformatei $\mathcal{Z}(x) \equiv X$, aplicația:

$$\left[\begin{array}{l} x : \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma \\ n \mapsto x[n] \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{n-1} dz, \end{array} \right.$$

unde γ este o curbă închisă ce înconjoară originea și se află situată în întregime în zona de convergență a lui X .

Operatorul:

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{Z}^{-1} : \mathcal{A}_{\mathcal{Z}} \rightarrow \mathcal{S}_d \\ X \mapsto \mathcal{Z}^{-1}(X) \stackrel{def}{=} x \end{array} \right.$$

(unde " x " este secvența de mai sus, iar " $\mathcal{A}_{\mathcal{Z}}$ " – mulțimea Transformațelor $\mathcal{Z}$ avînd zona de convergență nevidă) se numește **Transformare $\mathcal{Z}$ inversă**.

Relația din această definiție se mai numește și *formulă de inversiune*. În general, calculul integralei curbilinii este destul de dificil de efectuat. De regulă, curba γ este un cerc, deoarece admite o parametrizare naturală. De exemplu, cercul centrat în origine, de rază " r ", poate fi parametrizat astfel: $z = r e^{j\omega}$, cu $\omega \in [-\pi, +\pi)$. Dacă acest cerc este inclus în zona de

convergență a Transformatei $\mathcal{Z}$, atunci formula Transformatei inverse devine:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{n-1} dz = \frac{r^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(r e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Această formulă seamănă foarte mult cu cea a Transformatei Fourier inverse. Dacă cercul unitar se găsește în interiorul zonei de convergență, atunci ea exprimă exact Transformata Fourier inversă.

Un caz particular interesant este cel al Transformatei $\mathcal{Z}$ de tip rațional. Recuperarea secvenței originale beneficiază în acest caz de utilizarea Teoremei reziduurilor (adică valoarea lui $x[n]$ este dată de suma reziduurilor lui $X(z) z^{n-1}$ situate în interiorul domeniului delimitat de conturul închis γ). Dacă z_0 este un pol al lui $X(z) z^{n-1}$ de multiplicitate $m_0 \in \mathbb{N}$, atunci:

$$X(z) z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^{m_0}},$$

unde funcția rațională ψ nu mai are poli în $z = z_0$. Dacă z_0 se situează în interiorul domeniului delimitat de conturul γ (dar nu pe contur), atunci reziduul lui $X(z) z^{n-1}$ în acest punct este dat de formula următoare:

$$\text{Rez} \left[X(z) z^{n-1} \right] \Big|_{z=z_0} = \frac{1}{(m_0 - 1)!} \frac{d^{m_0-1}}{dz^{m_0-1}} [\psi(z)] \Big|_{z=z_0}.$$

Dacă z_0 este pol de ordin 1, atunci formula anterioară se simplifică sensibil:

$$\text{Rez} \left[X(z) z^{n-1} \right] \Big|_{z=z_0} = \psi(z_0).$$

Notă

- De regulă, formula de inversiune este utilă pentru evaluarea eșantioanelor "cauzale" ale secvenței x (adică $x[n]$, cu $n \geq 1$). În cazul celorlalte eșantioane ("anticauzale"), dacă se utilizează Teorema reziduurilor, apare un pol suplimentar: $z = 0$, al cărui ordin depinde de cel al eșantionului în calcul. Acest fapt este un inconvenient, deoarece calculul reziduului trebuie desfășurat pentru un pol cu ordinul dependent de rangul eșantionului a cărei valoare se calculează. Polul este același ($z = 0$), dar reziduul asociat trebuie recalculat la fiecare pas. Se poate evita acest lucru dacă se utilizează următorul artificiu matematic: în formula de inversiune, se efectuează schimbarea de variabilă complexă $z = \frac{1}{\zeta}$ (deci: $dz = -\frac{d\zeta}{\zeta^2}$). Aceasta conduce la următoarea formulă echivalentă:

$$x[n] = -\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma'} X\left(\frac{1}{\zeta}\right) \zeta^{-n+1} \zeta^{-2} d\zeta = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma'} X\left(\frac{1}{\zeta}\right) \zeta^{-n-1} d\zeta, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Noul contur, γ' , este simetric cu γ față de cercul unitar ($\partial\mathcal{U}$) și, de aceea, sensul său de parcurgere este opus celui convențional (fapt indicat de săgeata integralei). Dacă $n \leq -1$, în vechea versiune a formulei de inversiune, polul din origine are multiplicitatea crescătoare cu $n \rightarrow \infty$, ceea ce face ca ordinul derivatei din relația de calcul a reziduului să fie și el crescător. Practic, la fiecare pas, reziduul trebuie recalculat. Noua formulă inhibă acest efect. Chiar dacă $X\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ posedă un pol în origine, multiplicitatea lui este finită și nu depinde de ordinul eșantionului asupra căruia se lucrează.

Dacă γ este un cerc de rază r , atunci γ' este un cerc de rază $\frac{1}{r}$ (cercurile sînt invariante la transformarea prin inversiune). Aceasta face ca polii lui $X(z)$ care se aflau în afara domeniului închis de γ să producă poli ai lui $X\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ din interiorul domeniului închis de γ' și reciproc. Inversiunea poate produce poli (zerouri) adiționali (adiționale) în punctele z_0 și z_∞ (punct situat pe cercul de la infinit), dar acest lucru nu este foarte deranjant.

În funcție de forma Transformatei $\mathcal{Z}$ a lui x , se pot utiliza și alte tehnici speciale de calcul al integralei curbilini din formula de inversiune.

A.2 Proprietăți fundamentale

Transformarea $\mathcal{Z}$ posedă o serie de proprietăți fundamentale de calcul, similare Transformării Laplace. În tabelul de mai jos, prezentăm aceste proprietăți. De notat că zonele de convergență indicate pe ultima coloană sînt minimale, ele putînd fi mai mari în anumite cazuri particulare de semnale, dar, oricum, nedepășind frontiera.

Tabelul 2: Sumarul proprietăților fundamentale ale Transformatei $\mathcal{Z}$.

Secvență	Transformată $\mathcal{Z}$	Zonă de convergență
$x[n]$	$X(z)$	$\mathcal{R}_-(x) < z < \mathcal{R}_+(x)$
$ax[n] + by[n]$	$aX(z) + bY(z)$	$\max\{\mathcal{R}_-(x), \mathcal{R}_-(y)\} < z < \min\{\mathcal{R}_+(x), \mathcal{R}_+(y)\}$
$x[n + m]$	$z^m X(z)$	$\mathcal{R}_-(x) < z < \mathcal{R}_+(x)$
$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	$ a \mathcal{R}_-(x) < z < a \mathcal{R}_+(x)$
$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$\mathcal{R}_-(x) < z < \mathcal{R}_+(x)$
$\overline{x[n]}$	$\overline{X(\bar{z})}$	$\mathcal{R}_-(x) < z < \mathcal{R}_+(x)$
$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$\frac{1}{\mathcal{R}_+(x)} < z < \frac{1}{\mathcal{R}_-(x)}$
$x_e[n]$	$\frac{X(z) + \overline{X\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}}{2}$	$\max\left\{\mathcal{R}_-(x), \frac{1}{\mathcal{R}_+(x)}\right\} < z < \min\left\{\mathcal{R}_+(x), \frac{1}{\mathcal{R}_-(x)}\right\}$
$x_o[n]$	$\frac{X(z) - \overline{X\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}}{2}$	$\max\left\{\mathcal{R}_-(x), \frac{1}{\mathcal{R}_+(x)}\right\} < z < \min\left\{\mathcal{R}_+(x), \frac{1}{\mathcal{R}_-(x)}\right\}$
$Re(x[n])$	$\frac{X(z) + \overline{X(\bar{z})}}{2}$	$\mathcal{R}_-(x) < z < \mathcal{R}_+(x)$
$Im(x[n])$	$\frac{X(z) - \overline{X(\bar{z})}}{2j}$	$\mathcal{R}_-(x) < z < \mathcal{R}_+(x)$

A.3 Teorema directă de convoluție

Problema convoluției din cadrul Prelucrării Numerice a Semnalelor poate fi abordată și din perspectiva Transformatei $\mathcal{Z}$.

Așa cum era de așteptat, reacția acestei transformate față de operația de convoluție este similară celei ilustrate în cadrul proprietăților TCFD.

Teorema A.1 (Teorema directă de convoluție)

Fie $x, y \in \mathcal{S}_d$ două secvențe discrete alese în așa fel încît produsul lor de convoluție să fie corect definit. Atunci:

$$\mathcal{Z}(x \star y) \equiv \mathcal{Z}(x) \cdot \mathcal{Z}(y) \quad (88)$$

pe o zonă comună de convergență.

Demonstrație

↓

Vom deduce relația (88) prin calcul direct, plecând de la definiția Transformării $\mathcal{Z}$ a secvenței $x \star y$. Zona de convergență a acestei secvențe este următoarea coroană circulară (incluzând, eventual, și una sau ambele frontiere ale acesteia):

$$\max \{ \mathcal{R}_-(x), \mathcal{R}_-(y) \} < |z| < \min \{ \mathcal{R}_+(x), \mathcal{R}_+(y) \} .$$

Intersecția dintre zona de convergență de mai sus și zonele de convergență ale secvențelor implicate este nevidă deoarece ea conține cel puțin cercul unitar.

Astfel, printr-o grupare adecvată a termenilor, se poate scrie relația de mai jos:

$$\mathcal{Z}(x \star y)(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} y[n - k] z^{k-n} \right) z^{-k} .$$

Schimbarea de indice $m = [n - k]$ conduce exact la relația din enunț (sumele fiind absolut convergente în coroana circulară specificată mai sus):

$$\mathcal{Z}(x \star y)(z) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] z^{-k} \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} y[m] z^{-m} \right) = \mathcal{Z}(x) \cdot \mathcal{Z}(y) .$$

□ _____ (Teorema A.1)↑

Dacă se particularizează formula de convoluție din această teoremă pentru valori ale variabilei complexe situate pe cercul unitar, se regăsește Teorema directă de convoluție relativă la TCFC (Teorema 11.1).

A.4 Teorema de convoluție complexă

Semnalele continuele stabile posedă o interesantă proprietate relativ la produsul de convoluție, definit după cum urmează:

$$(f \star g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int f(\tau) g(t - \tau) d\tau , \quad \forall t \in \mathbb{R} . \quad (89)$$

Aici, $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, deci TF ale acestor semnale sînt bine definite ca în Definiția 10.1. Mai, mult, aceste transformate, notate cu $\hat{f}$, respectiv $\hat{g}$ sînt tot semnale continuele stabile, fapt care conduce la buna definire a produsului lor de convoluție:

$$(\hat{f} \star \hat{g})(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int \hat{f}(\Lambda) \hat{g}(\Omega - \Lambda) d\Lambda , \quad \forall \Omega \in \mathbb{R} .$$

În aceste condiții, Problema convoluției relevă posibilitatea de a exprima nu numai TCFC a produsului de convoluție a două semnale continuele stabile, ci și a produsului lor clasic. Astfel, se poate arăta cu ușurință (folosind și cunoscuta Teoremă a lui Fubini) că:

$$\widehat{f \star g} \equiv \frac{1}{\eta} \hat{f} \cdot \hat{g} ; \quad (90)$$

$$\widehat{f \cdot g} \equiv \eta \hat{f} \star \hat{g} . \quad (91)$$

(În aceste relații, operația de echivalență este, de fapt, "egalitatea aproape peste tot".) Ultima identitate reprezintă o soluție dată Problemei inverse de convoluție. Atributul "inversă" provine de la faptul că, în realitate, (91) este echivalentă cu:

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \star \hat{g}) = \frac{1}{\eta} \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) \cdot \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) = \frac{1}{\eta} f \cdot g ,$$

unde $\mathcal{F}^{-1}$ este operatorul Fourier invers din relația (53).

Egalitățile (90) și (91) reflectă o relație de dualitate între domeniile ”timp” și ”frecvență”, care nu se mai poate regăsi și în cazul semnalelor discrete stabile. Aceasta deoarece, pentru a evalua TCFD asociată produsului a două secvențe discrete stabile, este necesară definirea unei alte operații de convoluție la nivelul operatorilor TCFD. În loc de a rezolva Problema inversă de convoluție numai pentru cazul operatorului TCFD, vom apela direct la soluția generală oferită de Transformata $\mathcal{Z}$. Ea poartă numele de *Teoremă de convoluție complexă*:

Teorema A.2 (Teorema de convoluție complexă)

Fie $x, y \in \mathcal{S}_d$ alese în așa fel încât secvența $w \stackrel{\text{def}}{=} xy$ să aibă următoarea proprietate: intersecția dintre zona de convergență $\mathcal{A}_c(w)$ și coroana circulară

$$\mathcal{R}_-(x)\mathcal{R}_-(y) \leq |z| \leq \mathcal{R}_+(x)\mathcal{R}_+(y)$$

este nevidă. Se notează prin X, Y și W imaginile prin operatorul $\mathcal{Z}$ ale secvențelor x, y și, respectiv, w . De asemenea, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ va simboliza intersecția celor două coroane circulare de mai sus. Fie $z \in \mathcal{A}$ arbitrar fixat. Atunci:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(v) Y\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v}, \quad (92)$$

unde γ este un contur închis ce înconjoară originea, inclus în zona de convergență comună a lui $X(v)$ și $Y\left(\frac{z}{v}\right)$.

Demonstrație _____ ↓

Relația din enunț va fi demonstrată prin calcul direct, plecînd de la definiția Transformatei $\mathcal{Z}$ asociate lui w :

$$W(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] y[n] z^{-n}, \quad \forall z \in \mathcal{A}_c(w)$$

și de la următoarea consecință a relației integrale a lui Cauchy:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(v) v^{n-1} dv, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

unde γ este o curbă închisă ce înconjoară originea, inclusă în $\mathcal{A}_c(x)$.

Fie $z \in \mathcal{A}_c(w)$ arbitrar fixat. Combinînd cele două relații de mai sus, rezultă:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n \in \mathbb{Z}} y[n] \left(\oint_{\gamma} X(v) v^{n-1} dv \right) z^{-n} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \oint_{\gamma} X(v) y[n] \left(\frac{v}{z} \right)^n \frac{dv}{v}. \end{aligned}$$

În acest context, integrala curbilinie poate interverti cu suma infinită numai dacă γ este o curbă închisă aleasă la intersecția dintre $\mathcal{A}_c(x)$ și coroana circulară:

$$\mathcal{R}_-(y) < \left| \frac{z}{v} \right| < \mathcal{R}_+(y).$$

Această restricție este îndeplinită dacă:

$$\mathcal{R}_-(x) < |v| < \mathcal{R}_+(x) \quad \& \quad \frac{|z|}{\mathcal{R}_+(y)} < |v| < \frac{|z|}{\mathcal{R}_-(y)},$$

ceea ce impune ca numărul z să fie ales în așa fel încît $z \in \mathcal{A}_c(w)$ și:

$$\mathcal{R}_+(x) \geq \frac{|z|}{\mathcal{R}_+(y)} \quad \& \quad \mathcal{R}_-(x) \leq \frac{|z|}{\mathcal{R}_-(y)} \iff \mathcal{R}_-(x)\mathcal{R}_-(y) \leq |z| \leq \mathcal{R}_+(x)\mathcal{R}_+(y) .$$

Ipoteza teoremei confirmă posibilitatea alegerii numărului z în această zonă de convergență de intersecție, notată cu $\mathcal{A}$.

Atunci, conturul γ poate fi ales ca în enunțul teoremei, caz în care:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(v) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} y[n] \left(\frac{z}{v} \right)^{-n} \right) \frac{dv}{v} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(v) Y \left(\frac{z}{v} \right) \frac{dv}{v} .$$

Aceasta demonstrează complet teorema.

□ _____ (Teorema A.2)↑

Relația (92) din teorema anterioară se aseamănă cu o operație de convoluție. Această asemănare devine mai vizibilă dacă particularizăm conturul γ printr-un cerc de rază ρ și dacă numărul z este descris în forma polară ($z = r e^{j\varphi}$):

$$W(r e^{j\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\rho e^{j\theta}) Y\left(\frac{r}{\rho} e^{j(\varphi-\theta)}\right) d\theta , \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} .$$

Mai mult, dacă este posibil ca $r = \rho = 1$ (cazul secvențelor de semnal stabile), atunci obținem o soluție a Problemei inverse de convoluție relativ la operatorul TCFD:

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\nu}) Y(e^{j(\omega-\nu)}) d\nu , \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Integrala de mai sus se numește și *operație de convoluție continuă periodică*, notată prin $\tilde{\star}$:

$$(X \tilde{\star} Y)(e^{j\omega}) \stackrel{def}{=} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\nu}) Y(e^{j(\omega-\nu)}) d\nu , \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Soluția Problemei inverse de convoluție se exprimă atunci astfel:

$$TCFD(xy) \equiv \frac{1}{2\pi} TCFD(x) \tilde{\star} TCFD(y) .$$

B Exerciții propuse

Exercițiul 1

Să se verifice relațiile de ortogonalitate (18) (de la pagina 13) ale bazei armonice canonice a spațiului $L^2([-\pi, +\pi])$.

Exercițiul 2

Fie armonica de amplitudine $A > 0$, pulsație $\omega_0 \in \mathbb{R}$ și fază $\varphi \in \mathbb{R}$ de mai jos:

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Acest semnal continuu este eșantionat cu perioada $T_e = 1$, obținându-se următoarea versiune discretizată:

$$f_d[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Se cere să se determine ce condiție trebuie să satisfacă pulsația ω_0 pentru ca semnalul discret f_d să fie, la rîndul lui, periodic.

Exercițiul 3

Fie $x \in l^1(\mathbb{Z})$ o secvență absolut sumabilă exprimată prin: $x = \{x[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Arătați că energia acestei secvențe, definită prin:

$$\mathcal{E}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]|^2,$$

este finită.

- Se va utiliza o generalizare a următoarei inegalități de numere pozitive: $(ac + bd) \leq (a + b)(c + d)$, aplicată șirului sumelor parțiale.

Exercițiul 4

Fie $\omega_0 \in \mathbb{Q} \frac{\pi}{2}$. Arătați că următoarea secvență discretă:

$$x[n] = \frac{\sin \omega_0 n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

are energie finită. Cu toate acestea, demonstrați că ea nu este și absolut sumabilă.

Exercițiul 5

Mulțimea semnalelor digitale este înzestrată cu următoarele operații naturale:

- adunarea secvențelor: $x + y \stackrel{\text{def}}{=} \{x[n] + y[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$;
- produsul (punctual al) secvențelor: $x \bullet y \stackrel{\text{def}}{=} \{x[n]y[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$;
- produsul dintre o secvență și un scalar din Γ : $\alpha \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha x[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Arătați că:

1. $(\mathcal{S}_d, +)$ este grup abelian, cu elementul neutru secvența nulă;
2. $(\mathcal{S}_d, +, \bullet)$ este inel comutativ, cu elementul unitar secvența constantă egală cu 1;
3. $(\mathcal{S}_d, +, \cdot)$ este spațiu vectorial peste corpul Γ ;
4. $(\mathcal{S}_d, +, \bullet, \cdot)$ este algebră unitară comutativă peste corpul Γ ;

(verificînd axiomele din definițiile asociate acestor structuri algebrice).

Exercițiul 6

Fie $k \in \mathbb{Z}$ un număr întreg fixat, cu ajutorul căruia se definește aplicația următoare:

$$\left[\begin{array}{lcl} q^{-k} & : & \mathcal{S}_d \rightarrow \mathcal{S}_d \\ x & \mapsto & q^{-k}(x) \stackrel{not}{=} q^{-k}x \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{lcl} q^{-k}x & : & \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma \\ n & \mapsto & (q^{-k}x)[n] \stackrel{def}{=} x[n-k] \end{array} \right]$$

(Prin convenție, $q^0x \equiv x$.) Arătați că această aplicație verifică următoarele proprietăți:

1. $q^{-k}(\alpha x + \beta y) \equiv \alpha q^{-k}x + \beta q^{-k}y$, $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$, $\forall x, y \in \mathcal{S}_d$ (liniaritate);
2. $q^{-k}q^{-l} \equiv q^{-(k+l)}$, $\forall k, l \in \mathbb{Z}$ (acumulare aditivă a deplasărilor temporale).

Exercițiul 7

Arătați că familia de secvențe formată din toate versiunile translatate în timp ale impulsului unitar,

$$\Delta \stackrel{def}{=} \{\delta_k\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

este o bază (adică atât sistem liniar independent cât și sistem de generatori) în spațiul vectorial $(\mathcal{S}_d, +, \cdot)$ peste corpul Γ .

Exercițiul 8

1. Arătați că produsul de convoluție definit mai jos:

$$x \star y \stackrel{def}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] q^{-k} y \quad \Longleftrightarrow \quad (x \star y)[n] \stackrel{def}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] y[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

este corect definit pentru orice pereche de semnalele discrete absolut sumabile (adică $x, y \in l^1(\mathbb{Z})$).

- Se va utiliza următoarea inegalitate de numere pozitive: $(ac + bd) \leq (a + b)(c + d)$.
2. Arătați că mulțimea (nevidă) a semnalelor discrete din $\mathcal{S}_d$ pentru care produsul de convoluție este corect definit, notată cu $\mathcal{S}_{d*}$, are structură de algebră unitară comutativă peste corpul Γ , relativ la operațiile: " + ", " $\star$ " și " $\cdot$ ". (Verificați toate axiomele din definiția algebrei unitare comutative.)

Exercițiul 9

Utilizând unele dintre proprietățile produsului de convoluție din exercițiul precedent, să se arate că:

1. Răspunsul ansamblului de două SLID *înseriate* (în cascadă), având secvențele pondere h , respectiv g , este identic cu al unui SLID având secvența pondere egală cu $h \star g$, indiferent de ordinea de înseriere.
2. Răspunsul ansamblului de două SLID cuplate *în paralel* (având secvențele pondere ca mai sus) este identic cu al unui sistem care are secvența pondere egală cu $h + g$.

Exercițiul 10

Să se calculeze răspunsul unui SLID având, pe rând, fiecare din cele 4 funcții pondere ale tabelului din stînga, dacă el este stimulată cu intrările din tabelul corespunzător aflat în dreapta. Pentru fiecare dintre cele 4 perechi de semnale (intrare - funcție pondere), trasați cîte 3 grafice: al intrării, al funcției pondere și al ieșirii (prin convenție, valorile nespecificate ale mărimilor de mai jos sînt nule).

$\downarrow$ Nr.x \ n $\rightarrow$	-1	0	1	2
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	2	-1	0
4	1	2	3	3

$\downarrow$ Nr.h \ n $\rightarrow$	0	1	2	3
1	2	1	0	0
2	2	1	0	0
3	-1	2	1	0
4	0	0	2	1

Exercițiul 11

Calculați ieșirea $y = x \star h$ a unui SLID caracterizat de funcția pondere:

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n & , \quad 0 \leq n \leq N \\ 0 & , \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \overline{0, N} \end{cases} ,$$

pentru intrarea:

$$x[n] = \begin{cases} \beta^{n-n_0} & , \quad n \geq n_0 \\ 0 & , \quad n < n_0 \end{cases} .$$

Exercițiul 12

Fie e o secvență discretă exponențială de bază α (adică: $e = \{\alpha^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$) și $x, y \in \mathcal{S}_d$ alese arbitrar astfel încât toate produsele de convoluție de mai jos să fie corect definite. Atunci, arătați că are loc identitatea:

$$(e \bullet x) \star (e \bullet y) \equiv e \bullet (x \star y) .$$

Exercițiul 13

Fie un SLID avînd secvența pondere h . Arătați că dacă el este stimulat la intrare cu o secvență periodică de perioadă $N \in \mathbb{N}^*$, atunci ieșirea sa este tot o secvență periodică de aceeași perioadă.

Exercițiul 14

Fie H un sistem oarecare. Atunci orice intrare x care provoacă o ieșire a acestuia de forma: $y \equiv H[x] \equiv Cx$, unde C este o constantă complexă, se numește *funcție proprie a sistemului* H .

1. Arătați că dacă z este o constantă complexă, atunci o intrare de forma: $x = \{z^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ este o funcție proprie a unui SLID.
2. Construiți un contraexemplu care să demonstreze că intrarea $x = \{z^n u_0[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (unde u_0 este treapta unitară discretă) nu poate fi funcție proprie pentru orice SLID.

Exercițiul 15

Fie H un SLID caracterizat de funcția pondere h , intrarea x și ieșirea y . Dacă:

$$\text{Supp}(x) = \overline{N_0, N_1} \quad , \quad \text{Supp}(h) = \overline{N_2, N_3} \quad , \quad \text{Supp}(y) = \overline{N_4, N_5} \quad ,$$

calculați N_4 și N_5 în funcție de N_0, N_1, N_2 și N_3 .

Exercițiul 16

Determinați răspunsul indicial (la treapta unitară discretă, u_0) al unui SLID caracterizat de următoarea funcție pondere:

$$h[n] = a^{-n} u_0[-n] \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad ,$$

unde $a \in (0, 1)$.

Exercițiul 17

Fie un SLID avînd funcția pondere h de tip FIR:

$$\text{Supp}(h) = \overline{0, N-1} .$$

1. Arătați că dacă intrarea sa x este mărginită:

$$\exists M > 0 : |x[n]| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

atunci ieșirea y este de asemenea mărginită, marginea superioară fiind dată de inegalitatea:

$$|y[n]| \leq M \sum_{k=0}^{N-1} |h[k]|, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

2. Construiți un exemplu care să demonstreze că limita de mai sus poate fi atinsă. Adică: arătați că există o intrare mărginită ca mai sus și cel puțin un moment de timp, n_0 , pentru care:

$$y[n_0] = M \sum_{k=0}^{N-1} |h[k]|.$$

Exercițiul 18

Pentru fiecare dintre sistemele de mai jos, specificați dacă el este: (a) stabil, (b) cauzal, (c) liniar, (d) invariant la deplasări temporale.

$$\begin{array}{lll} H[x] = h \bullet x & 2. H[x][n] = \sum_{k=n_0}^n x[k] & 3. H[x][n] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k] \\ 4. H[x] = q^{-n_0} x & 5. H[x][n] = e^{x[n]} & 6. H[x] = a x + b \end{array}$$

Exercițiul 19

Fie un sistem avînd intrarea x și ieșirea y aflate în următoarea relație:

$$\begin{cases} x[n] = y[n] - a y[n-1], & \forall n \in \mathbb{Z} \\ y[0] = 1 \end{cases}$$

1. Determinați în ce condiții sistemul este invariant la deplasări temporale.
2. Determinați în ce condiții sistemul este liniar.
3. Dacă se schimbă condiția inițială $y[0] = 1$ cu $y[0] = 0$, contribuie aceasta la schimbarea răspunsului dat la punctele anterioare?

Exercițiul 20

Fie un SLID caracterizat de următoarea funcție pondere:

$$h[n] = \left(\frac{j}{2}\right)^n u_0[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

unde: $j^2 = -1$ și u_0 este treapta unitară discretă. Determinați răspunsul sistemului în regim staționar (adică pentru un moment arbitrar n suficient de departe de origine) la intrarea:

$$x[n] = u_0[n] \cos \pi n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Exercițiul 21

Fie un sistem H care are proprietatea de a fi neliniar și dependent de deplasările temporale ale intrării. Să presupunem că stimulăm acest sistem cu o intrare de forma:

$$x[n] = A e^{j\omega n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

unde $A, \omega \in \mathbb{R}$ sînt doi parametri fixați, numiți *amplitudine*, respectiv *pulsăție*. Se măsoară un anumit parametru P al ieșirii sistemului (de exemplu, amplitudinea maximă a ieșirii), care va depinde de A și de ω . Arătați că dacă amplitudinea A rămîne constantă, iar pulsăția ω variază, atunci P este periodică în ω și determinați perioada corespunzătoare.

Exercițiul 22

Fie un SLID stabil, descris de următoarea ecuație cu diferențe:

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

1. Determinați o funcție pondere posibilă a acestui sistem, notată cu h .
2. Funcția pondere de la este unică? Dacă nu, construiți o altă funcție pondere diferită de aceasta. Dacă da, justificați răspunsul.

Exercițiul 23

Fie un SLID descris de următorul răspuns în frecvență:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega - \frac{\pi}{4})} \left(\frac{1 + e^{-2j\omega} + 4e^{-4j\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-2j\omega}} \right), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Determinați ieșirea y a acestui sistem în cazul în care intrarea sa este următoarea armonică:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Exercițiul 24

Determinați răspunsul în frecvență, $H(e^{j\omega})$, al unui SLID stabil descris de următoarea ecuație cu diferențe:

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(Am notat, ca de obicei, prin " x " intrarea sistemului, iar prin " y " – ieșirea sa.)

Exercițiul 25

Scrieți ecuația cu diferențe pe care o verifică intrarea x și ieșirea y a unui SLID stabil descris de următorul răspuns în frecvență:

$$H(e^{j\omega}) = 3e^{-j\omega} \left(\frac{1 + e^{-2j\omega} + 4e^{-4j\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-2j\omega}} \right), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Exercițiul 26

Fie un SLID descris de următoarea ecuație cu diferențe:

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n] - x[n-1], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Determinați toate valorile posibile ale funcției pondere asociate, h , în origine: $h[0]$.

Exercițiul 27

Pentru fiecare din cele trei perechi de tip intrare-ieșire (x, y) de mai jos, se cunoaște că ele provin de la un sistem cauzal și stabil. Nu se cunoaște nici o altă informație privind natura sistemului.

Răspundeți la următoarele întrebări, pentru fiecare pereche intrare-ieșire:

1. Ar putea fi acest sistem liniar și invariant la deplasări? Justificați răspunsul.
2. Dacă sistemul ar putea fi liniar și invariant la deplasări, este posibil să se indice răspunsul său în frecvență? Dacă da, exprimați această cantitate (notată, ca de obicei, prin " $H(e^{j\omega})$ ").
3. Dacă sistemul ar putea fi liniar și invariant la deplasări, atunci este el unic? Dacă nu, descrieți cât mai complet clasa de SLID stabile și cauzale din care face el parte. Dacă da, justificați răspunsul.

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad x[n] &= \left(\frac{1}{3}\right)^n & y[n] &= 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0[n] \\
\text{(b)} \quad x[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0[n] & y[n] &= 2 \left(\frac{1}{4}\right)^n u_0[n] \\
\text{(c)} \quad x[n] &= \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) & y[n] &= \sin\left(\frac{5n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

(Am notat prin "u₀" treapta unitară discretă.)

Exercițiul 28

Fie un sistem dinamic discret pentru care se cunoaște următoarea proprietate: dacă este stimulat cu intrarea

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u_0[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

(unde u₀ este treapta unitară discretă), atunci el răspunde cu ieșirea

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Determinați care dintre următoarele afirmații este corectă:

1. Sistemul **trebuie** să fie invariant la deplasări temporale.
2. Sistemul **ar putea** să fie invariant la deplasări temporale.
3. Sistemul **nu poate** fi invariant la deplasări temporale.

În cazul în care găsiți că prima sau a doua afirmație este adevărată, construiți o funcție pondere posibilă a sistemului.

Dacă ați ajuns la concluzia că ultima afirmație este adevărată, atunci explicați de ce sistemul nu poate fi invariant la deplasări temporale.

Exercițiul 29

Fie un SLID descris de următorul răspuns în frecvență (pe o perioadă):

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq \omega \leq +\pi \\ 0 & , \quad -\pi < \omega < 0 \end{cases}.$$

Se presupune că intrarea x a sistemului este reală și stabilă. În aceste condiții, determinați dacă intrarea sistemului poate fi recuperată în mod unic cunoscând ieșirea acestuia. În ambele situații, justificați răspunsul.

- Sistemul specificat în acest exercițiu se numește *analytic*, datorită faptului că spectrul funcției sale pondere are suport nenegativ. Aceasta este o proprietate de cauzalitate exprimată pentru semnalele frecvențiale.

Exercițiul 30

Fie un SLID având următorul răspuns în frecvență:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Determinați răspunsul în timp al sistemului, dacă intrarea este dată de următorul semnal discret:

$$x[n] = \cos\left(\frac{15\pi}{4}n - \frac{\pi}{3}\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Exercițiul 31

Arătați că familia de funcții armonice:

$$\mathcal{H}_T \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sin \frac{k\pi}{T} t \right\}_{k \in \mathbb{N}^*} \cup \left\{ \cos \frac{k\pi}{T} t \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

este un sistem liniar independent al spațiului Hilbert de semnale continue, reale și $2T$ -periodice, unde produsul scalar este definit prin:

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) g(t) dt .$$

Exercițiul 32

Plecînd de la definițiile autocorelației unui semnal continuu staționar și stabil $f \in L^1(\mathbb{R})$ și a densității sale spectrale de putere:

$$r_f \tau \stackrel{\text{def}}{=} \int f(t) \overline{f(t - \tau)} dt, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \text{respectiv} \quad \phi_f(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(r_f)(\Omega), \quad \forall \Omega \in \mathbb{R},$$

să se arate că:

$$|\hat{f}(\Omega)|^2 = \phi_f(\Omega), \quad \forall \Omega \in \mathbb{R} .$$

(S-a notat prin $\mathcal{F}(f)$ sau $\hat{f}$ Transformata Fourier Continuă a semnalului f .)

Exercițiul 33

Demonstrați Principiul de conservare a energiei al lui Parseval, în cazul unui semnal continuu și stabil f , adică arătați că se verifică egalitatea:

$$\int |f(t)|^2 dt = \int |\hat{f}(\Omega)|^2 d\Omega .$$

(S-a notat prin $\hat{f}$ Transformata Fourier Continuă a semnalului f .)

Exercițiul 34

Utilizînd relația convențională a lui Poisson, (56) de la pagina 34, demonstrați că Transformarea Fourier Continuă Inversă, $\mathcal{F}^{-1}$ este chiar inversul operatorului $\mathcal{F}$, definit ca Transformare Fourier Continuă Directă:

$$\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} \equiv \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} \equiv \mathfrak{I} .$$

Exercițiul 35

1. Calculați Transformata Fourier Continuă asociată semnalului continuu stabil de mai jos (impulsul triunghiular de amplitudine A și deschidere t_0):

$$f(t) = \begin{cases} A \left(1 + 2 \frac{t}{t_0} \right) & , \quad t \in \left[-\frac{t_0}{2}, 0 \right) \\ A \left(1 - 2 \frac{t}{t_0} \right) & , \quad t \in \left[0, +\frac{t_0}{2} \right] \\ 0 & , \quad t \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{t_0}{2}, +\frac{t_0}{2} \right] \end{cases} .$$

2. Evaluați semnalul continuu stabil care posedă următoarea Transformată Fourier Continuă (fereastră spectrală dreptunghiulară, de amplitudine B și deschidere Ω_0):

$$\hat{g}(\Omega) = \begin{cases} B & , \quad \Omega \in \left[-\frac{\Omega_0}{2}, +\frac{\Omega_0}{2} \right] \\ 0 & , \quad \Omega \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\Omega_0}{2}, +\frac{\Omega_0}{2} \right] \end{cases} .$$

3. Trasați graficele aproximative ale lui f și ale Transformatelor Fourier Continue (modul și fază) asociate, pentru două deschideri diferite ale aceluiași impuls triunghiular de amplitudine constantă A . (În loc de t_0 , se va lucra, de exemplu, cu $t_1 < t_2$). (Observați modificarea spectrului (modulului TF) cu deschiderea, deci cu panta graficului în timp.)
4. Trasați graficele aproximative ale lui g și ale Transformatelor Fourier Continue (modul și fază) asociate, pentru două deschideri diferite ale ferestrei spectrale de amplitudine constantă B . (În loc de Ω_0 , se va lucra, de exemplu, cu $\Omega_1 < \Omega_2$.) (Observați variația invers proporțională dintre dimensiunile practice ale suporturilor temporale și frecvențiale, ca o consecință a Principiului de incertitudine.)

Exercițiul 36

Fie semnalul gaussian:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

unde:

- $t_0 \in \mathbb{R}$ este un moment fixat care indică punctul de maxim al *clopotului lui Gauss* (graficul funcției anterioare);
- $\sigma > 0$ este *deviația standard* a clopotului (σ^2 se mai numește și *dispersie*), de asemenea fixată.

(Prin convenție, apartenența acestui semnal la clasa semnalelor gaussiene se exprimă astfel: $g \in \mathcal{G}(t_0, \sigma)$.)

1. Arătați că:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt =$$

- Se va utiliza următoarea *integrală a lui Poisson*:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. Calculați Transformata Fourier Continuă a lui g , definită prin:

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Arătați că $\hat{g} \in \mathcal{G}\left(0, \frac{1}{\sigma}\right)$.

- Se va utiliza versiunea complexă a *integralei lui Poisson*:

$$\int_{-\infty+jv}^{+\infty+jv} e^{-(u+jv)^2} du = \sqrt{\pi}.$$

3. Știind că pentru orice semnal gaussian g (ca mai sus) se pot neglija valorile sale în afara intervalului $[t_0 - 3\sigma, t_0 + 3\sigma]$, imaginați o interpretare a Principiului de incertitudine relativă la perechea de semnale $(g, \hat{g})$.

Exercițiul 37

Arătați că operatorul Fourier $\mathcal{F}$ definit pe mulțimea semnalelor discrete stabile prin:

$$(\mathcal{F}x)(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-j\omega n} \stackrel{\text{not}}{=} X(e^{j\omega}), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad x \in l^1(\mathbb{Z}),$$

este inversabil, operatorul invers fiind exprimat de următoarea relație:

$$\mathcal{F}^{-1}(X)[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{+j\omega n} d\omega, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Exercițiul 38

Demonstrați următoarea relație:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \bar{w}_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{kn} = \begin{cases} N & , \quad k \in N\mathbb{Z} \\ 0 & , \quad k \in \mathbb{Z} \setminus N\mathbb{Z} \end{cases} , \quad \forall k \in \mathbb{Z} ,$$

unde: $w_N^n \stackrel{not}{=} e^{-\frac{2\pi nj}{N}}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Exercițiul 39

Fie $N \in \mathbb{N}^*$ un număr arbitrar fixat. Demonstrați următoarele relații de ortogonalitate, care au loc între funcțiile armonice elementare ale spațiului secvențelor discrete N -periodice, $\mathcal{S}_d^N$:

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega_p^N n) \sin(\omega_q^N n) = \frac{N}{2} \delta_0[p - q] \\ \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega_p^N n) \cos(\omega_q^N n) = \frac{N}{2} \delta_0[p - q] \\ \sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega_p^N n) \cos(\omega_q^N n) = 0 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(\omega_p^N n) = 0 \\ \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega_p^N n) = 0 \\ \forall p, q \in \mathbb{Z}^* , \end{array} \right.$$

unde: $\omega_p^N \stackrel{def}{=} \frac{2\pi p}{N}$, $\forall p \in \mathbb{Z}$.

- Se poate utiliza relația demonstrată în exercițiul anterior.

Exercițiul 40

Arătați că operatorul SFD definit pe mulțimea secvențelor discrete N -periodice, $\mathcal{S}_d^N$, prin:

$$SFD(\tilde{x})[k] \stackrel{not}{=} \tilde{X}[k] \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] w_N^{nk} , \quad \forall k \in \overline{0, N-1} , \quad \tilde{x} \in \mathcal{S}_d^N ,$$

unde $w_N^n \stackrel{not}{=} e^{-\frac{2\pi nj}{N}}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, este inversabil, operatorul invers fiind definit astfel:

$$SFD^{-1}(\tilde{X})[n] \stackrel{def}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \bar{w}_N^{nk} , \quad \forall n \in \overline{0, N-1} ,$$

Exercițiul 41

Demonstrați Teorema de convoluție aferentă TCFD plecând de la relația de intrare-ieșire (36) (pagina 20) și exprimând valoarea în punctul $k \in \mathbb{Z}$ a semnalului de intrare cu ajutorul TCFD inverse, definite de relația (59) (pagina 36).

Exercițiul 42

Fie un filtru ideal de tip "trece jos", avînd pulsația de tăiere $\omega_0 \in (0, \pi)$. Răspunsul său în frecvență este următorul:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| \leq \omega_0 < \pi \\ 0 & , \quad \omega_0 < |\omega| \leq \pi \end{cases} .$$

1. Determinați secvența pondere corespunzătoare acestui filtru, notată prin " h ".
2. Dacă $x \in l^1(\mathbb{Z})$ este o secvență de intrare oarecare, arătați că ieșirea filtrului este, în acest caz, următoarea:

$$y[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(\omega_0(n-k))}{\pi(n-k)} x[k] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Exercițiul 43

Fie x o secvență discretă stabilă pentru care se notează cu X imaginea sa prin TCFD. Dacă se știe că:

$$x[n] = 0, \quad \forall n < 1 \quad \& \quad \operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{3}{2\cos\omega - \frac{5}{2}}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

determinați semnalul x atât cât se poate de detaliat.

Exercițiul 44

Fie h o secvență pondere a unui SLID cauzal și stabil, avînd răspunsul în frecvență (H) caracterizat de următoarea relație:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{\frac{5}{4} - \cos\omega}{5 + 4\cos\omega}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Dacă sistemul este inversabil și inversa sa este stabilă și cauzală, determinați h cât se poate de detaliat.

Exercițiul 45

Arătați că orice filtru numeric liniar simetric în oglindă avînd secvența pondere cauzală și de durată finită este și de fază liniară.

Exercițiul 46

Arătați că TCFD a unei secvențe discrete stabile simetrice în oglindă este reală (nu are valori complexe).

Exercițiul 47

Demonstrați proprietățile de simetrie ale TCFD enumerate în Tabelul 1 (de la pagina 44). Cum se exprimă aceste proprietăți în cazul în care secvența stabilă inițială are numai valori reale? (Alcătuți un tabel similar pentru cazul secvențelor reale.)

Exercițiul 48

1. Fie un SLID caracterizat de următorul răspuns la impuls:

$$h[n] = \alpha^n u_0[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

unde: u_0 este treapta unitară discretă, iar $0 < \alpha < 1$. Dacă intrarea acestui sistem este de forma:

$$x[n] = \beta^n u_0[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

cu $0 < |\beta| < 1$, determinați ieșirea y , cunoscînd că ea este de forma:

$$y[n] = (K_1 \alpha^n + K_2 \beta^n) u_0[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

2. Evaluați în mod explicit TCFD ale celor 3 semnale discrete de mai sus și verificați Teorema de convoluție.

Exercițiul 49

Demonstrați următoarea versiune a Teoremei lui Parseval, relativ la TCFD (Principiul de conservare a energiei):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

Exercițiul 50

Un SLID cauzal este descris de următoarea ecuație cu diferențe:

$$y[n] - a y[n-1] = x[n] - b x[n-1], \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

unde $b \neq a$. Determinați valoarea coeficientului b astfel încât sistemul să se comporte ca un *filtru trece tot*.

- Răspunsul în frecvență al unui *filtru trece tot* are amplitudinea constantă în raport cu pulsația.

Exercițiul 51

Se consideră două secvențe reale, cauzale și stabile, x și y . Dacă imaginile lor prin TCFD sînt notate prin X , respectiv Y , verificați următoarea egalitate:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega}) d\omega = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) d\omega \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} Y(e^{j\omega}) d\omega \right).$$

Exercițiul 52

Fie $x \in l^1(\mathbb{Z})$ o secvență stabilă oarecare. Dacă X este imaginea sa prin TCFD, determinați TCFD ale următoarelor secvențe generate de x (în funcție de X):

1. Kx , unde K este o constantă complexă arbitrară;
2. $q^{-n_0}x$, unde: $n_0 \in \mathbb{Z}$ este arbitrar fixat, iar q^{-k} este operatorul de deplasare temporală cu k pași;
3. $y[n] = x[2n]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (o versiune *decimată* a lui x);
4. $y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & , \quad n = \text{par} \\ 0 & , \quad n = \text{impar} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (o versiune *interpolată* a lui x);
5. x^2 .

Exercițiul 53

Fie $x \in l^1(\mathbb{Z})$ o secvență stabilă oarecare. Dacă X este imaginea sa prin TCFD, determinați secvențele stabile corespunzătoare următoarelor TCFD generate de X :

1. $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, unde $\omega_0 \in \mathbb{R}$ este o pulsație arbitrară;
2. $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$;
3. $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 54

Demonstrați următoarele proprietăți ale TCFD evaluate pentru o secvență stabilă și reală:

$$\begin{aligned} \text{Re}\{X(e^{j\omega})\} &= \text{Re}\{X(e^{-j\omega})\} & \text{Im}\{X(e^{j\omega})\} &= -\text{Im}\{X(e^{-j\omega})\} \\ |X(e^{j\omega})| &= |X(e^{-j\omega})| & \arg\{X(e^{j\omega})\} &= -\arg\{X(e^{-j\omega})\} \end{aligned}$$

Exercițiul 55

Fie următoarea secvență complexă exprimată cu ajutorul părților sale imaginare și reală: $x \equiv x_R + jx_I$. Se notează cu X imaginea sa prin TCFD și, la rîndul ei, aceasta se poate exprima detaliat prin: $X \equiv X_R + jX_I$. Se mai introduc următoarele notații:

- X_{eR} , X_{oR} - pentru partea simetric conjugată, respectiv antisimetric conjugată a lui X_R ;
- X_{eI} , X_{oI} - pentru partea simetric conjugată, respectiv antisimetric conjugată a lui X_I ;
- X_{RR} , X_{IR} - pentru partea reală, respectiv imaginară a TCFD aplicate lui x_R ;

- X_{RI} , X_{II} - pentru partea reală, respectiv imaginară a TCFD aplicate lui x_I .

În aceste condiții, să se exprime X_{RR} , X_{IR} , X_{RI} și X_{II} în funcție de X_{eR} , X_{oR} , X_{eI} și X_{oI} .

Exercițiul 56

În Prelucrarea Numerică a Semnalelor se operează adesea cu următoarele două tipuri de operații:

- *decimare de ordin* $M \geq 1$, definită prin:

$$(x \downarrow M)[n] \stackrel{def}{=} x[nM], \quad \forall n \in \mathbb{Z};$$

- *interpolare de ordin* $M \geq 1$, definită prin:

$$(x \uparrow M)[n] \stackrel{def}{=} \begin{cases} x\left[\frac{n}{M}\right], & n \% M = 0 \\ 0, & n \% M \neq 0 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

unde $n \% M$ indică restul împărțirii numărului n la numărul M .

1. Arătați că nici una din cele două operații nu poate fi descrisă cu ajutorul unui filtru liniar discret, deși ele sînt operații liniare.
2. Dacă x este o secvență discretă stabilă, arătați că:

$$\mathcal{F}(x \uparrow M)(e^{j\omega}) = \mathcal{F}(x)(e^{j\omega M}), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

3. Dacă M și N sînt două numere prime între ele, demonstrați că operația de decimare intervertește cu cea de interpolare:

$$s \downarrow M \uparrow N \equiv s \uparrow N \downarrow M.$$

Rămîne valabilă această proprietate dacă M și N au un divizor comun supraunitar? Justificați răspunsul.

4. Dacă h și g sînt secvențele pondere stabile a două SLID, iar $x \in l^1(\mathbb{Z})$, demonstrați următoarele echivalențe:

$$\bullet \{[(x \star h) \downarrow M] \star g\} \downarrow N \equiv [x \star h \star (g \uparrow M)] \downarrow (MN);$$

Aceasta revine la echivalența celor două scheme de transformare din Figura 11, utilizate în partea de analiză a unor bancuri de filtre cu decimare-interpolare.

$$\bullet \{[(x \uparrow M) \star h] \uparrow N\} \star g \equiv [x \uparrow (MN) \star (h \uparrow N)] \star g.$$

Aceasta revine la echivalența celor două scheme de transformare din Figura 12, utilizate în partea de sinteză a unor bancuri de filtre cu decimare-interpolare.

5. Dacă $x \in l^1(\mathbb{Z})$ iar h este secvența pondere a unui SLID stabil și cauzal descris de răspunsul în frecvență:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

unde $0 < a < 1$, să se determine răspunsul în frecvență al unui SLID stabil și cauzal $G \stackrel{def}{=} \mathcal{F}g$, astfel încît să se verifice identitatea următoare:

$$\{[(x \downarrow 2) \uparrow 2] \star h\} \downarrow 2 \equiv (x \downarrow 2) \star g.$$

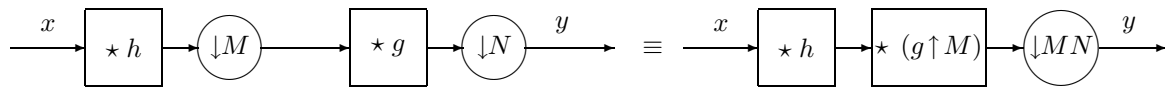


Figura 11: Două scheme echivalente utilizate în analiza de semnal cu bancuri de filtre.

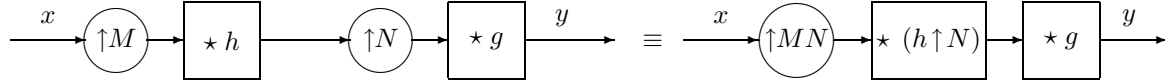


Figura 12: Două scheme echivalente utilizate în sinteza de semnal cu bancuri de filtre.

Exercițiul 57

Fie h_a și h_d funcția, respectiv secvența pondere a unui SLID continuu, respectiv discret.

1. Dacă:

$$h_a(t) = e^{-at} \sigma_0(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

unde σ_0 este treapta unitară continuuă a lui Heavieside, iar $a > 0$, să se determine răspunsul în frecvență al SLID continuu.

2. Dacă h_d este o versiune discretizată a lui h_a de la punctul precedent, iar T este perioada de eșantionare, să se determine răspunsul în frecvență al SLID discret.

3. Determinați valoarea minimă a amplitudinii răspunsului în frecvență de la punctul precedent, privit ca funcție de T , a fiind constant.

Exercițiul 58

Filtrele digitale (discrete) sînt adese utilizate în aplicații de filtrare a semnalelor analogice. O schemă uzuală în care sînt implicate filtrele digitale este și cea din Figura 13. Aici, $T > 0$

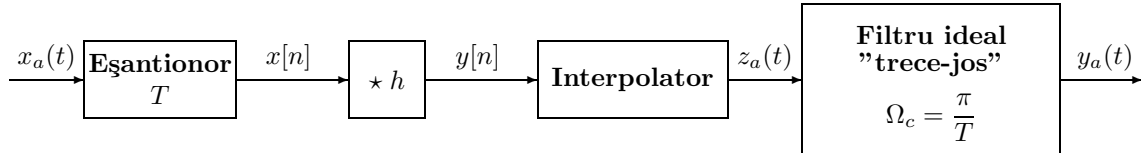


Figura 13: Sistem hibrid de filtrare a unui semnal analogic.

este perioada de eșantionare, aleasă în așa fel încît fenomenul de aliere să fie evitat. De asemenea, Ω_c este pulsația de tăiere a filtrului ideal analogic utilizat în final. Sistemul echivalent al schemei prezentate este exprimabil ca un filtru liniar analogic global.

1. Dacă TCFD a secvenței pondere $h \in l^1(\mathbb{Z})$ are suportul egal cu $\left[-\frac{\pi}{8}, +\frac{\pi}{8}\right]$, iar $\frac{1}{T} = 10 \text{ kHz}$, care va fi suportul TCFC a funcției de transfer a filtrului analogic echivalent schemei?

2. Răspundeți la punctul precedent în condițiile în care $\frac{1}{T} = 20 \text{ kHz}$.

Exercițiul 59

În Capitolul 12 s-a arătat că un semnal continuu poate fi exprimat, în general, ca o combinație liniară de semnale liniar independente de forma:

$$x_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \phi_n(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Această relație se mai numește și *formulă de interpolare*, iar semnalul generic ϕ – *nucleu de interpolare*. Să presupunem că semnalul continuu x_a este de bandă limitată. Atunci semnalele liniar independente pot fi alese astfel:

$$\phi_{0n}(t) \stackrel{def}{=} Sa \frac{\pi(t - nT)}{T}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

unde Sa este funcția "sinus atenuat" ("sinus cardinal"), iar $T > 0$ este un parametru arbitrar fixat.

Fie 3 semnale continue x_{a1} , x_{a2} și x_{a3} exprimate în forma:

$$x_{ak} \stackrel{def}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{kn} \phi_n(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \{1, 2, 3\},$$

care au proprietățile următoare:

$$x_{a3} \equiv x_{a1} \star x_{a2} \iff x_{a3}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{a1}(\tau) x_{a2}(t - \tau) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

$$c_{3n} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{1m} c_{2(n-m)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Această proprietate arată că SLID continuu caracterizat de intrarea x_{a1} , funcția pondere x_{a2} și ieșirea x_{a3} poate fi reprezentat cu ajutorul unui SLID discret avînd intrarea $\{c_{1n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, secvența pondere $\{c_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ și ieșirea $\{c_{3n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

1. Arătați că această proprietate implică următoarea relație între TCFC ale semnalelor $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$\hat{\phi}_n(\Omega) \cdot \hat{\phi}_m(\Omega) = \hat{\phi}_{n+m}(\Omega), \quad \forall \Omega \in \mathbb{R},$$

unde, prin definiție:

$$\hat{\phi}_n(\Omega) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(t) e^{-j\Omega t} dt, \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

2. Demonstrați că relația anterioară conduce mai departe la următoarea formă a TCFC $\hat{\phi}_n$:

$$\hat{\phi}_n(\Omega) = [H(\omega)]^{-n}, \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

3. Dacă se lucrează cu nucleul de interpolare de tip "sinus atenuat" de mai sus, arătați că familia $\left\{ \frac{1}{T} \phi_{0n} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ verifică relația de la primul punct.
4. Puteți găsi și alte familii de nuclee de interpolare care să verifice relația de la primul punct? Ilustrați prin cîteva exemple.

Exercițiul 60

Fie x_a un semnal continuu, stabil, de bandă limitată, discretizat cu perioada de eșantionare $T > 0$. În Capitolul 12, s-a arătat că dacă T este aleasă în așa fel încît fenomenul de aliere să fie evitat, atunci semnalul continuu x_a poate fi reconstruit exact cu ajutorul următoarei formule de interpolare:

$$x_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_a(nT) Sa \frac{\pi(t - nT)}{T}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

unde Sa este funcția "sinus atenuat" ("sinus cardinal").

Să considerăm că versiunea eșantionată a lui x_a este x , care figurează ca intrare în schema de transformare din Figura 14. Interpolatorul oferă un semnal continuu în scară, prin prelungirea valorii la stînga (așa cum arată graficul de sub schema de transformare). Filtrul ideal de tip "trece-jos" are pulsația de tăiere Ω_c . Se cere să se determine pulsația Ω_c în așa fel încît semnalul continuu y_a de la ieșirea schemei de mai sus să coincidă cu semnalul inițial, x_a .

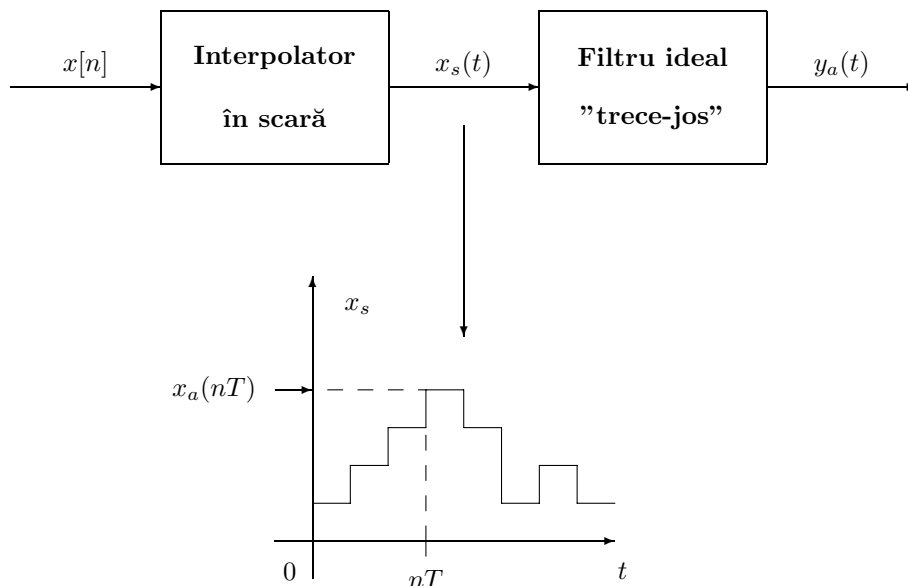


Figura 14: *Interpolarea în scară a semnalelor discretizate.*

Exercițiul 61

Fie semnalul analogic stabil:

$$x_a(t) = s_a(t) + \alpha s_a(t - T), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

unde $T > 0$ este un număr fixat asimilat ca perioadă de eşantionare, iar s_a este un alt semnal analogic stabil. Să presupunem că x_a este de bandă limitată, TCFC a sa avînd suportul compact:

$$\text{Supp}(\widehat{x_a}) = \left[-\frac{\pi}{T}, +\frac{\pi}{T}\right].$$

Dacă notăm prin x o versiune corect eşantionată a lui x_a ($x[n] = x_a(nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$), atunci şa se determine secvenţa pondere h a unui SLID stabil care are proprietatea de a răspunde cu semnalul discret x la intrarea produsă prin T -eşantionarea lui s_a (notată cu s):

$$x[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s[k] h[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Exercițiul 62

În cadrul a numeroase sisteme de comunicație, informația este transmisă prin intermediul unui *alfabet* format dintr-o mulțime finită de semnale continue (numite și *forme de undă elementare* sau *litere*):

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{f_1, f_2, \dots, f_M\},$$

care au aceeași energie (finită):

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_m(t)|^2 dt, \quad \forall m \in \overline{1, M}.$$

În aceste condiții, un canal de recepție acordat pe litera f_m a alfabetului (cu $m \in \overline{1, M}$ fixat) evaluează cantitatea următoare:

$$P_m \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f_m(t) dt,$$

unde $f \in \mathcal{A}$.

1. Arătați (utilizînd inegalitatea lui Schwartz) că P_m este maxim atunci cînd $f \equiv f_m$.
Aceasta înseamnă că, pentru a determina care dintre literele alfabetului a fost transmisă, trebuie evaluate numerele $P_1, P_2, \dots, P_M$ și ales indicele corespunzător maximului acestuia.
2. Să presupunem, în particular, că toate literele alfabetului sînt și stabile, de bandă limitată, TCFC a lor avînd suportul compact, inclus în intervalul $[-\Omega_0, +\Omega_0]$. Dorim să implementăm receptorul cu ajutorul unui model discret. Aceasta înseamnă că semnalele recepționate (adică literele alfabetului) trebuie să fie corect eșantionate cu perioada $T > 0$:

$$x[n] \stackrel{\text{def}}{=} f(nT), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

Atunci, cantitatea P_m se va aproxima cu ajutorul următoarei formule:

$$Q_m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] x_m[n].$$

Care dintre următoarele rate de eșantionare:

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \in \left\{ \frac{\Omega_0}{8\pi}, \frac{\Omega_0}{4\pi}, \frac{\Omega_0}{2\pi}, \frac{\Omega_0}{\pi}, \frac{2\Omega_0}{\pi} \right\}$$

este cea mai potrivită pentru a simula cît mai corect situația din cazul continuu?

3. Să presupunem că T a fost aleasă de 2 ori mai mare decît la punctul precedent. Este posibil ca, impunînd restricții suplimentare asupra alfabetului, cantitatea Q_m să continue să fie maximă pentru $x \equiv x_m$? Justificați răspunsul.

Exercițiul 63

Fie sistemul din Figura 15 de mai jos, unde "CAN(T)" este un convertor analog-numeric avînd perioada de eșantionare T , iar CNA(T) este un convertor numeric-analog, cu aceeași perioadă de eșantionare, T . Totodată, H reprezintă răspunsul în frecvență al unui SLID,

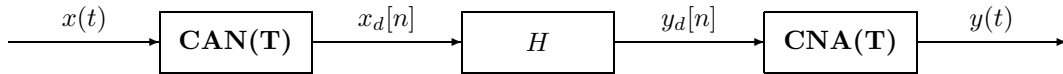


Figura 15: O schemă clasică de simulare a unui sistem continuu cu ajutorul unui sistem discret.

definit astfel:

$$H(e^{j\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} j\omega & , \quad |\omega| < \frac{\pi}{3} \\ 0 & , \quad \frac{\pi}{3} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}.$$

1. Dacă $T = 1$ și $x(t) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{15\pi}{4}t - \frac{\pi}{3}\right)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, să se determine ieșirea y a sistemului.
2. Să considerăm că x este un semnal stabil de bandă limitată, adică avînd suportul: $\text{Supp}(\hat{x}) \subseteq \left[-\frac{\pi}{2T_0}, +\frac{\pi}{2T_0}\right]$, unde T_0 est o constantă pozitivă fixată. Să se determine valorile lui T în funcție de T_0 astfel încît întregul sistem continuu să fie liniar și invariant la deplasări temporale.
3. Continuăm să operăm cu intrarea de la punctul precedent (stabilă și de bandă limitată). Să presupunem că $T = T_0$ în Figura 15 și că dispunem de un alt sistem continuu, descris de schema din Figura 16. Se poate alege SLID G în așa fel încît cele două scheme să fie echivalente intrare-ieșire (adică pentru $x \equiv u$ să se obțină $y \equiv v$)? Dacă da, să se indice un posibil răspuns în frecvență G și să se specifice dacă el este unic sau nu. Dacă nu, să se argumenteze de ce.

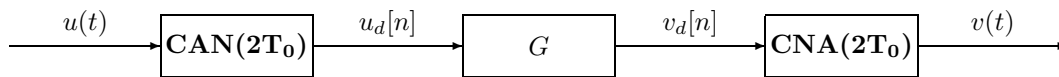


Figura 16: Un caz particular al schemei din figura precedentă, pentru $T = 2T_0$.

Exercițiul 64

Semnalele discrete de energie finită pot fi exprimate și cu ajutorul unei mulțimi de funcții de bază diferite de cele armonice. O astfel de reprezentare are următoarea formă generală:

$$x[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_k[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

unde $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ este mulțimea funcțiilor de bază, iar $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ este setul coeficienților de analiză. Dacă funcțiile de bază sînt ortonormate și reale, atunci coeficienții se pot evalua cu ajutorul produsului scalar:

$$a_k = \langle x, \phi_k \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \phi_k[n], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

În general, ambele secvențe x și ϕ_k sînt de durată infinită.

1. Adesea, este mai convenabil să se calculeze coeficienții a_k folosind o familie de SLID caracterizate de secvențele pondere $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Fie y_k ieșirea SLID ce are secvența pondere h_k și intrarea x (deci $y_k \equiv x \star h_k$). Să se indice o alegere corespunzătoare a secvențelor h_k (în funcție de ϕ_k) astfel încît:

$$a_k = y_k[0], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

2. Să presupunem că:

- (a) secvența x este de durată finită, mai precis că: $\text{Supp}(x) \subseteq \overline{0, N-1}$, unde $N \in \mathbb{N}^*$ este un număr fixat;
- (b) fiecare secvență h_k este tot de durată finită: $\text{Supp}(h_k) \subseteq \overline{0, L-1}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, unde $L \in \mathbb{N}^*$ este un număr ce poate să varieze.

Să se indice o alegere corespunzătoare a secvențelor h_k (în funcție de ϕ_k) și a unui număr $M \in \mathbb{N}$ astfel încît L să fie cît mai mic cu putință și:

$$a_k = y_k[M], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Exercițiul 65

Arătați că schemele din Figurile 4 (de la pagina 26) și 5 (de la pagina 27) sînt echivalente, adică simulează funcționarea la nivel de semnale a aceluiași sistem discret.

Exercițiul 66

Demonstrați proprietățile fundamentale ale Transformatei $\mathcal{Z}$, sintetizate în Tabelul 2 de la pagina 60.

Exercițiul 67

Demonstrați relațiile (90) și (91) (din anexa anterioară) care oferă soluții ale Problemei de convoluție directă și inversă în cazul semnalelor continue stabile.

Exercițiul 68

Să se demonstreze următoarea relație a lui Parseval, utilizînd (eventual) demonstrația Teoremei de convoluție complexă (Teorema A.2, de la pagina 62):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \overline{y[n]} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(v) \overline{Y\left(\frac{1}{v}\right)} \frac{dv}{v}.$$

Aici, γ este un contur închis ce înconjoară originea, inclus în zona de convergență comună a lui $X(v)$ și $Y\left(\frac{1}{v}\right)$.

Considerînd că în această zonă se află și cercul unitar, particularizați formula de mai sus pentru $\gamma = \partial\mathcal{U}$.

Exercițiul 69

Să se calculeze Transformata $\mathcal{Z}$ pentru următoarele secvențe, indicînd, totodată, aria de convergență:

$$\frac{1}{2^n} u_0[n] ; \quad -\frac{1}{2^n} u_0[-n-1] ; \quad \delta_0[n] ; \quad \delta_0[n-n_0] ; \quad \frac{1}{2^n} (u_0[n] - u_0[n-10]) .$$

Exercițiul 70

Să se evalueze Transformatele $\mathcal{Z}$ și ariile corespunzătoare de convergență ale următoarelor secvențe:

$$x[n] = \alpha^{|n|}, \quad 0 < |\alpha| < 1 ; \quad x[n] = Ar^n \cos(\omega_0 n + \varphi) u_0[n], \quad 0 < |\alpha| < 1 ;$$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & , \quad n \in \mathbb{N} \setminus [0, N-1] \end{cases} ; \quad x[n] = \begin{cases} n & , \quad 0 \leq n \leq N \\ 2N-n & , \quad N+1 \leq n \leq 2N \\ 0 & , \quad n \in \mathbb{N} \setminus [0, 2N] \end{cases} .$$

Exercițiul 71

Fie secvența discretă $y \equiv x \star h$, unde $h[n] \stackrel{def}{=} (1+j)^n u_0[n]$ și $|x[n]| \leq 1, \forall n \in \mathbb{Z}$. Să se verifice dacă secvența $|y|$ este mărginită sau nu.

Exercițiul 72

Să se determine secvențele discrete de la care provin Transformatele $\mathcal{Z}$ din Tabelul 3 de la pagina 82.

Tabelul 3: *Exemple de Transformate $\mathcal{Z}$.*

Transformată $\mathcal{Z}$	Zonă de convergență
$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$	$\frac{1}{2} < z $
$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$	$\frac{1}{2} > z $
$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$	$\frac{1}{2} < z $
$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$	$\frac{1}{2} < z $
$X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}$	$\frac{1}{ a } < z $

Exercițiul 73

Să se determine toate secvențele care pot conduce la următoarea Transformată $\mathcal{Z}$:

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)} .$$

(Se va utiliza descompunerea în fracții simple.)

Exercițiul 74

Fie:

$$X(z) = \frac{2}{2-z}$$

o Transformată $\mathcal{Z}$ a cărei zonă de convergență include cercul unitar.

1. Determinați valorile $x[0]$, $x[-1]$ și $x[-2]$ utilizând direct formula lui Cauchy:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} X(z) z^{n-1} dz , \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

și Teorema reziduurilor.

2. Determinați partea cauzală a secvenței x prin același procedeu ca la punctul precedent și partea anticauzală prin procedeul schimbării de variabilă $\zeta = \frac{1}{z}$ în integrala de mai sus.

Exercițiul 75

Să se determine secvența discretă x a cărei Transformată $\mathcal{Z}$ este următoarea:

$$X(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}} , \quad \forall z \in \mathcal{C}^* .$$

Exercițiul 76

Poate funcția $X(z) = \bar{z}$ să corespundă unei Transformate $\mathcal{Z}$ a unei secvențe discrete? Justificați răspunsul.

Exercițiul 77

Fie:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

o funcție complexă rațională avînd zerourile și polii de multiplicitate cel mult egală cu 1. Se mai notează cu n_z numărul de zerouri și cu n_p numărul de poli care se află în interiorul unui contur închis ce înconjoară originea, γ . Să presupunem că acest contur nu conține nici poli, nici zerouri ale lui R .

1. Să se arate că:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{R'(z)}{R(z)} dz = n_z - n_p ,$$

unde R' este derivata lui R . (Se poate arăta că acest rezultat se generalizează și la cazul zerourilor și polilor multipli, cu următoarea modificare: fiecare pol sau zero din zona închisă de γ trebuie numărat cu multiplicitatea sa; de exemplu, un pol de ordin 2 va fi numărat de 2 ori.)

2. Dacă R are un pol de ordin unu în z_0 , atunci să se arate că:

$$\operatorname{Res} [R(z)]|_{z=z_0} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} ,$$

unde Q' este derivata polinomului Q .

Exercițiul 78

Să se determine Transformata $\mathcal{Z}$ a secvenței $n^2x[n]$ în funcție de Transformata $\mathcal{Z}$ a lui x .

Exercițiul 79

Să se determine Transformata $\mathcal{Z}$ a secvenței de autocorelație:

$$r[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] x[k+n], \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

în funcție de Transformata $\mathcal{Z}$ a lui x .

Exercițiul 80

Fie x o secvență discretă cauzală avînd $x[0] \neq 0$. Se notează prin X Transformata $\mathcal{Z}$ a sa.

1. Arătați că X nu are poli sau zerouri situate pe cercul de la infinit.
2. Arătați că numărul de poli ai lui X este egal cu numărul de zerouri ale sale.

Exercițiul 81

Fie un filtru de tip FIR avînd secvența pondere (h) reală, pară și de suport finit, cu lungimea $(2N+1)$. Arătați că dacă $H(z) = 0$ pentru $z = \rho e^{j\theta}$, atunci $H(z) = 0$ și pentru $z = \frac{1}{\rho} e^{j\theta}$.

Exercițiul 82

Arătați că dacă x este o secvență cauzală, atunci are loc următoarea proprietate a valorii inițiale:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0].$$

Care este corespondentul acestei proprietăți dacă x este anticauzală?

Exercițiul 83

Transformata $\mathcal{Z}$ a unei secvențe reale x are toți polii și zerourile în discul unitar deschis. Să se determine (în funcție de x) o altă secvență discretă $y \neq x$ care să aibă proprietățile următoare: $y[0] = x[0]$, $|y[n]| = |x[n]|$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ și Transformata $\mathcal{Z}$ a lui y are de asemenea toți polii și toate zerourile în discul unitar deschis.

Exercițiul 84

Fie un SLID avînd secvența pondere dată de următoarea relație:

$$h[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a^n & , \quad n \geq 0 \\ 0 & , \quad n < 0 \end{cases}.$$

Să presupunem că el este stimulat la intrare cu o fereastră dreptunghiulară de lungime N , $x \equiv \mathcal{R}_N$.

1. Să se determine ieșirea y prin evaluare directă, cu ajutorul operației de convoluție discretă.
2. Să se determine ieșirea y prin utilizarea Teoremei directe de convoluție referitoare la Transformata $\mathcal{Z}$.

Exercițiul 85

Fie un SLID descris de următoarea ecuație cu diferențe:

$$y[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Utilizînd Transformata $\mathcal{Z}$, să se determine două posibile secvențe pondere ale acestui sistem.

Exercițiul 86

Un SLID cauzal este descris de următoarea ecuație cu diferențe:

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

1. Să se determine funcția de transfer a sistemului, $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ și să se indice zona ei de convergență.
2. Să se determine secvența pondere a sistemului.
3. Să se determine secvența pondere a unui SLID stabil descris de aceeași ecuație cu diferențe. Poate fi această secvență pondere și cauzală?

Exercițiul 87

Un SLID este descris de următoarea ecuație cu diferențe:

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n-1], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sistemul poate să fie sau să nu fie stabil și/sau cauzal. Utilizând Transformata $\mathcal{Z}$, să se determine 3 alegeri posibile pentru secvența pondere asociată și să se arate că fiecare dintre ele verifică ecuația cu diferențe specificată.

Exercițiul 88

Fie un SLID cauzal a cărui funcție de transfer este următoarea:

$$H(z) = \frac{az - 1}{a(z - a)},$$

unde $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Determinați pentru ce valori ale lui a sistemul este și stabil.
2. Dacă $a \in (0, 1)$, să se determine zona de convergență a funcției complexe H .
3. Să se arate că acest sistem este un filtru de tip *trece-tot*, adică amplitudinea răspunsului său în frecvență este constantă.
4. Sistemul este înseriat cu un alt sistem având funcția de transfer G , în așa fel încât întregul sistem rezultat să aibă funcția de transfer constantă și egală cu 1. Dacă $a \in (0, 1)$ și dacă G este un sistem stabil, să se determine secvența pondere a acestuia, notată cu g .

Exercițiul 89

Utilizând Transformata $\mathcal{Z}$, să se determine secvența pondere a unui SLID stabil descris de următoarea ecuație cu diferențe:

$$y[n] - \frac{10}{3}y[n-1] + y[n-2] = x[n-1], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Exercițiul 90

Utilizând Transformata $\mathcal{Z}$, să se determine răspunsul SLID cauzal descris de următoarea ecuație cu diferențe:

$$y[n] - 2r \cos(\theta) y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

dacă el este stimulat cu intrarea $x[n] = \alpha^n u_0[n]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Bibliografie

- [1] **Battle G.** *A Block Spin Construction of Ondelettes: I. Lemarié Functions.* Communications in Mathematical Physics, 110:601–615, 1987.
- [2] **Butzer P.L., Stens R.L.** *Sampling Theory for Not Necessary Band-Limited Functions: A Historical Overview.* SIAM Review, 34(1):40–53, March 1992.
- [3] **Cocârlan P., Roşculeţ M.** Serii Trigonometrice şi Aplicaţii. Editura Academiei Române, Bucureşti, 1991.
- [4] **Cohen L.** *Time-Frequency Distributions – A Review.* Proceedings of the I.E.E.E., 77(7):941–981, July 1989.
- [5] **Grigore Gh.** Lecţii de Analiză Numerică. Tipografia Universităţii, Bucureşti, 1990.
- [6] **Lemarié P.G.** *Ondelettes à localisation exponentielle.* Journal des Mathématiques Pures et Appliquées, 67:227–236, 1988.
- [7] **Niculescu M., Marcus S.** Analiză Matematică. E.D.P., Bucureşti, 1980.
- [8] **Oppenheim A.V., Schaffer R.** Digital Signal Processing. Prentice Hall, 1985.
- [9] **Stănăşilă O., Stanomir D.** Metode Matematice în Teoria Semnalelor. Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.
- [10] **Ştefănoiu D.** *A Theory of the Discrete-Time Orthonormal Wavelet Bases.* Preprint, 1995.
- [11] **Ştefănoiu D.** Signal analysis by the time-frequency methods. PhD thesis, University "Politehnica" of Bucharest, Department of Automatic Control and Computer Science, ROMANIA, April 1995.
- [12] **Ştefănoiu D.** Traitement du signal avec des ondelettes. Application au codage de la parole. Cours universitaire, INPG-ENSERG-ICP, Grenoble, March 1995.