

Universitatea "Politehnica" din București  
Facultatea "Automatică și Calculatoare"

# Tehnici de calcul în Prelucrarea Numerică a Semnalelor

• Note de Curs •

Ș.l.dr.ing.&mat. Dan Ștefănoiu <sup>\*</sup>, <sup>†</sup>

26 Mai 2007

---

<sup>\*</sup>Universitatea "Politehnica" din București, Facultatea "Automatică și Calculatoare", Grupul de Identificare a Sistemelor și Prelucrare de Semnal, 313 Splaiul Independenței, Sector 1, 77206 – București, ROMÂNIA.

@-mail: dan@indinf.pub.ro

<sup>†</sup>Chercheur invité à l'Institut de la Communication Parlée – URA CNRS 368, Équipe "Traitement et Codage de la Parole", Domaine Universitaire, 1180 Avenue Centrale, B.P. 25, 38040 Grenoble Cedex 9, FRANCE.

@-mail: dan@icp.grenet.fr



## Cuvînt înainte

Deși aflat la confluența dintre matematică și științele ingineresti (sau poate tocmai din acest motiv) Prelucrarea (Numerică a) Semnalelor este un domeniu cu un profund caracter aplicativ. Este firească, deci, intenția mărturisită de a prezenta într-o lucrare separată colecția de metode și tehnici de calcul care stau la baza algoritmilor clasici ai acestui domeniu.

Prin cursul de față – adresat în special studenților din anii terminali de la facultățile ingineresti cu profil electric – dorim să continuăm micul "tratat de matematică aplicată" care a debutat cu [8]. Scopul principal urmărit este dublu. Pe de o parte, dorim să punem în evidență o serie de proprietăți fundamentale ale principalelor transformări clasice practice de tip Fourier, cum sînt: Seriile Fourier Discrete (SFD) și Transformarea Fourier Discretă (TFD). Pe de altă parte, plecînd de la aceste proprietăți, încercăm să descriem una dintre cele mai importante clase de algoritmi de calcul eficienți: clasa algoritmilor de tip "FFT" (Fast Fourier Transform). O categorie importantă de aplicații (în special de Estimare Spectrală) se bazează pe utilizarea acestor algoritmi, datorită performanțelor lor remarcabile.

Pentru a înțelege mai bine conținutul acestui curs, recomandăm cititorului să studieze mai întîi [8] sau [4]. De asemenea, înțelegerea este condiționată și de o minimă dexteritate de a înțelege și opera cu formalismul matematic.

Pentru a atinge scopul declarat mai sus, am structurat acest curs în două părți. Prima dintre ele cuprinde Capitolele 1, 2 și 3 și se referă la proprietățile fundamentale ale SFD și TFD. Aceste capitole constituie un suport teoretic pentru partea a doua, care debutează cu Capitolul 4 și se încheie cu Capitolul 8. Partea a doua este prin excelență dedicată prezentării algoritmilor de tip FFT sub raportul corectitudinii și al complexității lor de calcul.

În spiritul unei tradiții, pe tot parcursul acestui curs, am urmărit să oferim ajutor cititorului interesat să învețe prin forțe proprii. Cunoștințele asimilate prin forțe proprii sînt cunoștințe achiziționate pe termen lung. Ca urmare, cititorul este invitat să rezolve singur exercițiile propuse la sfîrșitul cursului, acestea fiind destinate să îl ajute în învățare.

O listă bibliografică minimală a fost atașată tot în finalul cursului.

★

Exprim mulțumiri sincere tuturor colegilor români sau francezi care m-au susținut în realizarea acestui curs.

Dan Ștefănoiu  
București, Februarie 1996



# Cuprins

|          |                                                                                        |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Privire de ansamblu</b>                                                             | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Proprietăți ale Seriilor Fourier Discrete</b>                                       | <b>1</b>  |
| 2.1      | Proprietăți elementare . . . . .                                                       | 2         |
| 2.2      | Proprietăți de simetrie . . . . .                                                      | 3         |
| 2.3      | Proprietăți de convoluție . . . . .                                                    | 3         |
| <b>3</b> | <b>Proprietăți ale Transformării Fourier Discrete</b>                                  | <b>5</b>  |
| 3.1      | Dualitatea dintre spațiul secvențelor de durată finită și cel al secvențelor periodice | 6         |
| 3.2      | TFD și deplasarea circulară a secvențelor de durată finită . . . . .                   | 8         |
| 3.3      | Proprietăți de simetrie . . . . .                                                      | 9         |
| 3.4      | Proprietăți de convoluție circulară . . . . .                                          | 10        |
| 3.5      | Proprietăți de convoluție liniară . . . . .                                            | 12        |
| 3.6      | Reconstituirea Transformatei $Z$ din valori pe cercul unitar . . . . .                 | 16        |
| <b>4</b> | <b>Principiul fundamental al algoritmilor de tip FFT</b>                               | <b>17</b> |
| <b>5</b> | <b>Algoritmul lui Goertzel</b>                                                         | <b>19</b> |
| <b>6</b> | <b>Algoritmi de tip FFT bazați pe segmentarea semnalului în timp</b>                   | <b>22</b> |
| 6.1      | Principiul general . . . . .                                                           | 22        |
| 6.2      | Evaluarea complexității de calcul . . . . .                                            | 23        |
| 6.3      | Îmbunătățiri aduse de calculul de tip "fluture" . . . . .                              | 25        |
| 6.4      | Forme alternative . . . . .                                                            | 28        |
| 6.4.1    | Algoritmul Cooley-Tukey . . . . .                                                      | 28        |
| 6.4.2    | Algoritmul modificat, cu intrări și ieșiri ordonate normal . . . . .                   | 29        |
| 6.4.3    | Algoritmul lui Singleton . . . . .                                                     | 30        |
| <b>7</b> | <b>Algoritmi de tip FFT bazați pe segmentarea semnalului în frecvență</b>              | <b>30</b> |
| 7.1      | Principiul general . . . . .                                                           | 30        |
| 7.2      | Corelația cu algoritmi de tip FFT bazați pe segmentarea semnalului în timp . .         | 33        |
| <b>8</b> | <b>Algoritmi de tip FFT pentru semnale cu durată compozită</b>                         | <b>35</b> |
| 8.1      | Principiul general . . . . .                                                           | 35        |
| 8.2      | Evaluarea complexității . . . . .                                                      | 36        |
| 8.3      | Exemple . . . . .                                                                      | 36        |
| 8.3.1    | Cazul duratei divizibile cu 3 . . . . .                                                | 37        |
| 8.3.2    | Cazul duratei divizibile cu 4 . . . . .                                                | 37        |
| <b>A</b> | <b>Exerciții propuse</b>                                                               | <b>41</b> |

## Lista figurilor

|    |                                                                                                                                                                                                                                  |    |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1  | <i>Deplasarea circulară a secvențelor de durată finită.</i>                                                                                                                                                                      | 8  |
| 2  | <i>Convoluția circulară a secvențelor de durată finită.</i>                                                                                                                                                                      | 11 |
| 3  | <i>Scheme de calcul în Algoritmul lui Goertzel</i>                                                                                                                                                                               | 20 |
| 4  | <i>Ultima etapă de calcul a unui algoritm de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în timp.</i>                                                                                                                               | 23 |
| 5  | <i>Schema de calcul aferentă unui algoritm de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în timp, în cazul duratei finite egale cu <math>N = 2^3 = 8</math>.</i>                                                                   | 24 |
| 6  | <i>Schema bloc de calcul aferentă unui algoritm de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în timp, în cazul duratei finite de tipul <math>N = 2^L</math>.</i>                                                                  | 26 |
| 7  | <i>Două scheme echivalente ale unității de calcul de tip "fluture" specifice unui algoritm de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în timp.</i>                                                                              | 27 |
| 8  | <i>Schema eficientă de calcul aferentă unui algoritm de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în timp, în cazul duratei finite egale cu <math>N = 2^3 = 8</math>.</i>                                                         | 28 |
| 9  | <i>Schema de calcul aferentă Algoritmului Cooley-Tukey, în cazul unei secvențe de durată finită egală cu <math>N = 2^3 = 8</math>.</i>                                                                                           | 29 |
| 10 | <i>Schema de calcul aferentă unei versiuni a algoritmului de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului în timp, care operează cu intrări și ieșiri ordonate normal, în cazul duratei finite egale cu <math>N = 2^3 = 8</math>.</i> | 29 |
| 11 | <i>Schema de calcul aferentă Algoritmului lui Singleton, în cazul unei secvențe de durată finită egală cu <math>N = 2^3 = 8</math>.</i>                                                                                          | 30 |
| 12 | <i>Prima etapă de calcul a unui algoritm de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în frecvență.</i>                                                                                                                           | 32 |
| 13 | <i>Schema de calcul aferentă unui algoritm de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în frecvență, în cazul duratei finite egale cu <math>N = 2^3 = 8</math>.</i>                                                              | 32 |
| 14 | <i>Schema unității de calcul de tip "fluture" specifice unui algoritm de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în frecvență.</i>                                                                                              | 33 |
| 15 | <i>Schema de calcul aferentă Algoritmului de tip FFT utilizat pentru determinarea valorilor ITFD, în cazul unui semnal de durată finită egală cu <math>N = 2^3 = 8</math>.</i>                                                   | 34 |
| 16 | <i>Două scheme de calcul echivalente, asociate ultimei trepte a unui algoritm de tip FFT pentru secvențe cu durată compozită divizibilă cu 3.</i>                                                                                | 37 |
| 17 | <i>Schema de calcul asociată ultimei trepte a unui algoritm de tip FFT pentru secvențe cu durată compozită divizibilă cu 4.</i>                                                                                                  | 38 |
| 18 | <i>Două secvențe periodice de perioade diferite.</i>                                                                                                                                                                             | 41 |
| 19 | <i>Exemple de secvențe periodice.</i>                                                                                                                                                                                            | 43 |
| 20 | <i>O secvență de durată finită, cu creștere liniară.</i>                                                                                                                                                                         | 43 |
| 21 | <i>Imaginea prin operatorul <math>TFD_8</math> a unei secvențe de durată finită.</i>                                                                                                                                             | 45 |
| 22 | <i>Două scheme de calcul aferente variantei modificate a Algoritmului lui Goertzel.</i>                                                                                                                                          | 48 |
| 23 | <i>Unitatea elementară de calcul de tip "fluture" care conduce la implementarea eficientă a unui Algoritm de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului în timp.</i>                                                                | 48 |
| 24 | <i>Exerciții: schema de calcul nr. 1.</i>                                                                                                                                                                                        | 49 |
| 25 | <i>Exerciții: schema de calcul nr. 2.</i>                                                                                                                                                                                        | 49 |
| 26 | <i>Sistemul aferent pentru calculul valorilor TFD în cazul secvențelor de durată egală cu un pătrat perfect, <math>N = M^2</math>. (Algoritmul lui Bluestein.)</i>                                                               | 53 |

# Notății și convenții

|                                             |                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $[n]$                                       | Referința ” $n$ ” din lista bibliografică.                                                                                                                                                                    |
| $\forall$                                   | Oricare, indiferent care.                                                                                                                                                                                     |
| $\equiv$                                    | Identic, echivalent.                                                                                                                                                                                          |
| $\exists$                                   | Există.                                                                                                                                                                                                       |
| $\in$                                       | Apartține, face parte din.                                                                                                                                                                                    |
| $\subseteq$                                 | Inclus sau egal.                                                                                                                                                                                              |
| $\subset$                                   | Strict inclus (și diferit).                                                                                                                                                                                   |
| $\emptyset$                                 | Mulțimea vidă.                                                                                                                                                                                                |
| $E \vdots F$                                | ” $E$ ” este divizibil cu ” $F$ ”.                                                                                                                                                                            |
| $E \stackrel{def}{=} F$                     | Entitatea ” $E$ ” este definită prin expresia ” $F$ ”.                                                                                                                                                        |
| $E \stackrel{not}{=} F$                     | Entitatea ” $E$ ” este notată prin ” $F$ ” sau reciproc, în funcție de context.                                                                                                                               |
| $\mathbb{R}, \mathcal{C}$                   | Corpul matematic al numerelor reale, respectiv complexe.                                                                                                                                                      |
| $\Gamma$                                    | Unul din cele două corpuri de mai sus (indiferent care).                                                                                                                                                      |
| $\mathbb{R}_+$                              | Mulțimea numerelor reale nenegative (inclusiv zero).                                                                                                                                                          |
| $\mathcal{Q}$                               | Mulțimea numerelor raționale (fracții de întregi).                                                                                                                                                            |
| $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$                    | Mulțimea numerelor întregi, respectiv naturale (întregi nenegativi).                                                                                                                                          |
| $\mathbb{R}^*, \mathcal{C}^*,$              | Mulțimile $\mathbb{R}, \mathcal{C}, \mathcal{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ , din care a fost eliminat elementul zero (0).                                                                                       |
| $\mathcal{Q}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{N}^*$ |                                                                                                                                                                                                               |
| $\mathcal{U}$                               | Discul unitar închis al planului complex.                                                                                                                                                                     |
| $\partial \mathcal{U}$                      | Cercul unitar din planul complex (frontiera lui $\mathcal{U}$ ).                                                                                                                                              |
| $n = \overline{N_1, N_2}$                   | Numărul întreg ” $n$ ” parcurge mulțimea:<br>$\{N_1, N_1 + 1, \dots, N_2 - 1, N_2\} ,$<br>dacă $N_1 \leq N_2$ , sau mulțimea:<br>$\{N_1, N_1 - 1, \dots, N_2 + 1, N_2\} ,$<br>dacă $N_1 > N_2$ .              |
| $n \in \overline{N_1, N_2}$                 | Numărul întreg ” $n$ ” este un element al mulțimii:<br>$\{N_1, N_1 + 1, \dots, N_2 - 1, N_2\} ,$<br>dacă $N_1 \leq N_2$ , sau al mulțimii:<br>$\{N_1, N_1 - 1, \dots, N_2 + 1, N_2\} ,$<br>dacă $N_1 > N_2$ . |

|                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $n \% N$            | Restul împărțirii numărului " $n \in \mathbb{Z}$ " la numărul " $N \in \mathbb{N}$ ".                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| $C_N^n$             | Numărul de submulțimi de " $n$ " elemente ale unei mulțimi finite cu " $N$ " elemente ( $n \in \overline{0, N}$ ).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $sign(a)$           | Semnul numărului real " $a$ ":<br>$sign(a) \stackrel{def}{=} \begin{cases} +1 & , \quad a \geq 0 \\ -1 & , \quad a < 0 \end{cases}$<br>$(sign(0) = 1, \text{ prin convenție}).$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| $j$                 | Numărul imaginar unitar: $j^2 = -1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| $\bar{a}, a^*$      | Versiunea complex-conjugată a numărului " $a$ ".                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| $Re(a)$             | Partea reală a numărului " $a$ ".                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| $Im(a)$             | Partea imaginară a numărului " $a$ ".                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| $ a $               | Modulul (valoarea absolută, amplitudinea, magnitudinea) numărului " $a$ ".                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $arg(a)$            | Argumentul (faza) numărului " $a$ " ( $a =  a  e^{j arg(a)}$ ).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| $\lfloor a \rfloor$ | Partea întreagă a numărului " $a$ " (cel mai mare întreg inferior sau egal valorii reale a lui $a$ ).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| $\lceil a \rceil$   | Cel mai mic întreg superior sau egal valorii reale a numărului " $a$ ".                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| $exp(a)$            | Exponențiala numărului " $a$ " (real sau complex): $exp(a) \stackrel{def}{=} e^a$ . Dacă $a = \alpha + \beta j$ , atunci: $e^a \stackrel{def}{=} e^\alpha (\cos \beta + j \sin \beta)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| $\ln a$             | Logaritmul natural (neperian) al numărului " $a$ ".                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| $\eta$              | Notăție utilizată pentru a indica următoarea cantitate: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| $\overline{A}$      | Închiderea mulțimii " $A$ ".                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| $\sqcup$            | Reuniunea disjunctă a unei familii de mulțimi. De exemplu,<br>$A \sqcup B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\} ,$<br>fapt care indică etichetarea elementelor mulțimilor în așa fel încît să poată fi cunoscută apartenența de origine a fiecăruia dintre ele. Dacă, de exemplu, $A$ și $B$ au un element comun, reuniunea disjuncă precizează și căreia dintre ele îi aparține el, în timp ce reuniunea clasică face imposibilă recuperarea acestei informații. Practic, produsul cartezian utilizat mai sus nu este redat explicit cînd se face referirea la un element al reuniunii disjuncte. Vom scrie totdeauna $a \in A \subseteq A \sqcup B$ și nu $(a, 0) \in A \sqcup B$ , cum ar fi corect. |
| $\langle A \rangle$ | Subspațiul generat de mulțimea " $A$ ", inclusă într-un spațiu vectorial.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| $Hom(A, B)$         | Mulțimea aplicațiilor definite pe mulțimea " $A$ ", cu valori în mulțimea " $B$ ".                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $\mathcal{S}_c$     | Mulțimea semnalelor continue (în timp continuu); elementul generic al acestei mulțimi se notează prin " $f(t)$ " (parantezele rotunde ale argumentului indică timpul continuu).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |

|                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathcal{S}_d$         | Mulțimea semnalelor discrete (în timp discret); elementul generic al acestei mulțimi se notează prin " $x[n]$ " (parantezele drepte indică timpul discret).                                                                                                                                                                                                     |
| $\mathcal{S}_d^N$       | Mulțimea semnalelor discrete periodice, de perioadă " $N$ "; elementul generic al acestei mulțimi se notează prin " $\tilde{x}[n]$ ".                                                                                                                                                                                                                           |
| $\mathcal{S}_{dN}$      | Mulțimea semnalelor discrete de durată finită, avînd suportul de forma: $\overline{0, N-1}$ ; elementul generic al acestei mulțimi se notează prin " $x[n]$ ".                                                                                                                                                                                                  |
| $\mathfrak{S}$          | Aplicația sau operatorul identitate.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $f, f(x)$               | " $f$ " este numele unei funcții, iar " $f(x)$ " – valoarea sa în punctul " $x$ " al domeniului de definiție; uneori, pentru a pune în evidență tipul de argument utilizat, numele funcției poate fi indicat și în una din formele următoare: " $f(ax)$ ", " $x f(x)$ ", " $\frac{f(x)}{x}$ ", etc.                                                             |
| $f \stackrel{apt}{=} g$ | Funcția " $f$ " coincide <u>aproape peste tot</u> cu funcția " $g$ ", adică măsura Lebesgue a mulțimii de puncte unde cele două funcții au valori diferite este nulă; (în cazul uzual, această mulțime este fie finită, fie numărabilă).                                                                                                                        |
| $\langle f, g \rangle$  | Produsul scalar al elementelor " $f$ " și " $g$ " aparținînd unui spațiu Hilbert.                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| $\ f\ $                 | Norma elementului " $f$ " aparținînd unui spațiu Banach; într-un spațiu Hilbert, norma canonică definită plecînd de la produsul scalar, după cum urmează:<br>$\ f\  \stackrel{def}{=} \sqrt{\langle f, f \rangle} .$                                                                                                                                            |
| $\downarrow n$          | Operația de decimare cu " $n-1$ " eşantioane a unui semnal discret (aici, $n \in \mathbb{N}^*$ ); dacă $n = 1$ , atunci:<br>$(f \downarrow 1) \equiv f ;$<br>dacă $n \geq 2$ , atunci, prin convenție:<br>$(f \downarrow n)[k] \stackrel{def}{=} f[nk] \quad \forall k \in \mathbb{Z} .$                                                                        |
| $\uparrow n$            | Operația de interpolare cu " $n-1$ " zerouri a unui semnal discret (aici, $n \in \mathbb{N}^*$ ); dacă $n = 1$ , atunci:<br>$(f \uparrow 1) \equiv f ;$<br>dacă $n \geq 2$ , atunci:<br>$(f \uparrow n)[k] \stackrel{def}{=} \begin{cases} f[k/n] & , \quad k : n \quad (k \% n = 0) \\ 0 & , \quad k \% n \neq 0 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z} .$ |

$\hat{f}, \mathcal{F}(f)$

Transformarea Fourier continuă aplicată semnalului ” $f$ ” și definită astfel (în funcție de natura lui  $f$ ):

- dacă  $f$  este continuu:

$$\hat{f}(\Omega) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\Omega t} dt, \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}.$$

- dacă  $f$  este discret:

$$\hat{f}(\omega) \stackrel{def}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n]e^{-j\omega n}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

S-a notat prin ” $\mathcal{F}$ ” *operatorul* de tip Fourier.

$Supp(f)$

Suportul funcției ” $f$ ”:

- în cazul continuu:

$$Supp(f) \stackrel{def}{=} \overline{\{t \in \mathbb{R} \mid f(t) \neq 0\}}$$

(închiderea complementarei mulțimii zerourilor);

- în cazul discret:

$$Supp(f) \stackrel{def}{=} \{t \in \mathbb{Z} \mid f[n] \neq 0\}$$

(complementara mulțimii zerourilor).

$f \star g$

Produsul (operația) de convoluție dintre semnalele ” $f$ ” și ” $g$ ”:

- în cazul continuu:

$$(f \star g)(t) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

- în cazul discret:

$$(f \star g)[n] \stackrel{def}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[n - k]g[k] \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(Corectitudinea definițiilor de mai sus este asigurată numai în anumite condiții și nu în general, pentru orice pereche de semnale.)

$\stackrel{PC}{=}$

Egalitate ce indică un anumit tip de convergență a unui șir de funcții: *convergența punctuală*.

$\oint_{\gamma}$

Integrală de contur ” $\gamma$ ”, parcurs în sens trigonometric.

$\oint_{\gamma}$

Integrală de contur ” $\gamma$ ”, parcurs în sens orar.

$\int, \int_{-\infty}^{+\infty}, \int_{-\infty}^{+\infty},$   
 $\int_{\mathbb{R}}, \int_{\mathbb{R}}$

Integrală liniară pe mulțimea  $\mathbb{R}$ ; prima notație, adică integrala fără limite de integrare este mai utilizată decât celelalte.

$\int_n$ 

Integrală multiplă pe mulțimea  $\mathbb{R}$ ; dacă  $n = 1$ , atunci integrala este *simplă* (vezi notația anterioară); dacă  $n > 1$ , atunci notația indică următorul calcul:

$$\int_n f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \stackrel{def}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n \text{ ori}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

 $\mathbf{C}^n$ 

Mulțimea funcțiilor de clasă " $n$ ", adică a funcțiilor reale sau complexe de  $n$  ori derivabile, cu derivata de ordin  $n$  continuă ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dacă  $n = 0$ , atunci  $\mathbf{C}^0$  este mulțimea funcțiilor continue.

 $\mathbf{C}_0^n$ 

Mulțimea funcțiilor cu suport compact, de clasă " $n$ " ( $n \in \mathbb{N}$ ).

 $f^{(n)}$ 

Derivata de ordin " $n$ " a funcției " $f$ " ( $n \in \mathbb{N}$ ); dacă  $n = 0$ , atunci  $f^{(0)} \equiv f$ .

 $\mathbf{C}^\alpha$ 

Mulțimea funcțiilor de clasă " $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ", (funcții  $\alpha$ -derivabile în sens Hölder); de fapt, aceste funcții sînt de  $[\alpha]$  ori derivabile, iar derivata de ordin  $[\alpha]$  ( $f^{([\alpha])}$ ) verifică următoarea inegalitate:

$$|f^{([\alpha])}(x) - f^{([\alpha])}(y)| < C |x - y|^{\alpha - [\alpha]} ,$$

pentru orice  $x$  și  $y$  din domeniul de definiție; în acest context, " $\mathbf{C}$ " este o constantă pozitivă. Toate funcțiile acestei clase sînt continue și, în plus:  $\mathbf{C}^{[\alpha]} \subseteq \mathbf{C}^\alpha$ .

 $L^1(\Gamma)$ 

Spațiul semnalelor continue cu valori în corpul " $\Gamma \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ", care au modulul integrabil (*spațiul semnalelor continue și stabile*); acest spațiu este de tip Banach, norma aferentă fiind definită astfel:

$$\|f\| \stackrel{def}{=} \int |f(t)| dt < \infty .$$

 $l^1(\Gamma)$ 

Spațiul semnalelor discrete cu valori în corpul " $\Gamma \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ", care au modulul sumabil (*spațiul semnalelor discrete stabile*); acest spațiu este de tip Banach, norma aferentă fiind definită astfel:

$$\|f\| \stackrel{def}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f[n]| < \infty .$$

 $L^2(\Gamma)$ 

Spațiul semnalelor continue cu valori în corpul " $\Gamma \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ", care au pătratul modulului integrabil (*spațiul semnalelor continue de energie finită*); acest spațiu este de tip Hilbert, produsul scalar aferent fiind definit astfel:

$$\langle f, g \rangle \stackrel{def}{=} \int f(t) \overline{g(t)} dt .$$

Norma canonică asociată se exprimă în forma:

$$\|f\| \stackrel{def}{=} \sqrt{\int |f(t)|^2 dt} < \infty .$$

$l^2(\Gamma)$  Spațiul semnalelor discrete cu valori în corpul " $\Gamma \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ", care au pătratul modulului sumabil (*spațiul semnalelor discrete de energie finită*); acest spațiu este de tip Hilbert, produsul scalar aferent fiind definit astfel:

$$\langle f, g \rangle \stackrel{def}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] \overline{g[n]} ,$$

Norma canonică asociată se exprimă în forma:

$$\|f\| \stackrel{def}{=} \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f[n]|^2} < \infty .$$

$\delta, \delta_0$  Impulsul lui Dirac (în cazul continuu) sau unitar (în cazul discret), centrat în originea timpului.

$\delta_k$  Impulsul lui Dirac (în cazul continuu) sau unitar (în cazul discret), centrat în momentul de timp " $k$ ".

$\delta^{(n)}$  Derivata de ordin " $n$ " ( $n \in \mathbb{N}$ ) a impulsului lui Dirac (în sensul indicat de Teoria Distribuțiilor).

$\delta_{N\mathbb{Z}}$  Impulsul unitar  $N$ -periodic.

$u_0$  Treapta unitară discretă:  $u_0[n] = 0$ , pentru  $n < 0$ , iar  $u_0[n] = 1$ , pentru  $n \geq 0$ .

## Abrevieri

|             |                                                                                                                                       |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>ELD</b>  | <u>E</u> cuatie <u>L</u> iniară cu <u>D</u> iferențe.                                                                                 |
| <b>FFT</b>  | Clasa de algoritmi de implementare eficientă a Transformării Fourier Discrete ( <i><u>F</u>ast <u>F</u>ourier <u>T</u>ransform</i> ). |
| <b>FIR</b>  | Filtru cu răspuns finit la impuls ( <i><u>F</u>inite <u>I</u>mpulse <u>R</u>esponse</i> ).                                            |
| <b>IIR</b>  | Filtru cu răspuns infinit la răspuns ( <i><u>I</u>nfinite <u>I</u>mpulse <u>R</u>esponse</i> ).                                       |
| <b>SFD</b>  | <u>S</u> erie <u>F</u> ourier <u>D</u> iscretă.                                                                                       |
| <b>SID</b>  | <u>S</u> istem <u>I</u> nvariant la <u>D</u> eplasări (temporale).                                                                    |
| <b>SLID</b> | <u>S</u> istem <u>L</u> iniar <u>I</u> nvariant la <u>D</u> eplasări (temporale).                                                     |
| <b>TCFC</b> | <u>T</u> ransformarea <u>C</u> ontinuă a lui <u>F</u> ourier pentru semnale <u>C</u> ontinue și stabile.                              |
| <b>TCFD</b> | <u>T</u> ransformarea <u>C</u> ontinuă a lui <u>F</u> ourier pentru semnale <u>D</u> iscrete și stabile.                              |
| <b>TF</b>   | <u>T</u> ransformarea <u>F</u> ourier (continuă sau discretă, după caz).                                                              |
| <b>TFD</b>  | <u>T</u> ransformarea <u>F</u> ourier <u>D</u> iscretă.                                                                               |



# 1 Privire de ansamblu

Deși cel mai vechi, Transformarea Fourier (TF) a rămas și cel mai utilizat instrument de analiză a semnalelor. Apariția unor instrumente moderne de analiză (unele dintre ele generalizând această transformare, cum ar fi *Transformarea Fourier Rapidă* [7]) nu a făcut decât să întărească și mai mult rolul TF atât în abordările teoretice cât și în aplicații.

Importanța acestei transformări conduce în mod firesc la studiul ei detaliat. Astăzi, după o lungă perioadă de cercetare și studiu, se poate afirma că se cunosc toate proprietățile teoretice și practice ale TF. Așa cum s-a arătat în [8], TF se definește diferit pentru fiecare clasă de semnale. Pentru Prelucrarea Numerică a Semnalelor, versiunile cele mai utilizate ale TF sînt: *Seria Fourier Discretă* (SFD) (care operează cu semnale discrete periodice) și *Transformarea Fourier Discretă* (TFD) (care se poate aplica numai semnalelor discrete de durată finită). Definițiile acestor instrumente de analiză au fost deja prezentate în [8], dar vor fi reluate și în cursul de față. Aceste definiții arată că atât SFD cât și TFD provin, de fapt, de la *Transformarea Continuă a lui Fourier aplicată semnalelor Discrete (stabile)* (TCFD), deci este natural ca ele să conserve o mare parte a proprietăților acesteia.

Calculul efectiv al valorilor SFD sau TFD se poate realiza fie utilizînd definițiile, fie, mai eficient, apelînd la algoritmi performanți care să exploateze proprietățile fundamentale ale acestor transformări.

★

În acest curs, sînt prezentate pe larg atât teoria legată de proprietățile celor două transformări cât și algoritmii eficienți de calcul ai TFD (*Fast Fourier Transform* (FFT)). El este alcătuit dintr-un număr de 7 capitole distincte (în afara celui de față), structurate în 2 părți: una referitoare la proprietățile SFD și TFD și alta dedicată algoritmilor FFT. O anexă suplimentară încheie capitolul cu o serie de exerciții propuse spre rezolvare, care vin în ajutorul cititorului.

## 2 Proprietăți ale Seriilor Fourier Discrete

În [8], s-a arătat că semnalele discrete periodice pot fi reprezentate în domeniul frecvenței cu ajutorul *Seriilor Fourier Discrete* (SFD). Reamintim că, dacă  $\mathcal{S}_d^N$  este mulțimea semnalelor discrete  $N$ -periodice, iar  $\tilde{x}$  este un element al acesteia, atunci operatorul SFD aplicat lui  $\tilde{x}$  produce tot o secvență  $N$ -periodică, notată cu  $\tilde{X}$ :

$$\tilde{X}[k] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] w_N^{nk}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Aici,  $w_N^n \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\frac{2n\pi}{N}j}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , deci  $\{w_N^n\}_{n=0, N-1}$  reprezintă rădăcinile de ordin  $N$  ale unității (adică soluțiile ecuației:  $z^N - 1 = 0$ ). Ca urmare a acestui fapt, mulțimea rădăcinilor are următoarea proprietate fundamentală:

$$\sum_{n=0}^{N-1} w_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{w}_N^{nk} = \begin{cases} N & , \quad k \in N\mathbb{Z} \\ 0 & , \quad n \in \mathbb{Z} \setminus N\mathbb{Z} \end{cases} \stackrel{\text{not}}{=} N \delta_{N\mathbb{Z}}[k]. \quad (2)$$

Relația de mai sus permite recuperarea semnalului original  $\tilde{x}$  din *coeficienții Fourier*  $\tilde{X}$ , după următoarea formulă de inversiune:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \bar{w}_N^{kn}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

## 2.1 Proprietăți elementare

Operatorul SFD definit de relația (1) și operatorul ISFD definit de relația (3) sînt aplicații liniare, după cum se poate verifica direct, cu ușurință. Mai mult, există posibilitatea exprimării acestor două relații în formă matricială, fapt care favorizează implementarea calculului SFD sau ISFD în limbajul MATLAB.

Pentru a ilustra această proprietate, să considerăm că  $\tilde{x}, \tilde{X} \in \mathcal{S}_d^N$  au proprietatea care urmează:  $\tilde{X} \equiv SFD(\tilde{x})$ . Dacă definim cantitățile vectoriale sau matriciale de mai jos:

$$u \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \tilde{x}[2] \\ \vdots \\ \tilde{x}[N-1] \end{bmatrix}, \quad v \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \tilde{X}[0] \\ \tilde{X}[1] \\ \tilde{X}[2] \\ \vdots \\ \tilde{X}[N-1] \end{bmatrix}, \quad W_N \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N^1 & w_N^2 & \cdots & w_N^{N-1} \\ 1 & w_N^2 & w_N^{4\%N} & \cdots & w_N^{2(N-1)\%N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1} & w_N^{2(N-1)\%N} & \cdots & w_N^{(N-1)^2\%N} \end{bmatrix},$$

unde " $n\%N$ " indică restul împărțirii lui  $n$  la  $N$ , atunci proprietatea anterioară se exprimă concis astfel:

$$v = W_N u.$$

Matricea complexă  $W_N$  din această exprimare are, la rîndul ei, o serie de proprietăți interesante, dintre care se pot enumera următoarele:

- nu depinde de secvențele  $\tilde{x}$  și  $\tilde{X}$  luate în considerare, fiind alcătuită numai din valorile rădăcinilor de ordin  $N$  ale unității;
- este simetrică:  $W_N^T = W_N$ ;
- este inversabilă, avînd inversa egală cu:  $W_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{W_N}$  (dar nu este și unitară, datorită factorului " $1/N$ ").

Ultima dintre aceste proprietăți se datorează identității (2) verificată de rădăcinile de ordin  $N$  ale unității. Ea conduce la exprimarea în formă matricială și a expresiei operatorului ISFD, după cum urmează:

$$u = W_N^{-1} v = \frac{1}{N} \overline{W_N} v.$$

(În această nouă relație, calculul efectiv al inversei matricii  $W_N$  este evitat.)

O altă proprietate interesantă a SFD este legată de deplasarea (translatarea) în timp a secvențelor periodice. Reamintim că operatorul de deplasare cu  $m \in \mathbb{Z}$  eşantioane a fost notat prin " $q^{-m}$ ". Dacă  $\tilde{x} \in \mathcal{S}_d^N$  și  $m \in \mathbb{Z}$ , atunci se poate arăta prin calcul direct că:

$$SFD(q^{-m} \tilde{x})[k] = w_N^{mk} SFD(\tilde{x})[k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Această proprietate arată că deplasarea în timp cu  $m$  eşantioane a secvenței periodice provoacă o rotație cu unghiul  $-\frac{2km\pi}{N}$  a valorii SFD de argument  $k$ .

Reciproc, dacă fiecare valoare  $\tilde{x}[n]$  a secvenței periodice  $\tilde{x} \in \mathcal{S}_d^N$  este rotită cu unghiul  $-\frac{2mn\pi}{N}$ , atunci:

$$SFD(\{w_N^{mn} \tilde{x}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}})[k] = SFD(\tilde{x})[k+m] = q^{+m} SFD(\tilde{x})[k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

## 2.2 Proprietăți de simetrie

Proprietățile de simetrie ale SFD sînt similare celor ale TCFD, așa cum arată Tabelul 1 care urmează. (Notațiile utilizate în acest tabel au fost deja prezentate în [8].)

Tabelul 1: *Sumarul proprietăților de simetrie ale SFD.*

| Secvență | $\tilde{x}$     | $\overline{\tilde{x}}$       | $\tilde{x}_s$     | $\tilde{x}_R$     | $\tilde{x}_I$        | $\tilde{x}_e$     | $\tilde{x}_o$        |
|----------|-----------------|------------------------------|-------------------|-------------------|----------------------|-------------------|----------------------|
| SFD      | $\widetilde{X}$ | $\overline{\widetilde{X}_s}$ | $\widetilde{X}_s$ | $\widetilde{X}_e$ | $-j \widetilde{X}_o$ | $\widetilde{X}_R$ | $+j \widetilde{X}_I$ |

## 2.3 Proprietăți de convoluție

Secvențele periodice de semnal nu sînt și stabile, fapt care împiedică utilizarea produsului de convoluție clasic definit în [8]. De aceea, pentru acest tip de semnale, este necesară redefinirea operației de convoluție. Această redefinire este făcută în concordanță cu proprietățile SFD și cu o anumită soluție dorită a problemei convoluției.

Să notăm noua operație de convoluție dintre două secvențe de aceeași perioadă prin " $\tilde{*}$ ".

### Notă

- Dacă secvențele aflate în convoluție au perioade diferite, se poate considera că ele aparțin spațiului secvențelor periodice de perioadă egală cu cel mai mic multiplu comun al perioadelor lor.

În aceste condiții, operația " $\tilde{*}$ " trebuie definită în așa fel încît SFD să verifice următoarea proprietate de convoluție:

$$SFD(\tilde{x} \tilde{*} \tilde{y}) \equiv SFD(\tilde{x}) \cdot SFD(\tilde{y}) , \quad (6)$$

unde  $\tilde{x}$  și  $\tilde{y}$  au aceeași perioadă,  $N$ .

Fie  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{S}_d^N$  și  $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$  imaginile lor prin operatorul SFD. Mai notăm prin  $\widetilde{Z}$  cantitatea  $\widetilde{X} \cdot \widetilde{Y}$ . Evident,  $\widetilde{Z} \in \mathcal{S}_d^N$ , deci este natural să căutăm secvența  $\tilde{z} \in \mathcal{S}_d^N$  a cărei imagine prin operatorul SFD este chiar  $\widetilde{Z}$ .

Se constată că dacă utilizăm definiția (1), se poate scrie următoarea egalitate:

$$\tilde{Z}[k] \stackrel{def}{=} \widetilde{X}[k] \widetilde{Y}[k] = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[l] \tilde{y}[m] w_N^{k(l+m)} , \quad \forall k \in \mathbb{Z} .$$

Pentru a recupera secvența  $\tilde{z}$ , este suficient acum să apelăm la formula de inversiune (3):

$$\tilde{z}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Z}[k] w_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[l] \tilde{y}[m] w_N^{k(l+m-n)} , \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Grupînd adecvat termenii acestor sume, rezultă în continuare egalitatea următoare:

$$\tilde{z}[n] = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[l] \tilde{y}[m] \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{k(l+m-n)} \right] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} . \quad (7)$$

Factorul izolat dintre paranteze nu depinde de secvențele discrete considerate și poate fi evaluat cu ajutorul proprietății (2). Să considerăm că  $n \in \overline{0, N-1}$  (cum  $\tilde{z}$  este  $N$ -periodică, este suficient să determinăm valorile ei pe o perioadă). Astfel, deoarece  $(l+m-n) \in \overline{1-N, 2N-2}$ , factorul este egal cu 1 numai în următoarele 2 cazuri:

$$l = n - m$$

- în acest caz, deoarece  $l \in \overline{0, N-1}$ , este necesar ca  $m \in \overline{1-N, n}$ ; cum  $m \geq 0$ , domeniul de variație se restrânge la:  $m \in \overline{0, n}$ ;

$$l = N + n - m$$

- în acest caz, deoarece  $l \in \overline{0, N-1}$ , este necesar ca  $m \in \overline{n+1, N+n}$ ; cum numărul  $m$  variază în gama  $\overline{0, N-1}$ , domeniul de variație se restrânge la  $m \in \overline{n+1, N-1}$ , cu condiția ca  $n \in \overline{0, N-2}$ .

Aceste observații conduc la următorul rezultat:

$$\tilde{z}[n] = \begin{cases} \sum_{m=0}^n \tilde{x}[n-m] \tilde{y}[m] + \sum_{m=n+1}^{N-1} \tilde{x}[N+n-m] \tilde{y}[m] & , \quad n \in \overline{0, N-2} \\ \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[n-m] \tilde{y}[m] & , \quad n = N-1 \end{cases} .$$

Însă  $\tilde{x}$  este  $N$ -periodică, astfel că  $\tilde{x}[N+n-m] = \tilde{x}[n-m]$  și, în consecință, rezultă că secvența  $\tilde{z}$  se construiește cu ajutorul următoarei relații:

$$\tilde{z}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[n-m] \tilde{y}[m] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Expresia la care s-a ajuns este similară celei de definiție a operației de convoluție între semnalele stabile. Ținând cont că semnalele periodice sînt redundante, este natural ca o eventuală convoluție între ele să ia în calcul numai informația neredundantă pe o perioadă.

### Definiția 2.1

Se numește **convoluție periodică** a secvențelor discrete  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{S}_d^N$  următoarea operație:

$$(\tilde{x} \star \tilde{y}) \stackrel{def}{=} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[n-m] \tilde{y}[m] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} . \quad (8)$$

Datorită periodicității secvențelor implicate în această operație, ea este bine definită, în sensul că oferă tot o secvență periodică, de aceeași perioadă cu a operanzilor săi. Aceasta justifică și denumirea din definiția de mai sus. Mai mult, datorită formei similare cu operația de convoluție clasică (dintre secvențele stabile), noua operație de convoluție conservă o serie de proprietăți ale acesteia, cum ar fi: asociativitatea și comutativitatea.

Definiția 2.1 conduce în mod natural la verificarea următoarei Teoreme (directe) de convoluție periodică:

### Teorema 2.1 (Teorema (directă) de convoluție periodică)

*Dacă  $\tilde{x}$  și  $\tilde{y}$  sînt două secvențe  $N$ -periodice, atunci imaginea prin operatorul SFD a operației de convoluție periodică dintre ele este egală cu produsul imaginilor lor prin SFD:*

$$SFD(\tilde{x} \star \tilde{y}) \equiv SFD(\tilde{x}) \cdot SFD(\tilde{y}) .$$

Tot noua operație conferă mulțimii  $\mathcal{S}_d^N$  o nouă structură algebrică, mai bogată. Astfel, se poate arăta cu ușurință că  $(\mathcal{S}_d^N, +, \cdot, \star)$  este o algebră unitară comutativă, elementul unitar fiind impulsul unitar periodic  $\delta_{N\mathbb{Z}}$ . Dimensiunea acestei algebre este finită:  $(2N+1)$  peste corpul  $\mathbb{R}$  sau  $N$  peste corpul  $\mathbb{C}$ .

În finalul acestui capitol, vom ilustra o altă proprietate interesantă a SFD, legată tot de convoluția circulară. Este vorba despre Teorema inversă de convoluție periodică, care oferă o imagine asupra modului în care reacționează operatorul ISFD (SFD invers din relația (3)) la operația de convoluție periodică.

**Teorema 2.2 (Teorema inversă de convoluție periodică)**

Fie  $\tilde{x}$  și  $\tilde{y}$  două secvențe  $N$ -periodice, având imaginile prin SFD notate cu  $\tilde{X}$ , respectiv  $\tilde{Y}$ . Evident, cele două imagini sînt tot secvențe  $N$ -periodice, deci are sens operația de convoluție periodică dintre ele. Atunci:

$$ISFD(\tilde{X} \star \tilde{Y}) \equiv N \tilde{x} \cdot \tilde{y} . \quad (9)$$

*Demonstrație*

↓

Fie  $\tilde{Z} \stackrel{def}{=} SFD(\tilde{x} \cdot \tilde{y})$ . Vom evalua  $\tilde{Z}$  în funcție de  $\tilde{X}$  și  $\tilde{Y}$ .

Se constată că, folosind relația (3), se poate exprima  $\tilde{Z}$  după cum urmează:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}[k] &\stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \tilde{y}[n] w_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{X}[p] w_N^{-pn} \right] \left[ \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{Y}[q] w_N^{-qn} \right] w_N^{nk} = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{X}[p] \tilde{Y}[q] w_N^{n(k-p-q)} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{X}[p] \tilde{Y}[q] \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{-n(p+q-k)} \right] , \quad \forall k \in \mathbb{Z} . \end{aligned}$$

Factorul izolat dintre parantezele drepte nu depinde de secvențele periodice și este asemănător celui din relația (7). O discuție similară celei din acel context conduce, în continuare la următorul rezultat (în care intervine proprietatea (2)):

$$\tilde{Z}[k] = \frac{1}{N} \begin{cases} \sum_{q=0}^k \tilde{X}[k-q] \tilde{Y}[q] + \sum_{q=k+1}^{N-1} \tilde{X}[N+k-q] \tilde{Y}[q] & , \quad k \in \overline{0, N-2} \\ \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{X}[k-q] \tilde{Y}[q] & , \quad k = N-1 \end{cases} .$$

Secvența  $\tilde{X}$  fiind  $N$ -periodică, rezultă că  $\tilde{X}[N+n-m] = \tilde{X}[n-m]$  și, în consecință:

$$\tilde{Z}[k] = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{X}[k-q] \tilde{Y}[q] = \frac{1}{N} (\tilde{X} \star \tilde{Y})[k] , \quad \forall k \in \mathbb{Z} .$$

Aplicînd operatorul ISFD asupra ultimei relații, obținem identitatea din enunț.

□ \_\_\_\_\_ (Teorema 2.2)↑

### 3 Proprietăți ale Transformării Fourier Discrete

Semnalele discrete de durată finită sînt cele mai utilizate în practică. Ele au proprietatea de a fi simultan stabile și de energie finită, astfel că reprezentarea lor în frecvență ar putea fi realizată cu instrumentele descrise pînă acum. Cu toate acestea, durata finită favorizează definirea unui instrument special, care să ia în considerare acest aspect.

În [8], am prezentat definiția *Transformării Fourier Discrete* (TFD), care operează pe mulțimea semnalelor discrete de suport inclus în mulțimea  $\overline{0, N-1}$ , notată cu " $\mathcal{S}_{dN}$ ". Reamintim că dacă  $x \in \mathcal{S}_{dN}$ , atunci operatorul TFD se definește astfel:

$$X[k] \stackrel{def}{=} \mathcal{R}_N[k] \tilde{X}[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{nk} & , \quad k \in \overline{0, N-1} \\ 0 & , \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \overline{0, N-1} \end{cases} . \quad (10)$$

În această expresie,  $\mathcal{R}_N$  indică fereastra dreptunghiulară unitară de suport  $\overline{0, N-1}$ , iar  $\widetilde{X}$  este imaginea prin operatorul SFD a secvenței periodice generate de  $x$ :  $\widetilde{x}[n] \stackrel{def}{=} x[n \% N]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ . Noua secvență discretă astfel obținută,  $X$ , aparține tot mulțimii  $\mathcal{S}_{dN}$ , ca și secvența inițială  $x$ , fapt care arată că operatorul TFD conservă contextul de lucru (întocmai ca și SFD).

Proprietatea remarcabilă (2) (de la pagina 1) oferă posibilitatea definirii transformării inverse (ITFD), cu ajutorul căreia secvența inițială este recuperată exact:

$$x[n] \stackrel{def}{=} \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \overline{w}_N^{kn} & , \quad n \in \overline{0, N-1} \\ 0 & , \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \overline{0, N-1} \end{cases} . \quad (11)$$

În general, dacă nu s-ar face distincția dintre operatorii SFD și TFD, acest capitol ar constitui doar o repetare a celui anterior. Cu toate acestea, luarea în considerare a duratei finite conduce la câteva particularități specifice interesante, care se vor reflecta și în proprietățile operatorului TFD. Ca urmare, în acest capitol vor fi ilustrate exact aceste proprietăți particulare ale TFD, toate celelalte proprietăți constituind o prelungire firească a proprietăților SFD.

### 3.1 Dualitatea dintre spațiul secvențelor de durată finită și cel al secvențelor periodice

Exprimarea oricărei secvențe de durată  $N$  cu ajutorul ferestrei dreptunghiulare  $\mathcal{R}_N$  a fost sugerată de o anumită convenție de ordin practic. Atunci când unui fenomen care evoluează în timp nu i se cunoaște comportarea în anumite momente, mărimile cu ajutorul cărora este el descris pot lua orice valoare, cu aceeași probabilitate apriorică, în jurul unei medii. Cunoașterea probabilităților de apariție ca și a mediei este legată adesea de informații apriorice suplimentare, care nu sînt întotdeauna disponibile. De aceea, atunci când informația despre fenomenul observat se reduce numai la valorile măsurate ale unui semnal, se consideră naturală prelungirea cu valoarea zero a acestui semnal în afara duratei de observare, chiar dacă, în realitate, această operație conduce la distorsionarea semnalului original. În aceste condiții,  $\mathcal{R}_N$  se mai numește și *fereastră de observabilitate*, ea acționînd ca o fereastră temporală culisantă de-a lungul semnalului și realizînd anularea valorilor (încă) neobservate.

Păstrarea contextului de lucru (adică rămînerea în cadrul mulțimii  $\mathcal{S}_{dN}$ ) în cazul unor transformări aplicate semnalelor de durată finită (cum ar fi translațiile în timp) nu este ușor de realizat. Uneori, este necesar să fie introduse noi concepte, care, formal, să ne ajute la atingerea acestui obiectiv. Așa cum se va vedea, la definirea acestor concepte contribuie în mod esențial legătura dintre spațiile  $\mathcal{S}_d^N$  (a secvențelor  $N$ -periodice) și  $\mathcal{S}_{dN}$  (a secvențelor de durată finită egală cu  $N$ ).

Între spațiile  $\mathcal{S}_{dN}$  și  $\mathcal{S}_d^N$  există numeroase corelații. Așa cum s-a arătat, din orice secvență de durată finită se poate construi o unică secvență periodică utilizînd artificul prelungirii prin periodicitate:

$$\widetilde{x}[n] \stackrel{def}{=} x[n \% N] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} . \quad (12)$$

Reciproc, prin restrîngerea valorilor unui semnal periodic la fereastra de observabilitate, se poate genera un unic semnal de durată finită:

$$x[n] \stackrel{def}{=} \widetilde{x}[n] \mathcal{R}_N[n] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} . \quad (13)$$

Aceste proprietăți elementare arată că spațiile  $\mathcal{S}_{dN}$  și  $\mathcal{S}_d^N$  sînt izomorfe, fapt care permite realizarea unei legături de dualitate între ele.

O altă corelație interesantă dintre cele două spații se datorează Transformatei  $\mathcal{Z}$ . Rezultatul care urmează ilustrează o altă modalitate de a construi o secvență periodică plecînd de la o secvență de durată finită.

#### Notă

- Reamintim că definiția Transformării  $\mathcal{Z}$  este următoarea:

$$\mathcal{Z}(x)(z) \stackrel{not}{=} X(z) \stackrel{def}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] z^{-n}, \quad \forall z \in \mathcal{A}(x), \quad (14)$$

unde  $\mathcal{A}(x)$  este zona de convergență specifică secvenței oarecare  $x \in \mathcal{S}_d$  (de forma unei coroane circulare). În general, dacă secvența  $x$  este stabilă, atunci cercul unitar din planul complex este inclus în zona de convergență. Secvențele cauzale au zona de convergență inclusă în afara discului unitar. Zona de convergență a secvențelor cauzale și stabile este chiar exteriorul discului unitar deschis.

### Propoziția 3.1

Fie  $x \in l^1(\mathbb{Z})$  o secvență stabilă (nu neapărat de durată finită) și  $N \in \mathbb{N}^*$  un număr arbitrar fixat. Se notează cu  $\mathcal{A}(x)$  aria de convergență a Transformatei  $\mathcal{Z}$  asociată lui  $x$ . Este evident că  $\mathcal{A}(x)$  include cercul unitar din planul complex,  $\partial\mathcal{U}$ , deci se pot evalua valorile lui  $\mathcal{Z}(x)$  în nodurile  $\{w_N^{-k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  ale cercului unitar:

$$\widetilde{X}[k] \stackrel{not}{=} \mathcal{Z}(x) \left( w_N^{-k} \right) \stackrel{def}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] z^{-n} \Big|_{z=w_N^{-k}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] w_N^{nk}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Atunci:

1. Secvența  $\widetilde{X}$  este  $N$ -periodică.
2. Semnalul  $N$ -periodic  $\tilde{x}$  produs de aplicarea operatorului ISFD asupra secvenței  $\widetilde{X}$  verifică următoarea formulă de aliere în timp:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} x[n + pN], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

*Demonstrație* \_\_\_\_\_ ↓

1. Deoarece  $w_N^N = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , rezultă că  $\widetilde{X}[k + pN] = \widetilde{X}[k]$ ,  $\forall k, p \in \mathbb{Z}$ , deci  $\widetilde{X} \in \mathcal{S}_d^N$ .
2. Relația din enunț se poate obține prin calcul direct. Dacă utilizăm definiția (3) a operatorului ISFD (pagina 1), precum și expresia secvenței  $\widetilde{X}$  din ipoteză, se poate scrie că:

$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &\stackrel{def}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{X}[k] w_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} x[m] w_N^{mk} \right) w_N^{-kn} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} x[m] w_N^{(m-n)k}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Cum  $\partial\mathcal{U} \subset \mathcal{A}(x)$ , rezultă că suma infinită este absolut convergentă și poate interverti cu suma finită:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x[m] \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{(m-n)k} \right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Suma izolată între paranteze poate fi evaluată cu ajutorul formulei (2) (de la pagina 1), astfel că:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x[m] \delta_{N\mathbb{Z}}[m - n] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} x[n + pN], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

□ \_\_\_\_\_ (Propoziția 3.1)↑

Formula de aliere (15) din cadrul acestei Propoziții poate fi particularizată și în cazul secvențelor de durată finită, deoarece aria de convergență a unei astfel de secvențe acoperă întregul plan complex mai puțin originea ( $\mathcal{D}^*$ ). În acest caz, se obține o nouă relație de legătură dintre cele două spații:

$$\tilde{x}[n] = x[n \% N] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} x[n + pN], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (16)$$

Deoarece  $\text{Supp}(x[n + pN]) \subseteq \overline{-pN, (1-p)N - 1}$ , rezultă că suma infinită de mai sus conține câte un singur termen nenul pentru fiecare valoare a lui  $n$ , deci nu există suprapuneri aditive de valori care să distorsioneze semnalul periodic asociat.

### 3.2 TFD și deplasarea circulară a secvențelor de durată finită

Fie  $x \in \mathcal{S}_{dN}$  arbitrar aleasă. Este evident că o deplasare temporală cu  $m \in \mathbb{Z}$  poziții a acesteia conduce tot la o secvență de durată finită și egală cu  $N$ , numai că suportul nu se mai află inclus în  $\overline{0, N-1}$ . Practic,  $q^{-m}x \in q^{-m}\mathcal{S}_{dN}$ , deci contextul de lucru al lui  $\mathcal{S}_{dN}$  este părăsit. Datorită acestui fapt, această operație prezintă un interes scăzut relativ la proprietățile TFD.

Ținând cont de dualitatea naturală dintre mulțimile  $\mathcal{S}_{dN}$  și  $\mathcal{S}_d^N$ , se poate construi un nou operator de deplasare temporală, adaptat contextului de lucru al secvențelor de durată finită cu suport inclus în  $\overline{0, N-1}$ . Construcția pleacă de la observarea efectului pe o perioadă pe care îl are operatorul  $q^{-m}$  aplicat asupra unei secvențe  $\tilde{x} \in \mathcal{S}_d^N$ . Pentru a focaliza mai bine acest efect, se poate utiliza din nou fereastra de observabilitate  $\mathcal{R}_N$  aplicată lui  $q^{-m}\tilde{x}$ . În final, plecând de la o secvență de durată finită  $x \in \mathcal{S}_{dN}$ , se poate construi mai întâi secvența periodică asociată  $\tilde{x} \in \mathcal{S}_d^N$  și apoi secvența  $\mathcal{R}_N q^{-m}\tilde{x}$ , care face parte tot din  $\mathcal{S}_{dN}$ .

Aceste observații permit formularea următoarei definiții:

#### Definiția 3.1

Se numește **operator de deplasare (temporală) circulară** cu  $m \in \mathbb{Z}$  poziții a unei secvențe de durată finită, următoarea aplicație:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ll} \mathcal{Q}^{-m} : \mathcal{S}_{dN} & \rightarrow \mathcal{S}_{dN} \\ x & \mapsto \mathcal{Q}^{-m}(x) \stackrel{\text{not}}{=} \mathcal{Q}^{-m}x \end{array} \right. \\ \left[ \begin{array}{ll} \mathcal{Q}^{-m}x : \mathbb{Z} & \rightarrow \Gamma \\ n & \mapsto (\mathcal{Q}^{-m}x)[n] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_N[n] x[(n-m) \% N] \end{array} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Așa cum se poate observa cu ușurință, efectul operatorului  $\mathcal{Q}^{-m}$  constă în permutarea circulară a valorilor secvenței inițiale, în interiorul ferestrei de observabilitate, cu  $m \% N$  poziții. Permutarea se efectuează către stînga dacă  $m < 0$  (efect de anticipare) sau către dreapta dacă  $m > 0$  (efect de întârziere), așa cum sugerează și Figura 1. Datorită acestui efect,  $\mathcal{Q}^{-m}$  se va

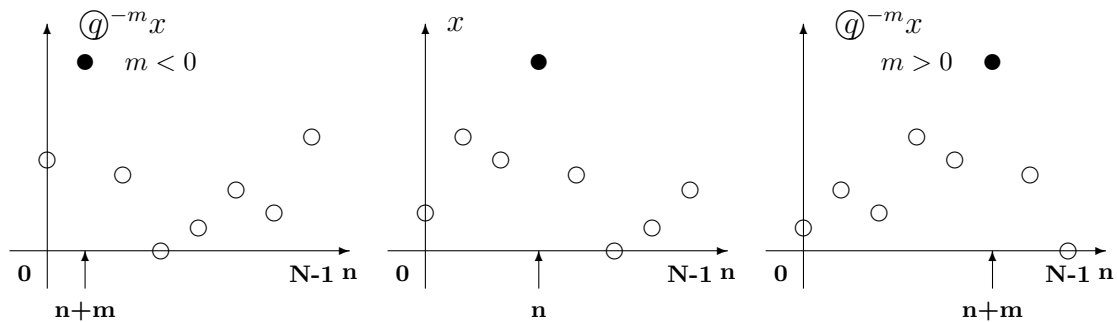


Figura 1: Deplasarea circulară a secvențelor de durată finită.

numi *operator de deplasare circulară cu  $m$  poziții*. El conservă contextul de lucru al spațiului  $\mathcal{S}_{dN}$ , efectul operatorului clasic de deplasare în timp ( $q^{-m}$ ) fiind, astfel, eliminat.

Se observă imediat că, dacă  $x \in \mathcal{S}_{dN}$  și  $\tilde{x} \in \mathcal{S}_d^N$  sînt cele două secvențe duale construite una din alta prin procedeele deja indicate, atunci o deplasare circulară cu  $m$  poziții aplicată asupra lui  $x$  este echivalentă cu o deplasare clasică, tot cu  $m$  poziții, dar aplicată asupra lui  $\tilde{x}$ . Această observație este fundamentală pentru deducerea relației dintre TFD ale secvențelor  $x$  și  $\mathcal{Q}^{-m}x$ . Astfel, datorită proprietăților operatorului SFD, se poate scrie că:

$$SFD(q^{-m}\tilde{x})[k] = w_N^{km} SFD(\tilde{x})[k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

În consecință, rezultă următoarea proprietate a TFD relativ la deplasarea circulară a secvențelor de durată finită:

$$TFD(\mathcal{Q}^{-m}x)[k] = w_N^{km} TFD(x)[k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

Interpretarea geometrică a acestei proprietăți este imediată: deplasînd circular cu  $|m|$  poziții la stînga sau la dreapta o secvență de durată finită, se obține o rotație cu același număr de "poziții", dar în sens contrar a valorilor TFD; unghiul de rotație cu "o poziție" depinde de fiecare dată de indexul valorii curente a TFD.

O relație similară se poate obține dacă se ține cont de dualitatea timp-frecvență și de simetria operatorilor TFD și ITFD:

$$TFD(\{w_N^{mn}x[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}) \equiv \mathcal{Q}^{+m}TFD(x). \quad (19)$$

### 3.3 Proprietăți de simetrie

Spre deosebire de cazul TCFD, proprietățile de simetrie ale TFD nu mai pot fi prezentate cu ajutorul componentelor "conjugată simetric" și "anticonjugată simetric", dintr-un motiv foarte simplu: durata acestor componente este  $(2N - 1)$ , dacă secvența originală are durata  $N$ . Deci, apare (din nou) inconvenientul părăsirii cadrului de lucru al spațiului  $\mathcal{S}_{dN}$ .

Pentru a ocoli acest inconvenient, se poate apela din nou la dualitatea existentă între spațiile  $\mathcal{S}_{dN}$  și  $\mathcal{S}_d^N$ . Se constată ușor că dacă  $\tilde{x} \in \mathcal{S}_d^N$ , atunci componentele  $\tilde{x}_e$  și  $\tilde{x}_o$  fac parte tot din  $\mathcal{S}_d^N$  (adică au aceeași perioadă). Aceasta sugerează definirea următoarelor componente ale unei secvențe de durată finită  $x \in \mathcal{S}_{dN}$ :

- **simetric periodică (pară periodică – în cazul real):**  $x_{ep} \stackrel{def}{=} \mathcal{R}_N \tilde{x}_e$ ;
- **antisimetric periodică (impară periodică – în cazul real):**  $x_{op} \stackrel{def}{=} \mathcal{R}_N \tilde{x}_o$ .

(În aceste definiții, ca de obicei,  $\tilde{x}[n] = x[n \% N]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .) Așa cum se observă cu ușurință, cele două componente sînt de durată finită și egală cu  $N$ , atributul "periodică" asociat fiecăreia dintre ele referindu-se la modul de definire și nu la o eventuală periodicitate. Datorită faptului că în inelul claselor de resturi modulo  $N$ , notat cu  $\mathbb{Z}_N$ , are loc relația:

$$(-n) \% N = [N - (n \% N)] \% N, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

rezultă că:

$$(-n) \% N = N - n \% N, \quad \forall n \in \overline{0, N-1},$$

deci definițiile de mai sus se pot detalia după cum urmează:

$$\begin{cases} x_{ep}[n] \stackrel{def}{=} \mathcal{R}_N[n] \frac{x[n \% N] + \overline{x[N - n \% N]}}{2} \\ x_{op}[n] \stackrel{def}{=} \mathcal{R}_N[n] \frac{x[n \% N] - \overline{x[N - n \% N]}}{2} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(În aceste relații, s-a utilizat convenția:  $x[0] = x[N]$ , care provine din egalitatea:  $\tilde{x}[0] = \tilde{x}[N]$ ).

Astfel, noile componente sînt diferite de  $x_e$ , respectiv  $x_o$ , așa cum au fost ele definite în [8]. De altfel, se constată că între noile componente și cele clasice există următoarele corelații:

$$\begin{cases} x_{ep}[n] &= \mathcal{R}_N[n] (x_e[n] + x_e[n - N]) = \mathcal{R}_N[n] \frac{x[n] + \overline{x[-n]} + x[n - N] + \overline{x[N - n]}}{2} \\ x_{op}[n] &= \mathcal{R}_N[n] (x_o[n] + x_o[n - N]) = \mathcal{R}_N[n] \frac{x[n] - \overline{x[-n]} + x[n - N] - \overline{x[N - n]}}{2} \end{cases}$$

(unde  $n \in \mathbb{Z}$ ). Aceste relații sînt asemănătoare unor formule de aliere în domeniul timpului. Ele conduc la următoarea descompunere naturală a lui  $x$ :

$$x \equiv x_{ep} + x_{op} \equiv x_e + x_o .$$

În ceea ce privește simetria în oglindă a semnalelor din  $\mathcal{S}_{dN}$ , este vizibil că nici aici definiția clasică nu poate fi utilizată, deoarece:

$$Supp(x_s) \subseteq \overline{1 - N, 0} .$$

Cu toate acestea, configurația suportului lui  $x_s$  sugerează o redefinire a simetrice în oglindă după cum urmează:

$$x_{sp}[n] \stackrel{def}{=} \mathcal{R}_N[n] x[N - 1 - n \% N] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Noua definiție construiește simetrizata în oglindă relativ la verticala care trece pe la mijlocul intervalului  $[0, N - 1]$  (care conține suportul lui  $x$ ).

Toate redefinirile operate anterior evită utilizarea eșantioanelor necunoscute (din afara intervalului  $[0, N - 1]$ ) și caută să rearanjeze valorile cunoscute în interiorul ferestrei de observabilitate. Acestea sînt valabile și pentru imaginea prin TFD a unei secvențe de durată finită.

Cu noile notații, operatorul TFD verifică proprietățile de simetrie din Tabelul 2 (unde, ca de obicei,  $X \stackrel{not}{=} TFD(x)$ ).

Tabelul 2: *Sumarul proprietăților de simetrie ale TFD.*

| Semnal     | $\overline{x[n]}$                                  | $x_{sp}[n]$                                              | $x_R[n]$    | $x_I[n]$       | $x_{ep}[n]$ | $x_{op}[n]$ |
|------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-------------|----------------|-------------|-------------|
| <b>TFD</b> | $\overline{X[(N - k \% N) \% N]} \mathcal{R}_N[k]$ | $\overline{w_N^k} X[(N - k \% N) \% N] \mathcal{R}_N[k]$ | $X_{ep}[k]$ | $-j X_{op}[k]$ | $X_R[k]$    | $j X_I[k]$  |

### 3.4 Proprietăți de convoluție circulară

Soluționarea pe cale clasică a problemei convoluției nu mai este împiedicată de natura semnalelor din  $\mathcal{S}_{dN}$ , care, datorită duratei finite sînt cu atît mai mult stabile. Cu toate acestea, dacă  $x, y \in \mathcal{S}_{dN}$ , atunci  $x \star y \in \mathcal{S}_{d(2N-1)}$ , deci din nou cadrul de lucru este părăsit. Acest dezavantaj poate fi evitat dacă se definește o nouă operație de convoluție, adaptată semnalelor din spațiul  $\mathcal{S}_{dN}$ .

Definiția noii operații de convoluție, notată cu " $\star_N$ ", pleacă de la următoarea restricție naturală:

$$TFD \left( x \star_N y \right) \equiv TFD(x) \cdot TFD(y) , \quad \forall x, y \in \mathcal{S}_{dN} . \quad (20)$$

Această relație constituie practic o soluție dată problemei convoluției, cu condiția ca secvența  $z \stackrel{not}{=} x \star_N y$  să fie tot de durată finită egală cu  $N$ .

Fie  $x, y \in \mathcal{S}_{dN}$  și  $z$  ca mai sus. Atunci acestor semnale discrete de durată finită li se pot asocia semnalele  $N$ -periodice  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  și  $\tilde{z}$ . Folosind operația de convoluție periodică dintre semnalele  $\tilde{x}$  și  $\tilde{y}$ , se poate construi semnalul  $\tilde{z}$ :

$$\tilde{z}[n] \stackrel{def}{=} (\tilde{x} \star \tilde{y})[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] \tilde{y}[n-m], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Revenind în spațiul  $\mathcal{S}_{dN}$ , se constată că:

$$z[n] = \left( \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] \tilde{y}[n-m] \right) \mathcal{R}_N[n] = \left( \sum_{m=0}^{N-1} x[m \% N] y[(n-m) \% N] \right) \mathcal{R}_N[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Această relație este diferită de cea oferită de definiția produsului clasic de convoluție. Dacă s-ar fi apelat la acel tip de convoluție, operația generică ar fi fost înmulțirea lui  $x$  cu o versiune simetrizată în oglindă și deplasată liniar în timp a lui  $y$ . În cazul de față, însă, se observă că am putea imagina fiecare dintre cele două semnale așezat pe câte o circumferință cu  $N$  noduri, ca în Figura 2. Fiecare valoare de semnal ocupă un singur nod. Cele două cercuri au razele

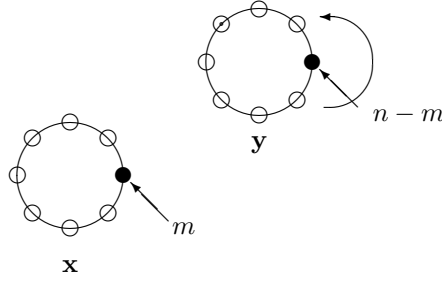


Figura 2: Convoluția circulară a secvențelor de durată finită.

egale și pot fi amplasate în două plane paralele din spațiu, astfel că ele generează un cilindru. Rotind cele două cercuri relativ unul față de celălalt și efectuând suma produselor perechilor de valori aflate pe aceeași generatoare a cilindrului, se obține valoarea într-un anumit punct a lui  $z$ . Evident, dintre aceste valori, se rețin numai cele care nu se repetă, deci este suficient să se efectueze o rotație completă a unui cerc față de celălalt pentru a-l determina complet pe  $z$ .

Imaginea intuitivă anterioară permite definirea noii operații de convoluție după cum urmează:

### Definiția 3.2

Se numește **convoluție circulară** a două secvențe de durată finită  $x, y \in \mathcal{S}_{dN}$ , operația definită astfel:

$$\left( x \underset{N}{\star} y \right)[n] \stackrel{def}{=} \left( \sum_{m=0}^{N-1} x[m \% N] y[(n-m) \% N] \right) \mathcal{R}_N[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (21)$$

Convoluția circulară este o operație asociativă și comutativă, iar indicele " $N$ " asociat semnului " $\star$ " indică dimensiunea suportului secvențelor aflate în convoluție. Cu această precizare

sînt evitate erorile de calcul. Să presupunem că  $M > N$ . Atunci deși  $\mathcal{S}_{dN} \subset \mathcal{S}_{dM}$ , totuși:

$$x \underset{N}{\star} y \neq x \underset{M}{\star} y.$$

Cu toate acestea, vom vedea în secțiunea următoare că dacă numărul  $M$  este ales corespunzător, atunci operația de convoluție circulară  $\underset{M}{\star}$  aplicată secvențelor de durată finită egală cu  $N$

poate conduce la același rezultat ca și convoluția liniară (clasică).

## Notă

- În general, dacă  $M$  și  $N$  sînt două numere naturale nenule diferite, iar  $x \in \mathcal{S}_{dM}$ ,  $y \in \mathcal{S}_{dN}$ , atunci se poate evalua produsul de convoluție circulară al celor două secvențe discrete, considerînd că ambele aparțin spațiului  $\mathcal{S}_{dK}$ , unde  $K \stackrel{def}{=} \max\{M, N\}$ .

Noua operație astfel definită conduce la următoarele soluții ale problemei convoluției:

### Teorema 3.1 (Teorema (directă) de convoluție)

Pentru orice semnale discrete de durată finită  $x, y \in \mathcal{S}_{dN}$ , are loc identitatea:

$$TFD \left( x \underset{N}{\star} y \right) \equiv TFD(x) \cdot TFD(y) .$$

### Teorema 3.2 (Teorema inversă de convoluție)

Pentru orice semnale discrete de durată finită  $x, y \in \mathcal{S}_{dN}$ , are loc identitatea:

$$TFD(x \cdot y) \equiv \frac{1}{N} TFD(x) \underset{N}{\star} TFD(y) .$$

## 3.5 Proprietăți de convoluție liniară

Cu toate că redefinirea operației de convoluție pentru secvențele de durată finită a condus la evitarea părăsirii contextului de lucru al spațiului  $\mathcal{S}_{dN}$ , renunțarea la aspectul ei liniar atrage după sine o diminuare a utilității practice a noului concept. Funcționarea SLID este caracterizată de operația clasică de convoluție chiar și în cazul în care semnalele implicate au durate finite. De aceea, este necesară evidențierea unei corelații dintre cele două tipuri de convoluție, dacă acest lucru este posibil. Așa cum se va putea constata în continuare, convoluția circulară constituie un bun instrument de calcul pentru cea clasică.

În majoritatea aplicațiilor, se preferă utilizarea TFD datorită algoritmilor eficienți de calcul ai acestora (cu ajutorul cărora efortul de calcul este redus în contextul spațiului  $\mathcal{S}_{dN}$  la  $N \log_2 N$  operații). Operația de convoluție clasică poate fi implementată, la rîndul ei, utilizînd un astfel de algoritm, datorită unei proprietăți remarcabile, pe care o vom ilustra în această secțiune. Este vorba despre posibilitatea evaluării produsului de convoluție clasică utilizînd Teorema directă de convoluție circulară.

Fie  $x, y \in \mathcal{S}_{dN}$  două secvențe discrete de durată finită arbitrar alese. Datorită faptului că  $\mathcal{S}_{dN} \subset l^1(\mathbb{Z})$ , operația de convoluție clasică dintre aceste semnale este bine definită. Mai mult, între TCFD și TFD calculate pentru oricare dintre cele două semnale, să zicem  $x$ , există o relație naturală, care arată că TFD este o versiune eșantionată (în frecvență) a TCFD:

$$TFD(x)[k] = TCFD(x) \left( w_N^{-k} \right) , \quad \forall k \in \mathbb{Z} . \quad (22)$$

Plecînd de la aceste semnale, se poate evalua următoarea secvență discretă:

$$z[n] \stackrel{def}{=} (x \star y)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[n-m] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Se observă imediat că  $z \in \mathcal{S}_{d(2N-1)}$ , adică  $Supp(z) \subseteq \overline{0, 2N-2}$ .

Tot aceste două semnale pot genera și o secvență discretă de convoluție circulară:

$$z_N[n] \stackrel{def}{=} \left( x \underset{N}{\star} y \right) [n] = \mathcal{R}_N[n] \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[(n-m)\%N] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Deoarece:

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[(n-m)\%N] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m\%N] y[(n-m)\%N] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m] \tilde{y}[n-m] = \tilde{z}[n] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} ,$$

se poate utiliza formula de aliere (16) (consecință a Propoziției 3.1), pentru a scrie că:

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[(n-m)\%N] = \tilde{z}[n] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} z[n + pN], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Acest rezultat conduce la următoarea egalitate:

$$z_N[n] = \mathcal{R}_N[n] \sum_{p \in \mathbb{Z}} z[n + pN], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ea nu este decît o nouă formulă de aliere, care arată cum se poate obține rezultatul unei convoluții circulare folosind convoluția liniară clasică:

$$\left( x \underset{N}{\star} y \right) [n] = \mathcal{R}_N[n] \sum_{p \in \mathbb{Z}} (x \star y)[n + pN], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (23)$$

Reciproc, pentru a obține pe  $z$  din  $z_N$ , este suficient ca în suma de aliere de mai sus să nu poată fi puse în evidență suprapuneri ale suporturilor termenilor ei. Acest obiectiv poate fi atins dacă se consideră de la început că  $x$  și  $y$  sînt deopotrivă și elemente ale spațiului  $\mathcal{S}_{d(2N-1)}$ . În acest caz,  $z_N$  este înlocuit de  $z_{2N-1}$ , care se calculează astfel (ținînd cont de relația (23) de mai sus și de faptul că  $z \in \mathcal{S}_{d(2N-1)}$ ):

$$z_{2N-1}[n] \stackrel{def}{=} \left( x \underset{2N-1}{\star} y \right) [n] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} z[n + (2N-1)p] = z[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

În consecință, rezultatul convoluției liniare poate fi determinat cu ajutorul convoluției circulare, cu condiția ca suporturile secvențelor aflate în convoluție liniară să fie lărgite la suportul secvenței rezultate:

$$x \star y \equiv x \underset{2N-1}{\star} y. \quad (24)$$

Extinderea contextului de lucru la spațiul  $\mathcal{S}_{d(2N-1)}$  atrage după sine atît completarea cu zerouri a secvențelor  $x$  și  $y$  (pînă la eșantionul de ordin  $(2N-2)$  inclusiv), cît și schimbarea formulei de definiție a TFD. Setul de pulsații  $\mathcal{O}_N \stackrel{def}{=} \{\omega_n^N\}_{n=0, N-1}$  este înlocuit cu un altul, mai bogat, care realizează o partajare mai fină a cercului unitar; este vorba de pulsațiile corespunzătoare rădăcinilor de ordin  $(2N-1)$  ale unității:  $\mathcal{O}_{2N-1} \stackrel{def}{=} \{\omega_n^{2N-1}\}_{n=0, 2N-2}$ . Datorită acestui fapt, este natural să renotăm operatorii TFD și ITFD prin etichete adecvate care să indice și dimensiunea setului de pulsații cu care se operează. Astfel,  $\text{TFD}_N$  și  $\text{ITFD}_N$  vor indica faptul că setul de pulsații de eșantionare utilizat este  $\mathcal{O}_N$ .

Relația (24) de mai sus permite exprimarea operației de convoluție liniară cu ajutorul unei formule în care apar numai operatorii TFD și ITFD, fără a mai face referire la convoluția circulară, grație Teoremei 20 (de convoluție circulară):

$$x \star y \equiv \text{ITFD}_{2N-1} [\text{TFD}_{2N-1}(x) \cdot \text{TFD}_{2N-1}(y)], \quad \forall x, y \in \mathcal{S}_{dN}. \quad (25)$$

Practic, zerourile de completare a secvențelor aflate în convoluție liniară transformă convoluția circulară în una liniară.

În general, secvențele aflate în convoluție, deși de durată finită, pot avea suporturi de dimensiuni diferite. Dacă  $x \in \mathcal{S}_{dN}$  și  $y \in \mathcal{S}_{dM}$ , cu  $N \neq M$ , atunci  $x \star y \in \mathcal{S}_{d(N+M-1)}$ . Pentru a putea utiliza formula (25), este necesar ca ambele secvențe să fie completate cu zerouri pînă la eșantionul de ordin  $(N+M-2)$  inclusiv, astfel că:

$$x \star y \equiv \text{ITFD}_{M+N-1} [\text{TFD}_{M+N-1}(x) \cdot \text{TFD}_{M+N-1}(y)], \quad \forall x \in \mathcal{S}_{dN}, y \in \mathcal{S}_{dM}. \quad (26)$$

Noua identitate constituie o primă generalizare a rezultatului anterior, cadrul secvențelor de durată finită fiind conservat.

O altă generalizare a identității (25) se poate obține dacă luăm în considerare convoluția liniară dintre o secvență stabilă de durată infinită și una de durată finită. Asemenea operații se întâlnesc în practică atunci când se determină ieșirea unui SLID de tip FIR stimulat la intrare cu o secvență stabilă și cauzală, de durată infinită. Vom analiza acest caz în cele ce urmează.

Fie  $x \in l^1(\mathbb{Z})$  aleasă astfel încît  $\text{Supp}(x) = \mathbb{N}$  (stabilă, cauzală și de durată infinită). Să considerăm că  $x$  stimulează intrarea unui SLID de tip FIR avînd secvența pondere  $h \in \mathcal{S}_{dN}$ . Atunci există două metode eficiente de a evalua ieșirea  $y$ : metoda adunării suprapunerilor și metoda salvării suprapunerilor. Ambele metode se bazează pe relația (25).

### A. Metoda adunării suprapunerilor

Secvența de intrare poate fi segmentată în următorul mod:

$$\begin{cases} x_{Mk}[n] \stackrel{\text{def}}{=} x[n] \mathcal{R}_M[n - kM], & \forall n \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}, \\ x \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}} x_{Mk}, \end{cases}$$

unde numărul natural  $M$  este ales arbitrar, iar suma infinită are cel mult un termen nenul pentru fiecare moment în care este evaluată. Se constată că fiecare componentă  $x_{Mk}$  aparține cîte unui spațiu de semnale de durată finită și anume  $q^{-Mk} \mathcal{S}_{dM}$ . Aceste spații sînt disjuncte deoarece suporturile oricărei perechi de semnale din spații diferite (chiar "adiacente") sînt disjuncte.

În aceste condiții, ieșirea  $y$  se poate evalua astfel:

$$\begin{aligned} y[n] &\stackrel{\text{def}}{=} (x \star h)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m] x[n - m] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m] \sum_{k \in \mathbb{N}} x_{Mk}[n - m] = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} h[m] \sum_{k \in \mathbb{N}} x[n - m] \mathcal{R}_M[n - m - kM] = \sum_{k \in \mathbb{N}} (h \star x_{Mk})[n], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pentru fiecare  $n, m$  fixați, suma infinită de mai sus se reduce la un singur termen nenul, cel pentru care  $kM \leq (n - m) \leq (k + 1)M - 1$ , adică  $n - (k + 1)M + 1 \leq m \leq n - kM$ . Cum  $m \in \overline{0, N - 1}$ , este obligatoriu ca  $n - kM \geq 0$  sau  $n - (k + 1)M + 1 \leq N - 1$ . În consecință,  $k$  variază într-o gamă finită de valori, pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  fixat (deoarece  $m$  variază în gama  $\overline{0, N - 1}$ ):

$$k_n \stackrel{\text{def}}{=} \max \left\{ 0, \left\lfloor \frac{n - N + 2}{M} \right\rfloor - 1 \right\} \leq k \leq K_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\lfloor \frac{n}{M} \right\rfloor.$$

Aceste inegalități impun ca  $M$  să fie ales astfel încît  $(N + M) \geq 2$ .

Ieșirea sistemului se exprimă atunci ca o sumă finită de produse liniare de convoluție între secvențe de durată finită:

$$y[n] = \sum_{k=k_n}^{K_n} (h \star x_{Mk})[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Deoarece dimensiunea suportului lui  $h$  este  $N$ , iar a suportului lui  $x_{Mk}$  este  $M$ , rezultă că fiecare convoluție liniară din suma de mai sus se poate evalua folosind operația de convoluție circulară în contextul spațiilor  $\{q^{-kM} \mathcal{S}_{d(N+M-1)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Spre deosebire de cazul semnalelor  $x_{Mk}$ , semnalele  $(h \star x_{Mk})$  au suporturi care se suprapun. Astfel, dacă fixăm

$k \in \overline{k_n, K_n - 1}$ , atunci:

$$\begin{aligned} & \text{Supp}(h \star x_{Mk}) \cap \text{Supp}(h \star x_{M(k+1)}) \subseteq \\ & \subseteq \overline{kM, N + (k+1)M - 1} \cap \overline{(k+1)M, N + (k+2)M - 1} = \\ & = \overline{(k+1)M, N + (k+1)M - 1} . \end{aligned}$$

Această proprietate conduce la concluzia că la evaluarea valorii ieşirii la un anumit moment dat participă aditiv cel puţin două sume de convoluţie circulară cu valori din zona de suprapunere a suporturilor. Datorită acestui fapt, această metodă de calcul a ieşirii se numeşte *prin adunarea suprapunerilor*.

## B. Metoda salvării suprapunerilor

În acest caz, semnalul de intrare este segmentat după cum urmează:

$$\begin{cases} x_{Mk}[n] \stackrel{\text{def}}{=} x[n + k(M - N + 1)] \mathcal{R}_M[n] , & \forall n \in \mathbb{Z} , \forall k \in \mathbb{N} , \\ x[n] = x_{Mk_n}[n - k_n(M - N + 1)] , & \forall n \in \mathbb{Z} , \end{cases}$$

unde numărul  $M$  este ales în așa fel încît  $M \geq N - 1 \geq 1$ , iar  $k_n \in \mathbb{N}$  este cel mai mic număr care satisface inegalitatea:

$$0 \leq n - k_n(M - N + 1) \leq M - 1 \iff \frac{n - M + 1}{M - N + 1} \leq k_n \leq \frac{n}{M - N + 1}$$

Aceasta provine din restricţia naturală ca suportul componentei  $x_{Mk_n}$  să fie inclus în  $\overline{0, M - 1}$  (datorită definiţiei). Ea precizează, practic, valorile şirului  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$k_n = \left\lceil \frac{n - M + 1}{M - N + 1} \right\rceil , \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Se observă că, de această dată, componentele intrării fac parte toate din spaţiul  $\mathcal{S}_{dM}$ . În plus, pentru fiecare  $k \in \mathbb{N}$  fixat, ultimele  $N - 1$  valori ale secvenţei  $x_k$  sînt identice cu primele  $N - 1$  valori ale lui  $x_{k+1}$ :

$$x_k[n] = x_{k+1}[n] , \quad \forall n \in \overline{(k+1)(M - N) + k, (k+1)(M - N) + k + N - 2} .$$

Această suprapunere de segmente (care nu figura în cadrul metodei anterioare) permite evaluarea secvenţei de ieşire utilizînd numai o parte din convoluţia circulară a acestor componente cu secvenţa pondere  $h$  (cu excepţia primei convoluţii, care trebuie evaluată integral). Astfel, dacă se notează prin:

$$y_k \stackrel{\text{def}}{=} h \underset{N+M-1}{\star} x_k , \quad \forall k \in \mathbb{N} ,$$

atunci nu mai este necesar să se evalueze valorile

$$\{y_k[0], \dots, y_k[N - 2]\}_{k \in \mathbb{N}^*}$$

pentru a indica o anumită valoare a ieşirii. Valorile care trebuie luate în calcul sînt următoarele:

$$\{y_k[N - 1], \dots, y_k[M + N - 1]\}_{k \in \mathbb{N}^*} .$$

Fiecare convoluţie circulară va contribui la determinarea ieşirii cu numai  $(M + 1)$  valori din totalul de  $(M + N - 1)$ , fapt care constituie o îmbunătăţire faţă de cazul precedent.

Se constată practică că fiecare valoare a ieşirii este dată de următoarea relaţie:

$$\begin{aligned} y[n] &= (x \star h)[n] = \\ &= y_0[n] + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} y_k[n - k(M + N - 1)] \mathcal{R}_{M+1}[n - kM - (k + 1)(N + 1)] . \end{aligned}$$

Astfel, cele  $(N - 1)$  valori ale lui  $y_k$  ce nu mai trebuie evaluate sînt înlocuite de ultimele  $(N - 1)$  valori ale lui  $y_{k-1}$  ce au fost deja calculate. Această *salvare* a celor  $(N - 1)$  valori anterioare justifică numele metodei.

### 3.6 Reconstituirea Transformatei $\mathcal{Z}$ din valori pe cercul unitar

Reprezentarea imaginii prin TFD a unei secvenţe de durată finită este doar un caz particular de reprezentare a unui semnal discret prin intermediul Transformatei  $\mathcal{Z}$ . Particularizarea constă în faptul că valorile TFD coincid cu valorile Transformatei  $\mathcal{Z}$  calculate în punctele de pe cercul unitar indicate de rădăcinile de un anumit ordin ale unităţii. Ținînd cont de legătura de dualitate care există între TFD şi SFD, aceeaşi proprietate o are şi imaginea prin SFD a unei secvenţe periodice.

Proprietatea anterioară sugerează căutarea unei soluţii la problema reconstruirii Transformatei  $\mathcal{Z}$  dintr-un număr finit de valori ale sale (luate, de exemplu, pe cercul unitar). Aceasta este o problemă de interpolare a Transformării  $\mathcal{Z}$ , folosind eşantioane ale sale calculate cu ajutorul TFD. Soluţia acestei probleme se bazează pe Propoziţia 3.1 demonstrată în prima secţiune a acestui capitol. Ea demonstrează că valorile TFD sînt suficiente pentru a realiza o caracterizare destul de completă a semnalelor de durată finită, fără a apela la Transformarea  $\mathcal{Z}$ . Totodată, formula de interpolare sugerează şi posibilitatea de a utiliza un algoritm de tip FFT în evaluarea valorilor Transformatei  $\mathcal{Z}$ .

Să considerăm că  $x \in \mathcal{S}_{dN}$ , deci  $\mathcal{A}(x) = \mathcal{C}^*$ . Potrivit Propoziţiei 3.1, secvenţa periodică asociată,  $\tilde{x} \in \mathcal{S}_d^N$ , verifică următoarea formulă de aliere:

$$\tilde{x}[n] = x[n \% N] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} x[n + pN] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Fie  $\mathcal{W}_N \stackrel{\text{def}}{=} \{w_N^{-n}\}_{n=0, N-1}$  mulţimea rădăcinilor de ordin  $N$  ale unităţii (situate pe cercul unitar,  $\partial\mathcal{U}$ ).

#### Propoziţia 3.2

*Transformata  $\mathcal{Z}$  a secvenţei  $x$  poate fi reconstruită pe  $\mathcal{C}^* \setminus \mathcal{W}_N$  utilizînd numai valorile TFD ale acesteia.*

*Demonstraţie* \_\_\_\_\_ ↓

Plecînd de la observaţiile cu care am deschis această secţiune, valoarea Transformatei  $\mathcal{Z}$  a lui  $x$  se poate evalua în orice punct  $z \in \mathcal{C}^* \setminus \mathcal{W}_N$  după cum urmează:

$$\mathcal{Z}(x)(z) \stackrel{\text{not}}{=} X(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] z^{-n} .$$

Pentru a explicita valoarea curentă a secvenţei periodice  $\tilde{x}$ , se poate utiliza operatorul ISFD (definiţia (3) din capitolul precedent):

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[k] w_N^{-nk} z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \sum_{n=0}^{N-1} (w_N^{-k} z^{-1})^n .$$

Suma interioară poate fi evaluată direct deoarece nu depinde de secvenţa iniţială, astfel că:

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \frac{1 - w_N^{-kN} z^{-N}}{1 - w_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{X}[k]}{1 - w_N^{-k} z^{-1}} .$$

Aceste calcule au condus la următoarea formulă de reconstrucție a Transformatei  $\mathcal{Z}$  din eşantioanele sale calculate în cele  $N$  noduri de pe cercul unitar (numite uneori *eşantioane în frecvență*):

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(x)(z) &= \frac{z^N - 1}{Nz^N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{Z}(x)(w_N^{-k}) \frac{z}{z - w_N^{-k}}, \quad \forall z \in \mathcal{D}^* \setminus \mathcal{W}_N . \\ \mathcal{Z}(x)(z) &= \frac{z^N - 1}{Nz^N} \sum_{k=0}^{N-1} TFD(x)[k] \frac{z}{z - w_N^{-k}}, \quad \forall z \in \mathcal{D}^* \setminus \mathcal{W}_N .\end{aligned}\quad (27)$$

□ \_\_\_\_\_ (Propoziția 3.2)↑

Relația (27) care demonstrează rezultatul anterior este, de fapt, o formulă de interpolare a Transformatei  $\mathcal{Z}$  și valabilitatea ei este restrînsă la clasa semnalelor de durată finită, care constituie, totuși, cea mai utilizată clasă în practică. Ea sugerează, în plus, că răspunsul în frecvență al unei secvențe de durată finită determină comportarea Transformatei  $\mathcal{Z}$  asociate pe întreaga zonă de convergență, exceptînd, eventual frontierele acesteia.

Importanța formulei de interpolare (27) este, însă, mult mai mare, deoarece ea conduce la exprimarea TCFD folosind numai valori ale TFD:

$$\begin{aligned}X(e^{j\omega}) &= \mathcal{Z}(x)(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{j\omega N} - 1}{N e^{j\omega N}} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{X}[k] \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - e^{\frac{2k\pi}{N}j}} = \\ &= e^{-\frac{N-1}{2}\omega} \sin\left(\frac{N}{2}\omega\right) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{X}[k] \frac{e^{\frac{k(N-1)\pi}{N}j}}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k}{N}\pi\right)} \\ &\stackrel{not}{=} \sum_{k=0}^{N-1} TFD(x)[k] \phi_k(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .\end{aligned}$$

În ultima sumă, am pus în evidență atît valorile TFD cît și un *nucleu de interpolare*, care are următoarea formă:

$$\phi_k(\omega) \stackrel{def}{=} \frac{e^{-j(N-1)\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k}{N}\pi\right)} \sin N\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k}{N}\pi\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k}{N}\pi\right)}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \forall k \in \overline{0, N-1} .$$

Se observă imediat că:

$$\phi_k(w_N^{-m}) = \delta_0[k - m], \quad \forall k, m \in \overline{0, N-1},$$

ceea ce demonstrează că noua formulă de interpolare obținută este ”exactă”, în sensul că TFD și TCFD coincid în nodurile  $\mathcal{W}_N$ , deci că TFD constituie o versiune eşantionată a TCFD. Aceasta este o proprietate extrem de importantă pentru practică, ea oferind garanția conservării informației în frecvență transportate de un semnal discret de durată finită, prin eşantionarea TCFD după ”regula TFD”. Astfel, operatorul discret TFD poate înlocui operatorul TCFD în aplicații, fără a afecta valorile lui în nodurile de eşantionare. Cîştigul acestei proprietăți se traduce prin trecerea de la o variație continuă a pulsației normalizate la o variație discretă, pe o mulțime finită de valori.

## 4 Principiul fundamental al algoritmilor de tip FFT

Transformarea Fourier Discretă joacă un rol important în analiza, proiectarea și implementarea algoritmilor caracterizînd funcționarea sistemelor discrete. De aceea, efortul cercetărilor legate de această transformată a fost continuat în direcția găsirii unor modalități eficiente de calcul. Începînd cu acest capitol, vom prezenta rezultatele acestor cercetări.

Reamintim că, dacă  $x \in \mathcal{S}_{dN}$ , atunci expresiile TFD directe și inverse sînt următoarele (în interiorul suporturilor lor):

$$\left[ \begin{array}{l} TFD(x)[k] \stackrel{not}{=} X[k] \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{nk} \quad , \quad \forall k \in \overline{0, N-1} ; \\ ITFD(x)[n] = x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] w_N^{-kn} \quad , \quad \forall n \in \overline{0, N-1} . \end{array} \right. \quad (28)$$

Aceste relații relevă faptul că odată imaginată o modalitate de calcul pentru TFD, ea va putea fi utilizată și în calculul lui ITFD. Mai precis, dacă această modalitate de calcul a operatorului TFD este notată cu  $\mathcal{A}(x)$ , atunci operatorul ITFD se poate evalua cu ajutorul lui  $\frac{1}{N} \overline{\mathcal{A}(\overline{X})}$ .

Dacă luăm în considerare definiția TFD din (28) pentru a produce un program de calcul direct, atunci este necesar să ținem cont că  $X[k] \in \mathcal{C}$ , deci că:

$$\begin{aligned} X[k] = & \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \operatorname{Re}(x[n]) \operatorname{Re}(w_N^{kn}) - \operatorname{Im}(x[n]) \operatorname{Im}(w_N^{kn}) \right] + \\ & + j \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \operatorname{Re}(x[n]) \operatorname{Im}(w_N^{kn}) + \operatorname{Im}(x[n]) \operatorname{Re}(w_N^{kn}) \right] , \quad \forall k \in \overline{0, N-1} . \end{aligned} \quad (29)$$

Această relație arată că, în cazul calculului direct, pentru fiecare moment  $k \in \overline{0, N-1}$ , trebuie efectuate  $4N$  înmulțiri și  $(4N - 2)$  adunări între numere reale.

### Notă

- Numărul de operații implicat de o anumită formulă matematică este întotdeauna evaluat în mod aproximativ, de regulă acoperitor. De exemplu, înmulțirea unui număr cu  $w_N^0 = 1$  sau cu  $\pm j$  nu ar mai trebui luată în considerare. Cu toate acestea, uneori, pentru a scoate mai bine în evidență dependența numărului de operații de numărul  $N$ , chiar și aceste înmulțiri vor fi luate în considerare.

Deoarece  $X$  este asimilat cu un vector de  $N$  elemente, un calcul direct și complet al valorilor TFD ar necesita  $4N^2$  înmulțiri și  $N(4N - 2)$  adunări reale. În plus, aceste calcule necesită și o anumită memorie de stocare atît pentru secvența de date  $x$ , cît și pentru valorile rădăcinilor de ordin 1 ale unității.

Este bine cunoscut faptul că, în practică, evaluarea complexității de calcul a unui algoritm revine la estimarea a două elemente: capacitatea de memorie necesară și timpul de accesare a datelor și de calcul.

Dacă astăzi capacitatea memoriei ocupate nu mai constituie o problemă esențială, totuși timpul de stocare și accesare a datelor depinde esențial de cantitatea și de modul lor de organizare. Cu toate acestea, în cazul algoritmilor numerici, acest timp este de cele mai multe ori neglijabil în raport cu timpul de calcul. De aceea, începînd cu acest capitol, vom ilustra numai modul de evaluare a timpului de calcul. În general, mărimea acestui timp este proporțională cu numărul de operații aritmetice, care constituie și o măsură a complexității lor. Este general acceptat principiul potrivit căruia pentru evaluarea acestui timp, este suficient să se precizeze numărul total de operații, notat în cazul de mai sus prin  $\mathcal{O}[N]$ . Convenim să mai notăm numărul de înmulțiri cu  $\mathcal{O}_\bullet[N]$  și numărul de adunări cu  $\mathcal{O}_+[N]$ . Deși timpul necesar efectuării unei adunări este sensibil mai mic decît cel necesar pentru efectuarea unei înmulțiri, preferăm să îl luăm în considerare pentru a oferi o limită superioară a timpului total de calcul.

În cazul formulei (29), am arătat că:

$$\mathcal{O}[N] = \mathcal{O}_\bullet[N] + \mathcal{O}_+[N] \stackrel{not}{=} \left[ 4N^2 \right]_\bullet + [2N(2N - 1)]_+ . \quad (30)$$

Pentru valori mari ale numărului  $N$ , timpul de calcul fiind proporțional cu  $N^2$ , algoritmul care implementează direct formula (29) este lent. De aceea, este necesară concepția unor

proceduri de calcul mai eficiente, care să conducă la scăderea numărului total de operații, mai ales a numărului de înmulțiri. O astfel de procedură trebuie să exploateze următoarele două proprietăți ale coeficienților  $w_N^{nk}$ :

$$\bullet \text{Simetrie : } w_N^{k(N-n)} = w_N^{-nk} \quad ; \quad \bullet \text{Periodicitate : } w_N^{k(N+n)} = w_N^{(k+N)n} = w_N^{nk} . \quad (31)$$

Prima proprietate exprimă simetria funcțiilor sinus și cosinus înglobate în notația  $w_N^{nk}$ . Astfel, dacă în formula (29) termenii sînt grupați ca mai jos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(x[n]) \beta(w_N^{nk}) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} [\alpha(x[n]) \beta(w_N^{nk}) + \alpha(x[N-n]) \beta(w_N^{k(N-n)})] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} [\alpha(x[n]) + \alpha(x[N-n])] \beta(w_N^{nk}) , \quad \forall k \in \overline{0, N-1} , \end{aligned}$$

unde  $\alpha, \beta \in \{Re, Im\}$ , atunci numărul de înmulțiri necesare calculului complet se împarte la 2. Totodată, se mai poate folosi și faptul că anumite valori ale lui sinus și cosinus sînt 0 sau 1, ceea ce poate conduce la încă o scădere a acestui număr. Cu toate acestea, nici una din procedurile care utilizează numai simetria nu pot reduce numărul de operații la un nivel proporțional cu un număr mult mai mic decît  $N^2$ . Practic, aceste proceduri continuă să conducă la  $\mathcal{O}[N]$  proporțional cu  $N^2$ .

O reducere semnificativă a numărului de operații se poate obține numai dacă se ține cont (și) de proprietatea de periodicitate evidențiată în (31). În capitolele următoare, vom arăta cum se poate utiliza periodicitatea pentru a reduce numărul de înmulțiri la o valoare proporțională cu  $N \log_2 N$ , ceea ce constituie o îmbunătățire semnificativă (mai ales în cazul în care  $N$  este mare).

Posibilitatea unei mari reduceri a numărului de calcule a fost blocată pînă în 1965, cînd a apărut Algoritmul lui Cooley și Tukey [2]. Acest algoritm este aplicabil în cazul în care  $N$  se exprimă ca un *număr compozit*, adică sub forma unui produs de sau mai mulți întregi. Ulterior acestui pas, cercetările au relevat timp de aproape 20 de ani un mare număr de rezultate particulare referitoare la reducerea numărului de operații în implementarea calculului TFD, dar de cele mai multe ori, acestea nu pot fi generalizate. În plus, numărul de înmulțiri rămîne proporțional cu  $N \log_2 N$ , fiecare dintre ei propunînd cîte o constantă de proporționalitate specifică.

Clasa acestor algoritmi de calcul este cunoscută astăzi sub denumirea de FFT (*Fast Fourier Transform – Transformata Fourier Rapidă*). Pentru algoritmi clasei FFT,  $\mathcal{O}_{\bullet}[N] \sim N \log_2 N$ . Principiul fundamental pe care se bazează algoritmi de tip FFT constă în descompunerea calculelor din definiția TFD referitoare la secvența de lungime  $N$  în calcule de TFD succesive pentru secvențe de lungimi mai mici.

## 5 Algoritmul lui Goertzel

O procedură de calcul care crește eficiența algoritmului de implementare directă a formulei (29) este cea imaginată de Goertzel [3]. Ameliorarea numărului de operații este realizată pe seama proprietății de periodicitate din (31).

Se pleacă de la observația că  $w_N^{-kN} = 1$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , deci că definiția TFD (28) poate fi exprimată în mod echivalent astfel:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{-k(N-n)} , \quad \forall k \in \overline{0, N-1} .$$

Aceasta sugerează utilizarea următoarei secvențe discrete:

$$y_k[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] w_N^{-k(n-m)} , \quad \forall n, k \in \mathbb{Z}$$

pentru a exprima valorile TFD după cum urmează:  $X[k] = y_k[N]$ ,  $\forall k \in \overline{0, N-1}$ . Avantajul acestei exprimări constă în faptul că fiecare valoare  $X[k]$  a TFD poate fi evaluată utilizînd un SLID cauzal ce are intrarea  $x$ , ieșirea  $y_k$  și secvența pondere:

$$h_k[n] \stackrel{def}{=} w_N^{-kn} u_0[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Astfel,  $X[k] = (x \star h_k)[N]$ ,  $\forall k \in \overline{0, N-1}$ . Mai mult, între ieșirile SLID evaluate la momente succesive de timp, există o relație de recurență simplă, care poate fi dedusă apelînd la exprimarea în termeni de Transformată  $\mathcal{Z}$  a comportării SLID. Astfel, deoarece:

$$Y_k(z) = H_k(z)X(z), \quad \text{unde: } H_k(z) \stackrel{def}{=} \sum_{n \geq 0} w_N^{-kn} z^{-n} = \frac{1}{1 - w_N^{-k} z^{-1}},$$

rezultă următoarea relație de recurență în domeniul timpului:

$$y_k[n] - w_N^{-k} y_k[n-1] = x[n] \iff y_k[n] = w_N^{-k} y_k[n-1] + x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (32)$$

Este acum evident că, pentru a calcula valoarea  $X[k]$ , este suficient să se implementeze ecuația cu diferențe de mai sus și să se stopeze calculul cînd  $n = N$ . Schema de implementare pentru această ecuație este cea din Figura 3A.

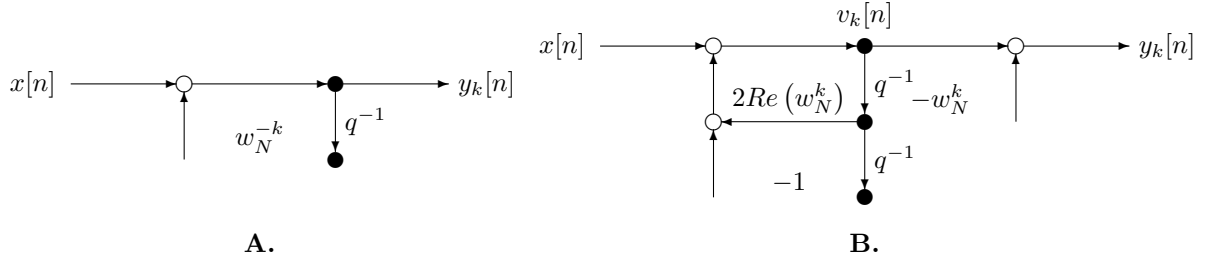


Figura 3: A. Schema de implementare pentru SLID utilizat în calculul valorii curente a TFD,  $X[k]$ .  
B. Schema îmbunătățită a lui Goertzel.

## Notă

- Reamintim că reprezentarea unei ecuații cu diferențe utilizând grafurile de semnale a fost deja prezentată în [8].

Deoarece atât  $x[n]$  cât și  $w_N^{-k}$  sînt cantități complexe, pentru a obține fiecare valoare a lui  $y_k$  sînt necesare 4 multiplicări și 4 adunări. Cum toate valorile  $y_k[1], \dots, y_k[N]$  trebuie calculate în ordine pentru a obține  $X[k]$ , rezultă că efortul de calcul se concretizează în  $4N$  multiplicări și  $4N$  adunări. În consecință, pentru a evalua setul complet de valori ale TFD cu această schemă, este necesar următorul număr total de operații egal cu:

$$\mathcal{O}[N] = \mathcal{O}_\bullet[N] + \mathcal{O}_+[N] = [4N^2]_\bullet + [4N^2]_+, \quad (33)$$

ceea ce conduce la a prefera implementarea formulei directe de calcul acestei scheme (numărul de operații în calcul direct este mai mic, vezi (30)).

Creșterea ineficienței de calcul se datorează faptului că schema anterioară a fost folosită în mod direct pentru a implementa calculul semnalului de ieșire al SLID descris de ecuația cu diferențe (32). Acest neajuns poate fi înlăturat printr-o rescriere a acestei ecuații, după cum urmează (rescriere propusă de Goertzel):

$$\begin{aligned} (1 - w_N^{+k} q^{-1}) (1 - w_N^{-k} q^{-1}) y_k[n] &= (1 - w_N^{+k} q^{-1}) x[n] \iff \\ \iff y_k[n] &= 2Re(w_N^k) y_k[n-1] - y_k[n-2] + x[n] - w_N^k x[n-1], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (34)$$

Schema eficientă pentru implementarea calculului soluției ecuației (34) (care este echivalentă cu ecuația (32)) poate fi reprezentată ca în Figura 3B.

În acest caz, calculul se desfășoară astfel, pentru fiecare  $k \in \overline{0, N-1}$ :

1. se calculează în mod iterativ semnalul intermediar  $v_k$ :

$$v_k[n] = x[n] + 2Re(w_N^k) v_k[n-1] - v_k[n-2], \quad \forall n \in \overline{1, N}$$

și se rețin valorile  $v_k[N-1]$  și  $v_k[N]$ ;

2. se calculează direct  $X[k]$ :

$$X[k] = y_k[N] = v_k[N] - w_N^k v_k[N-1].$$

La fiecare pas, pentru partea stîngă a schemei de implementare, sînt necesare  $2N+1$  multiplicări (constanta  $2Re(w_N^k)$  se evaluează o singură dată pentru fiecare valoare a lui  $k$ ) și  $4N$  adunări. Pentru partea dreaptă, numărul total de operații este de 4 multiplicări și 4 adunări. În total, acest algoritm necesită un număr de operații egal cu:

$$\mathcal{O}[N] = \mathcal{O}_\bullet[N] + \mathcal{O}_+[N] = [N(2N+5)]_\bullet + [4N(N+1)]_+, \quad (35)$$

ceea ce indică o reducere cu aproximativ o jumătate a numărului de înmulțiri față de cazurile precedente (realizată pe seama unei ușoare creșteri a numărului de adunări).

Ultima procedură (a lui Goertzel) poate fi îmbunătățită și mai mult, dacă se ține cont de faptul că, pentru a evalua  $X[N-k]$ , ecuația de implementare se obține pe baza proprietății de simetrie din (31):

$$y_{N-k}[n] = 2Re(w_N^k) y_{N-k}[n-1] - y_{N-k}[n-2] + x[n] - w_N^{-k} x[n-1], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Noua ecuație arată că doar coeficientul lui  $x[n-1]$  trebuie conjugat, restul coeficienților rămînînd neschimbați. Aceasta implică faptul că, pentru a calcula întreaga secvență  $X$ , este suficient ca în partea stîngă a schemei lui Goertzel să se evalueze numai valorile lui  $v_k$  pentru  $k \in \overline{0, \left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil}$ . Aceste valori vor fi folosite în procedura de calcul astfel:  $v_k$ , pentru a evalua

$X[k]$  atunci cînd  $k$  variază în gama  $0, \left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil$  și  $v_{N-k}$  pentru a evalua  $X[k]$  atunci cînd  $k$  variază în gama  $\left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil + 1, N-1$ .

De această dată, numărul total de operații se exprimă astfel:

$$\mathcal{O}[N] = \mathcal{O}_{\bullet}[N] + \mathcal{O}_{+}[N] = \left[ \left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil (2N+5) \right]_{\bullet} + [4N(N+1)]_{+}, \quad (36)$$

ceea ce înseamnă o reducere a numărului de înmulțiri de încă 2 ori aproximativ.

Cu toate acestea, algoritmul lui Goertzel – chiar în varianta sa îmbunătățită – continuă să păstreze proporționalitatea numărului total de operații față de  $N^2$ :

$$\mathcal{O}[N] \sim [N^2]_{\bullet} + [4N^2]_{+}. \quad (37)$$

El este utilizat adesea în cazul în care nu este necesară evaluarea tuturor celor  $N$  valori ale TFD, ci a unui mic număr dintre ele, de exemplu  $M \ll N$ . În acest caz, numărul de operații necesar este proporțional cu produsul  $MN$ , ceea ce poate conduce la o eficiență mai mare chiar decît în cazul utilizării unui algoritm din clasa FFT.

## 6 Algoritmi de tip FFT bazați pe segmentarea semnalului în timp

### 6.1 Principiul general

Algoritmii de tip FFT exploatează, de regulă, atît simetria cît și periodicitatea secvenței rădăcinilor de ordin  $N$  ale unității. Scăderea complexității de calcul se realizează pe seama grupării calculelor într-un anumit mod care să permită imaginarea unei rutine autorecurente de calcul. Există două posibilități principale de a grupa aceste calcule, bazate pe anumite tehnici de segmentare a semnalului de intrare, fie în timp, fie în frecvență. În acest capitol, vom descrie algoritmi de tip FFT bazați pe segmentarea semnalului în timp. În capitolul următor, vor fi prezentați algoritmi de tip FFT bazați pe segmentarea semnalului în frecvență.

Pentru a releva principiul general al algoritmilor din acest capitol, să considerăm că secvența inițială  $x$  are suportul de lungime pară,  $2M$ :  $x \in \mathcal{S}_{d2M}$ . Această proprietate permite exprimarea formulei de calcul directe a TFD cu ajutorul a două sume care utilizează eșantioanele de ordin par, respectiv impar ale secvenței  $x$ :

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{2M-1} x[n] w_{2M}^{nk} = \sum_{n=0}^{M-1} x[2n] w_{2M}^{2nk} + \sum_{n=0}^{M-1} x[2n+1] w_{2M}^{(2n+1)k} = \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} x[2n] w_M^{nk} + w_{2M}^k \sum_{n=0}^{M-1} x[2n+1] w_M^{nk}, \quad \forall k \in \overline{0, 2M-1}. \end{aligned} \quad (38)$$

Segmentarea în timp a semnalului inițial constă în construirea a două semnale de durate de două ori mai mici: unul conținînd eșantioanele de ordin par ( $\{x[2n]\}_{n \in \overline{0, M-1}}$ ) și altul – eșantioanele de ordin impar ( $\{x[2n+1]\}_{n \in \overline{0, M-1}}$ ). Aceasta conduce la separarea calculului  $\text{TFD}_{2M}$  în două părți, fiecare operînd cu o formulă de calcul aferentă  $\text{TFD}_M$ . Dacă se notează cu  $G$  imaginea prin  $\text{TFD}_M$  a secvenței de eșantioane pare și cu  $H$  imaginea prin  $\text{TFD}_M$  a secvenței de eșantioane impare, atunci formula de calcul (38) se exprimă echivalent astfel:

$$X[k] = G[k \% M] + w_{2M}^k H[k \% M], \quad \forall k \in \overline{0, 2M-1}. \quad (39)$$

Schema de calcul asociată acestei formule este ilustrată în Figura 4.

Procedeul de calcul a cărui ultimă etapă tocmai am prezentat-o poate fi continuat utilizînd un raționament similar, dacă dimensiunea suportului secvenței de intrare este divizibilă cu 4:  $N = 4M$ . În acest caz, cele două blocuri de calcul ale TFD din Figura 4 pot fi "sparte" în 4

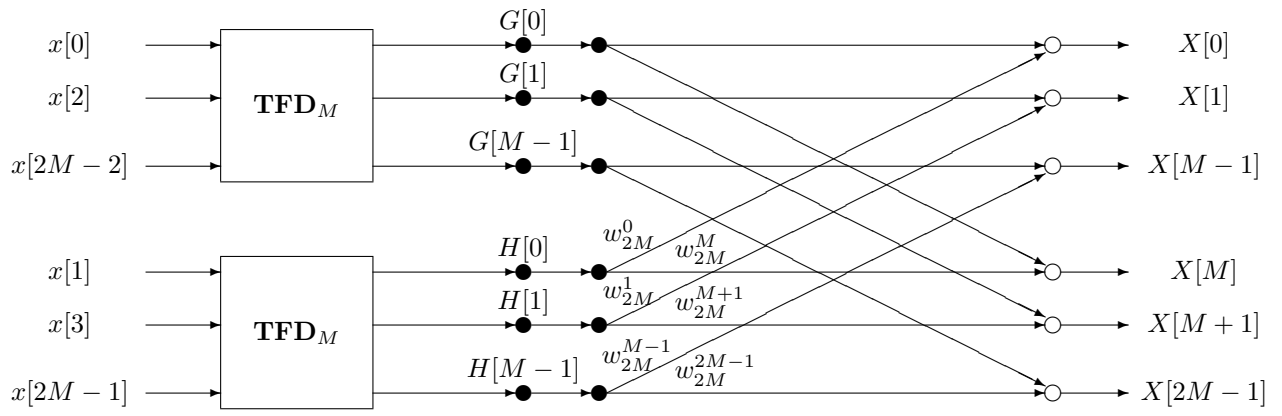


Figura 4: Ultima etapă de calcul a unui algoritm de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în timp.

blocuri, fiecare dintre ele fiind responsabil cu calculul unei TFD de dimensiune de 4 ori mai mică decât cea inițială:  $\text{TFD}_M$ . Aceste 4 blocuri oferă datele de intrare în penultima etapă (*treaptă*) de calcul. Spre deosebire de ultima treaptă de calcul care operează cu rădăcinile de ordin  $4M$  ale unității, treapta anterioară ei va utiliza rădăcinile de ordin  $2M$  ale unității.

În general, dacă dimensiunea suportului este o putere a lui 2, de exemplu cu  $2^L$  (unde  $L \in \mathbb{N}^*$ ), atunci dimensiunea TFD efective de calcul va fi redusă prin acest procedeu de  $2^L$  ori, în timp ce semnalul de intrare va fi segmentat în  $2^L$  secvențe temporale. Numărul treptelor de calcul va fi egal cu  $L$ , după evaluarea celor "mai mici" TFD, care inițializează, de fapt, întregul proces de calcul.

Aceste observații conduc la concluzia că durata secvenței de intrare ar trebui să fie egală cu o putere a lui 2, pentru a fructifica întregul câștig datorat procedurii anterioare. De regulă, această cerință este prea restrictivă. De aceea, în practică, se operează fie o eliminare a valorilor semnalului de intrare pînă la prima putere a lui 2 inferioară duratei sale, fie o completare cu zerouri pînă la prima putere a lui 2 superioară acestei durate. Mai exact, dacă  $x \in \mathcal{S}_{dN}$ , cu  $N \geq 2$ , atunci există un număr natural nenul  $L$  astfel încît:  $2^L \leq N < 2^{L+1}$ . Aceasta conduce la următoarea modificare a secvenței de intrare:

- dacă  $N - 2^L < 2^{L+1} - N$ , atunci secvența va fi trunchiată reținîndu-se numai primele  $2^L$  valori, restul fiind eliminate;
- dacă  $N - 2^L \geq 2^{L+1} - N$ , atunci secvența va fi completată cu zerouri pînă cînd durata ei devine egală cu  $2^{L+1}$ .

În ambele cazuri, însă, valorile TFD vor fi afectate și de erori de metodă, în afara celor de calcul. Cu toate acestea, erorile se situează într-o gamă de valori limitată, cu atît mai mică cu cît numărul  $N$  este mai mare.

Să considerăm, de exemplu, că secvența de intrare are doar  $N = 8 = 2^3$  eșantioane. Atunci schema de calcul a  $\text{TFD}_8$  are doar  $L = 3$  trepte de calcul, așa cum este ilustrat în Figura 5. În acest caz particular, se observă că, practic, singurii coeficienți ce provoacă efectuarea de înmulțiri complexe sînt:  $w_4^1 = w_8^2$ ,  $w_4^3 = w_8^6$ ,  $w_8^1$ ,  $w_8^3$ ,  $w_8^5$ ,  $w_8^7$ . În consecință, așa cum vom vedea, complexitatea algoritmului este redusă considerabil.

## 6.2 Evaluarea complexității de calcul

Vom evalua numărul aproximativ de operații necesar în cadrul algoritmilor de tip FFT bazați pe segmentarea semnalului în timp, plecînd de la ultima treaptă de calcul (cea mai din dreapta în figurile anterioare) către prima (cea mai din stînga, în aceleași figuri).

Să considerăm că durata semnalului de intrare este de forma:  $N = 2^L M$ , unde  $L, M \in \mathbb{N}^*$ . Dacă utilizăm Algoritmul optimizat al lui Goertzel pentru a evalua  $\text{TFD}_N$ , atunci numărul

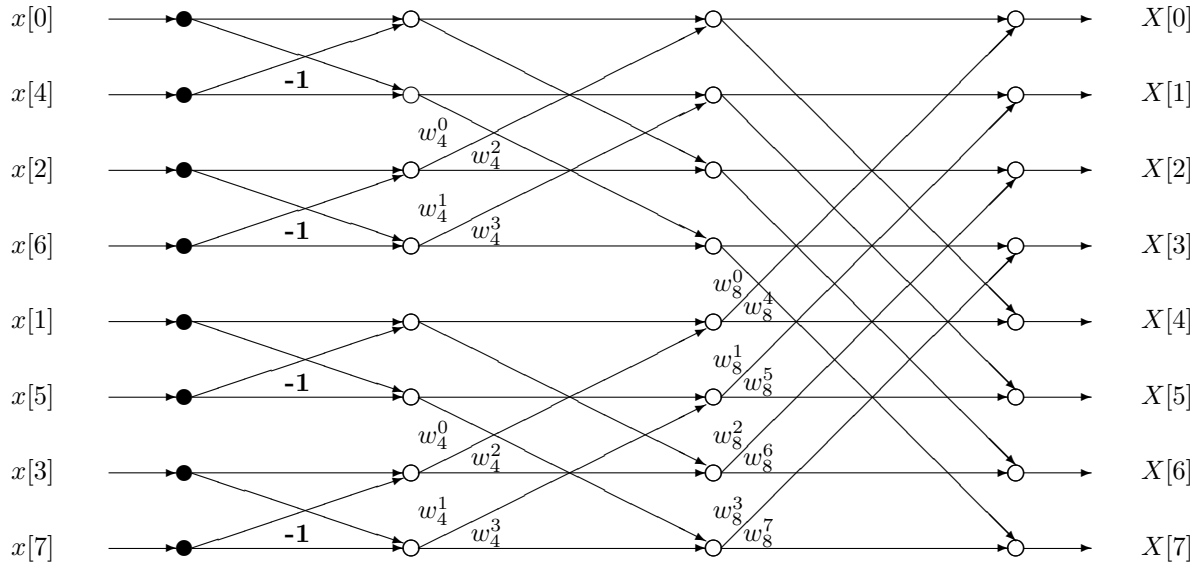


Figura 5: Schema de calcul aferentă unui algoritm de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în timp, în cazul duratei finite egale cu  $N = 2^3 = 8$ .

total de operații poate fi exprimat cu ajutorul relației (36), după cum urmează:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_G[L, M] &= \mathcal{O}_{G\bullet}[L, M] + \mathcal{O}_{G+}[L, M] \stackrel{\text{def}}{=} \left[ 2^{L-1}M (2^{L+1}M + 5) \right]_{\bullet} + \left[ 2^{L+2}M (2^L M + 1) \right]_{+} = \\ &= \left[ 2^{2L}M^2 + 5 \cdot 2^{L-1}M \right]_{\bullet} + \left[ 2^{2(L+1)}M^2 + 2^{L+2}M \right]_{+}, \quad \forall L, M \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Este evident că, dacă  $L \in \{0, 1\}$  și  $M \in \mathbb{N}^*$ , atunci:

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{G\bullet}[0, M] = \left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor (2M + 5) \\ \mathcal{O}_{G+}[0, M] = 4M(M+1)(1 - \delta_0[M-1]) \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} \mathcal{O}_{G\bullet}[1, M] = M(4M + 5) \\ \mathcal{O}_{G+}[1, M] = 8M(4M + 1) \end{cases}. \quad (40)$$

Să considerăm acum că valorile  $\text{TFD}_N$  se calculează cu ajutorul procedurii descrise în secțiunea anterioară. Atunci ultima treaptă de calcul este exprimată de o relație similară cu (39). Se observă că, pentru fiecare valoare  $k \in \overline{0, N-1}$ , această formulă necesită (maxim) 4 înmulțiri și 4 adunări efectuate între numere reale. În consecință, numărul de operații al ultimei trepte de calcul este cel mult egal cu  $4N$  înmulțiri și tot atâtea adunări reale. Dacă utilizăm Algoritmul optimizat al lui Goertzel pentru a evalua valorile lui  $H$  și  $G$  (care provin de la  $\text{TFD}_{2^{L-1}M}$ ), atunci numărul total de operații necesar pentru a implementa relația (39) este următorul:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}[L, M] &= \mathcal{O}_{\bullet}[L, M] + \mathcal{O}_{+}[L, M] = \\ &= \left[ 2^{L+2}M + 2 \cdot \mathcal{O}_{G\bullet}[L-1, M] \right]_{\bullet} + \left[ 2^{L+2}M + 2 \cdot \mathcal{O}_{G+}[L-1, M] \right]_{+} = \\ &= \left[ 2^{L+2}M + 2^{L-1}M (2^L M + 5) \right]_{\bullet} + \left[ 2^{L+2}M + 2^{L+2}M (2^{L-1}M + 1) \right]_{+} = \\ &= \left[ 2^{2L-1}M^2 + 13 \cdot 2^{L-1}M \right]_{\bullet} + \left[ 2^{2L+1}M^2 + 2^{L+3}M \right]_{+}, \quad \forall L, M \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Dacă s-ar fi utilizat direct Algoritmul lui Goertzel în varianta sa optimizată, atunci numărul de operații ar fi fost mai mare de aproximativ 2 ori.

Relația anterioară pune în evidență o formulă recurentă de evaluare a numărului de operații, care poate fi exprimată pe componente, astfel:

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{\bullet}[L, M] &= 2^{L+2}M + 2 \cdot \mathcal{O}_{\bullet}[L-1, M] \leq 2^{L+2}M + 2 \cdot \mathcal{O}_{G_{\bullet}}[L-1, M] \\ \mathcal{O}_{+}[L, M] &= 2^{L+2}M + 2 \cdot \mathcal{O}_{+}[L-1, M] \leq 2^{L+2}M + 2 \cdot \mathcal{O}_{G_{+}}[L-1, M] \end{cases}, \quad \forall L, M \in \mathbb{N}^* . \quad (41)$$

Inițializarea acestor formule se realizează cu ajutorul relațiilor (40):

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{\bullet}[0, M] &= \mathcal{O}_{G_{\bullet}}[0, M] = \left\lceil \frac{M-1}{2} \right\rceil (2M+5) \\ \mathcal{O}_{+}[0, M] &= \mathcal{O}_{G_{+}}[0, M] = 4M(M+1)(1-\delta_0[M-1]) \end{cases}, \quad \forall M \in \mathbb{N}^* . \quad (42)$$

Este relativ simplu, deci, de a exprima aceste numere în cazul utilizării a  $L$  trepte de calcul succesiv, după segmentarea temporală a semnalului în  $2^L$  secvențe de durată  $M$  și evaluarea celor  $2^L$  seturi de valori ale  $\text{TFD}_M$ :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{\bullet}[L, M] &= 2^{L+2}M + 2^1 \cdot 2^{L+1}M + \dots + 2^{L-1} \cdot 2^3M + 2^L \cdot \mathcal{O}_{\bullet}[0, M] = \\ &= 2^{L+2}LM + \left\lceil \frac{M-1}{2} \right\rceil (2M+5) \\ \mathcal{O}_{+}[L, M] &= 2^{L+2}M + 2^1 \cdot 2^{L+1}M + \dots + 2^{L-1} \cdot 2^3M + 2^L \cdot \mathcal{O}_{+}[0, M] = \\ &= 2^{L+2}LM + 4M(M+1)(1-\delta_0[M-1]) \end{cases}, \quad \forall L, M \in \mathbb{N}^* . \quad (43)$$

Dacă  $M \ll 2^L$  (caz des întâlnit în practică), atunci se constată că:

$$\mathcal{O}[L, M] = \mathcal{O}[N] \sim [4N \log_2 N]_{\bullet} + [4N \log_2 N]_{+} . \quad (44)$$

Reamintim că, în cazul Algoritmului lui Goertzel, chiar în varianta optimizată, acest număr păstrează proporționalitatea față de  $N^2$  (vezi (37)). În consecință algoritmi de tip FFT din această categorie aduc o îmbunătățire semnificativă relativ la complexitatea de calcul.

De regulă,  $N = 2^L$ , acest lucru obținându-se prin procedeul completării cu zerouri sau al eliminării de valori descris în secțiunea anterioară. În acest caz ( $M = 1$ ), rezultă că numărul total de operații este dat de formula următoare:

$$\mathcal{O}[N] = [4N \log_2 N]_{\bullet} + [4N \log_2 N]_{+} \quad (45)$$

### 6.3 Îmbunătățiri aduse de calculul de tip "fluture"

Schema de calcul din Figura 5 este reprezentativă pentru algoritmi de tip FFT din această categorie, deși ea reprezintă doar un caz particular extrem de simplificat. Vom utiliza această schemă pentru a extrage caracteristicile principale ale algoritmului general, cu scopul de a îmbunătăți și mai mult eficiența sa (adică de a reduce din nou numărul total de operații).

Pentru a simplifica expunerea din această secțiune, vom considera că secvența de intrare are durată de forma  $N = 2^L$ , cu  $L \in \mathbb{N}^*$ . Atunci schema de calcul din Figura 5 poate fi utilizată pentru a ilustra principiul de lucru al algoritmului în acest caz general. Pentru început, în Figura 6 prezentăm o schemă bloc a evoluției semnalului de la forma sa inițială pînă la forma finală, care reprezintă  $\text{TFD}_N(x)$ . Fiecare bloc de calcul reprezintă una dintre cele  $L$  trepte de calcul aferente (sînt numai 3 blocuri, în cazul secvenței de durată  $N = 8$ ). Intrarea unui bloc oarecare  $l \in \overline{1, L}$  este un vector  $v_{l-1} \in \mathbb{R}^N$  (de dimensiune constantă) iar ieșirea – un vector  $v_l \in \mathbb{R}^N$  (de aceeași dimensiune). Algoritmul este inițializat cu un vector  $v_0$  ale cărui elemente sînt determinate de valorile secvenței de intrare  $x$ , rearanjate în altă ordine, așa cum vom arăta

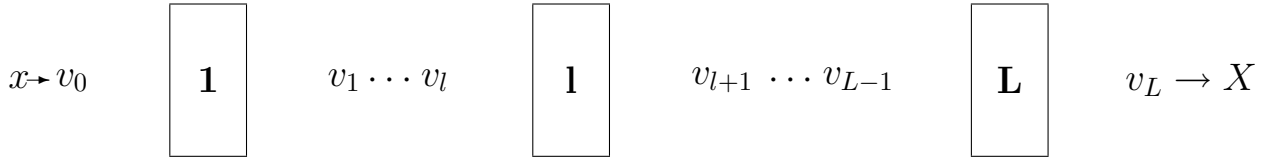


Figura 6: Schema bloc de calcul aferentă unui algoritm de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în timp, în cazul duratei finite de tipul  $N = 2^L$ .

în continuare. Vectorul de ieșire  $v_L$  conduce direct la determinarea  $TFD_N(x)$ , fără a fi necesară rearanjarea elementelor lui în altă ordine.

Convenim ca elementul "p" al vectorului oarecare " $v_l$ " să fie notat cu " $v_l[p]$ " și nu cu " $v_{lp}$ " cum ar fi normal, pentru a evidenția mai clar indicele "p". Vectorul de inițializare este construit plecând de la o rearanjare a elementelor secvenței  $x$  într-o anumită ordine. Pentru a deduce regula de rearanjare, este suficient să privim din nou Figura 5 și să generalizăm această situație.

Fie  $p \in \overline{1, 2^L}$  arbitrar fixat. Dorim să exprimăm  $v_0[p]$  în funcție de eșantioanele lui  $x$ . Pentru aceasta, plecăm de la faptul că există un unic număr natural  $q \in \overline{1, 2^{L-1}}$  și un unic număr binar  $\varepsilon \in \{0, 1\}$  astfel încât:  $p = 2q + \varepsilon - 1$ . (Practic, am exprimat faptul că  $p$  este fie par, fie impar.) În aceste condiții, se constată cu ușurință că:

- dacă  $p \in \overline{1, 2^{L-1}}$ , atunci:

$$v_0[p] = x \left[ 2(q - 1) + 2^{L-1}\varepsilon \right] = x \left[ p + (1 - p \% 2) (2^{L-1} - 1) - 1 \right] ;$$

- dacă  $p \in \overline{2^{L-1} + 1, 2^L}$ , atunci:

$$v_0[p] = x \left[ 2(q - 1) + 2^{L-1}(\varepsilon - 1) + 1 \right] = x \left[ p + (1 - p \% 2) (2^{L-1} - 1) - 2^{L-1} \right] .$$

Această regulă poate fi reprezentată compact cu ajutorul treptei unitare discrete,  $u_0$ , în forma următoare:

$$v_0[p] \stackrel{def}{=} x \left[ p + (1 - p \% 2) (2^{L-1} - 1) - 2^{(L-1)u_0[p-2^{L-1}-1]} \right] , \quad \forall p \in \overline{1, 2^L} . \quad (46)$$

Odată  $v_0$  construit cu ajutorul regulii de rearanjare (46), toți ceilalți vectori intermediari și cel final nu mai necesită rearanjări ale elementelor în această variantă de algoritm. Dacă vectorul final  $v_L$  a fost determinat, atunci TFD se obține direct din acesta, astfel:

$$X[k] = v_L[k + 1] , \quad \forall k \in \overline{0, 2^L - 1} . \quad (47)$$

Aceste precizări de ordin global privind algoritmul ne permit acum să studiem structura intimă a unui bloc de calcul din schema anterioară. Fie  $l \in \overline{0, L-1}$  un număr arbitrar fixat, pe care îl vom utiliza pentru a eticheta cu " $(l+1)$ " blocul (treapta) de calcul în studiu. Intrarea acestui bloc este vectorul  $v_l$ , iar ieșirea sa – vectorul  $v_{l+1}$ . Vom deduce regula care stă la baza construcției vectorului de ieșire din cel de intrare, folosind tot Figura 5. Privind această figură se constată imediat că pentru a construi un element al vectorului de ieșire, sînt necesare numai 2 elemente ale vectorului de intrare și o anumită valoare a unei rădăcini de ordin  $2^{l+1}$  a unității. Această regulă de calcul se păstrează și în cazul general, ea fiind invariantă la durată secvenței de intrare. Să revenim la cazul general și să alegem următoarele numere:  $p \in \overline{0, 2^{L-l-1} - 1}$  și  $m \in \overline{1, 2^{l+1}}$ . Atunci regula de calcul de mai sus se exprimă matematic astfel:

- dacă  $m \in \overline{1, 2^l}$ :

$$v_{l+1} \left[ 2^{l+1}p + m \right] = w_{2^{l+1}}^{m-1} v_l \left[ 2^{l+1}p + 2^l + m \right] + v_l \left[ 2^{l+1}p + m \right] ;$$

- dacă  $m \in \overline{2^l + 1, 2^{l+1}}$ :

$$v_{l+1} [2^{l+1}p + m] = w_{2^{l+1}}^{m-1} v_l [2^{l+1}p + m] + v_l [2^{l+1}p + m - 2^l] .$$

O formă echivalentă a acestei reguli de calcul este următoarea:

$$\begin{cases} v_{l+1} [2^{l+1}p + m] &= w_{2^{l+1}}^{m-1} v_l [2^{l+1}p + 2^l + m] + v_l [2^{l+1}p + m] & \forall l \in \overline{0, L-1} \\ v_{l+1} [2^{l+1}p + 2^l + m] &= w_{2^{l+1}}^{2^l+m-1} v_l [2^{l+1}p + 2^l + m] + v_l [2^{l+1}p + m] & \forall m \in \overline{1, 2^l} \end{cases}, \quad \forall p \in \overline{0, 2^{L-l-1} - 1} . \quad (48)$$

Dacă se ține cont că  $w_{2M}^{M+n} = -w_{2M}^n$ , atunci rezultă o ultimă formă echivalentă:

$$\begin{cases} v_{l+1} [2^{l+1}p + m] &= v_l [2^{l+1}p + m] + w_{2^{l+1}}^{m-1} v_l [2^{l+1}p + 2^l + m] & \forall l \in \overline{0, L-1} \\ v_{l+1} [2^{l+1}p + 2^l + m] &= v_l [2^{l+1}p + m] - w_{2^{l+1}}^{m-1} v_l [2^{l+1}p + 2^l + m] & \forall m \in \overline{1, 2^l} \end{cases}, \quad \forall p \in \overline{0, 2^{L-l-1} - 1} . \quad (49)$$

Relațiile echivalente (48) și (49) conduc la schemele echivalente de calcul din Figura 7. Aceste scheme scot în evidență că unitatea elementară de calcul din cadrul oricărui bloc are

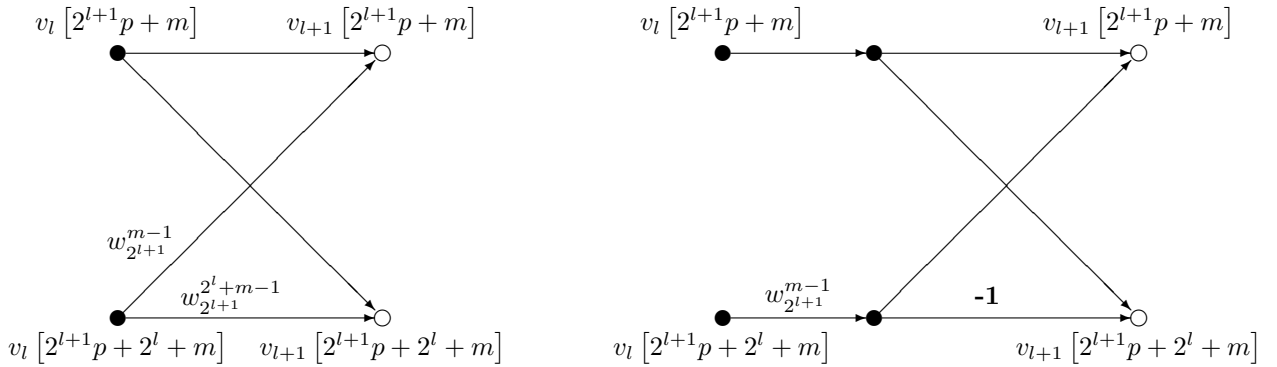


Figura 7: Două scheme echivalente ale unității de calcul de tip "fluture" specifice unui algoritm de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în timp.

forma aripilor unui fluture, de unde și denumirea aferentă. De altfel, unitatea de calcul de tip "fluture" (*butterfly*) este singura care contribuie la determinarea vectorului de ieșire din cel de intrare, prin utilizarea ei în mod repetat.

Schema echivalentă din dreapta conduce, totodată, la micșorarea de două ori a numărului total de operații al algoritmului, deoarece, spre deosebire de schema din stînga, aici una dintre cele 2 înmulțiri complexe a fost înlocuită cu o schimbare de semn.

În condițiile utilizării unității de calcul de tip "fluture" în varianta eficientă (din dreapta), numărul total de operații scade la:

$$\mathcal{O}[N] \sim [2N \log_2 N]_{\bullet} + [2N \log_2 N]_{+} = [4N \log_2 \sqrt{N}]_{\bullet} + [4N \log_2 \sqrt{N}]_{+} . \quad (50)$$

Schema din Figura 5 poate fi exprimată în varianta eficientă ca în Figura 8. Se observă că, în acest caz, numărul de înmulțiri complexe este sensibil redus. Evitarea rearanjării elementelor vectorilor intermediari conduce la creșterea dimensiunii geometrice a unității elementare de calcul de tip "fluture", ceea ce conduce la schimbarea permanentă a intrărilor și ieșirilor acestora. (Așa cum vom vedea, este posibilă menținerea constantă a formei acestei unități de calcul, cu o rearanjare adecvată a elementelor vectorilor.)

Algoritmul poate fi implementat de așa manieră încît toate rezultatele intermediare și cel final să fie memorate succesiv numai în locațiile aferente vectorului de intrare. În mod normal, însă, semnalul inițial este conservat într-un vector separat, în scopul utilizării lui și în alte eventuale proceduri. Practic, acest algoritm necesită 2 vectori avînd fiecare cîte  $2^L$  locații de memorie dedicate numerelor complexe.

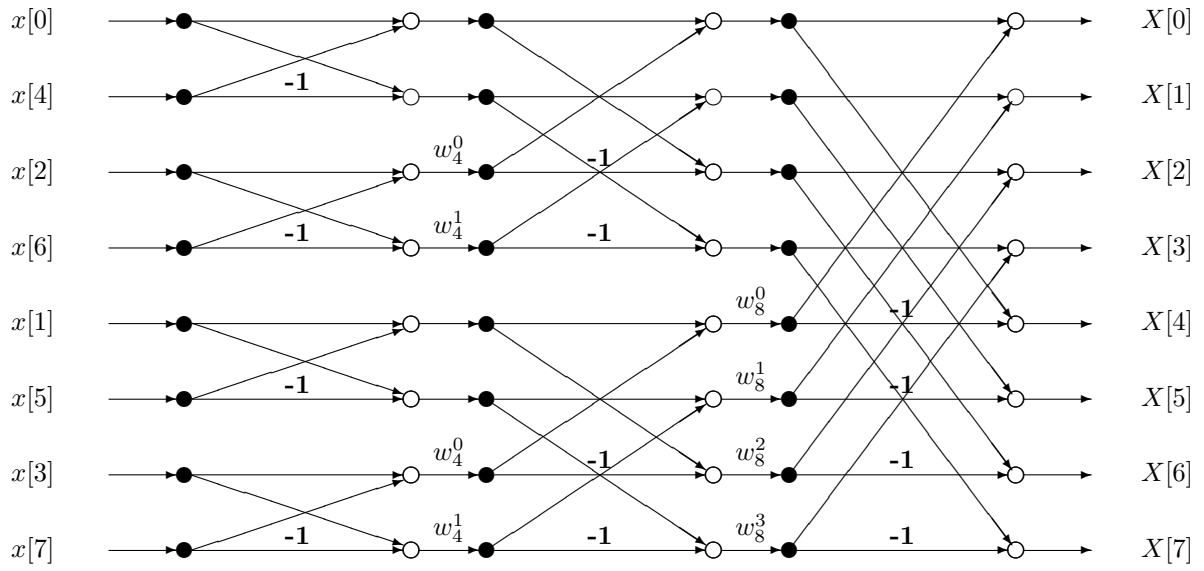


Figura 8: Schema eficientă de calcul aferentă unui algoritm de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în timp, în cazul duratei finite egale cu  $N = 2^3 = 8$ .

## 6.4 Forme alternative

Schema de calcul din Figura 8 poate fi reorganizată diverse forme alternative. În această secțiune, vom prezenta 3 astfel de forme, fiecare conducând la câte un algoritm de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului în timp. Generalizarea la cazul  $N = 2^L$  a schemelor particulare care urmează nu constituie o problemă.

### 6.4.1 Algoritmul Cooley-Tukey

Una dintre primele referiri la algoritmii de tip FFT bazați pe segmentarea semnalului în timp se datorează lui Cooley și Tukey ([2]). Spre deosebire de algoritmul prezentat în secțiunea anterioară, Algoritmul Cooley-Tukey pleacă de la semnalul original cu eşantioane ordonate normal și oferă valorile TFD într-un vector cu elemente rearanjate, așa cum se poate sesiza în Figura 9. Este ușor de demonstrat că această schemă de calcul continuă să fie corectă. Practic, în acest caz, nu se poate evita varierea dimensiunii geometrice a unității elementare de calcul de tip "fluture", dar, în loc să crească, această dimensiune scade.

Vectorul de intrare al acestui algoritm se obține simplu, astfel:

$$v_0[p] = x[p - 1] , \quad \forall p \in \overline{1, 2^L} . \quad (51)$$

Regula este asemănătoare lui (47) din secțiunea anterioară. Pentru a preciza și regula de obținere a valorilor TFD din vectorul de ieșire, să considerăm că am fixat arbitrar numărul întreg  $k \in \overline{0, 2^L - 1}$  și că dorim să determinăm indicele  $p$  al vectorului  $v_L$  care conduce la egalitatea:  $v_L[p] = X[k]$ . Se observă că:

- dacă numărul  $k$  este par, atunci:

$$p = \begin{cases} 1 + k & , \quad k \in \overline{0, 2^{L-1} - 2} \\ 1 + k - (2^{L-1} - 1) & , \quad k \in \overline{2^{L-1}, 2^L - 2} \end{cases} ;$$

- dacă numărul  $k$  este impar, atunci:

$$p = \begin{cases} 2^{L-1} + k & , \quad k \in \overline{1, 2^{L-1} - 1} \\ 2^{L-1} + k - (2^{L-1} - 1) & , \quad k \in \overline{2^{L-1} + 1, 2^L - 1} \end{cases} .$$

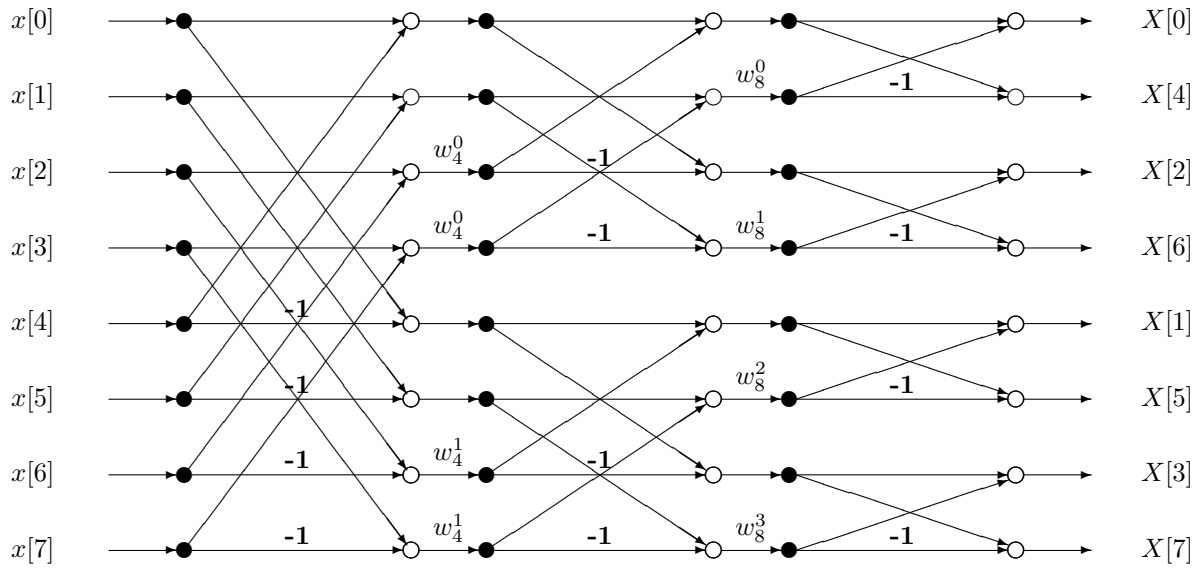


Figura 9: Schema de calcul aferentă Algoritmului Cooley-Tukey, în cazul unei secvențe de durată finită egală cu  $N = 2^3 = 8$ .

Aceste observații conduc la concluzia că regula de obținere a valorilor TFD este următoarea:

$$X[k] = v_L \left[ 2^{(L-1)(k\%2)} + k - (2^{L-1} - 1) u_0 \left[ k - 2^{L-1} \right] \right], \quad \forall k \in \overline{0, 2^L - 1}, \quad (52)$$

unde, ca de obicei,  $u_0$  indică treapta unitară discretă. Practic, relația (52) este inversă relației (46) din secțiunea anterioară.

#### 6.4.2 Algoritmul modificat, cu intrări și ieșiri ordonate normal

Dacă se dorește evitarea acestor reguli de indexare de la inițializarea sau din finalul algoritmului, atunci se poate utiliza forma alternativă a schemei de calcul din Figura 10. De

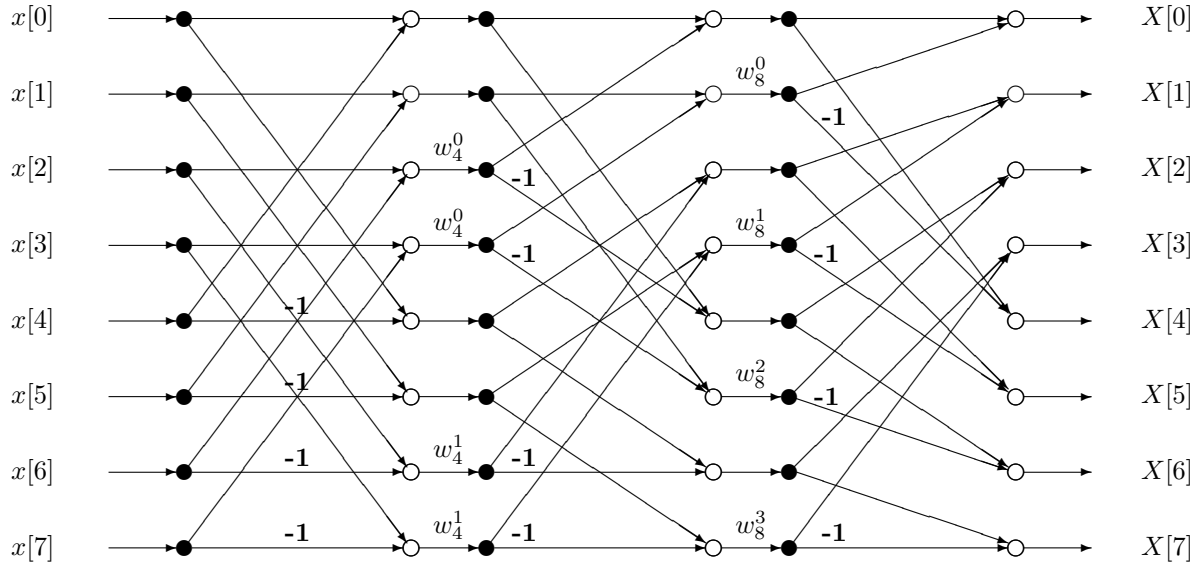


Figura 10: Schema de calcul aferentă unei versiuni a algoritmului de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului în timp, care operează cu intrări și ieșiri ordonate normal, în cazul duratei finite egale cu  $N = 2^3 = 8$ .

această dată, regulile de "rearanjare" sînt (51) și (47). Prețul plătit pentru evitarea rearanjării

este complicarea treptelor de calcul intermediare și finală, unde configurația unității de calcul de tip "fluture" a fost puternic deformată. Efectul acestei deformări constă în complicarea modalității de adresare a intrărilor și ieșirilor acestei unități de calcul. Mai mult, deformarea nu este uniformă, ea avînd exprimări diferite pentru trepte de calcul diferite.

### 6.4.3 Algoritmul lui Singleton

Pentru a elimina neajunsul configurației variabile de-a lungul și în interiorul treptelor de calcul a unității elementare de tip "fluture", Singleton a propus în [5] și [6] o schemă de calcul care conservă aceeași geometrie a unității elementare de calcul, deși deformată. Așa cum se poate sesiza din Figura 11, prețul plătit pentru a obține acest avantaj îl constituie, pe de

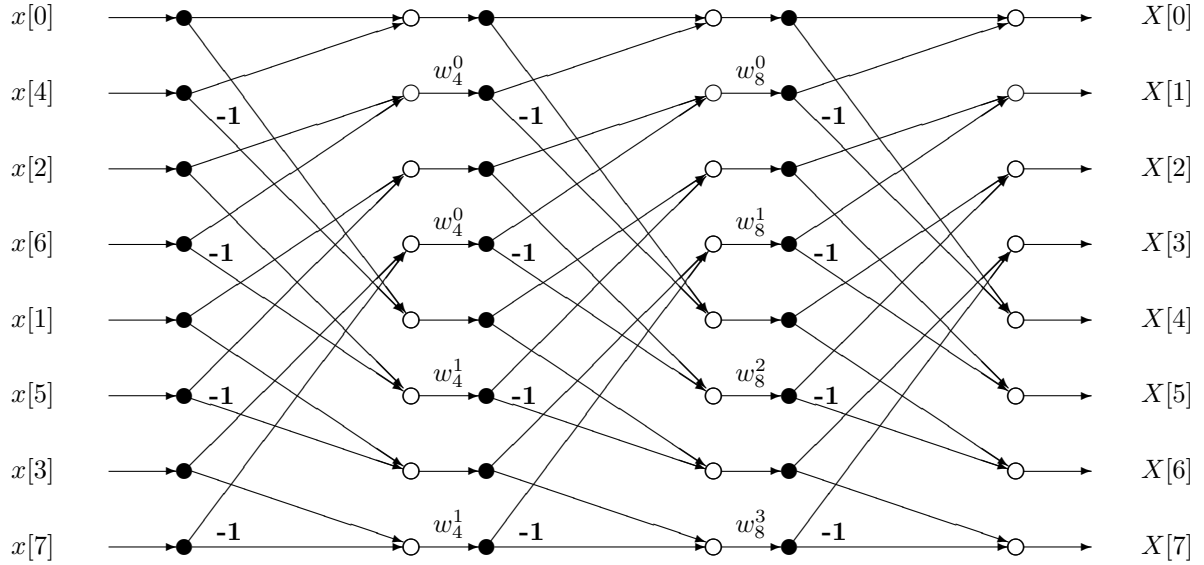


Figura 11: Schema de calcul aferentă Algoritmului lui Singleton, în cazul unei secvențe de durată finită egală cu  $N = 2^3 = 8$ .

o parte, rearanjarea valorilor intrării după regula (46), iar, pe de altă parte, utilizarea unei indexări diferite a ieșirilor unității elementare de calcul (față de cazul prezentat în secțiunea anterioară).

Cu toate acestea, utilizarea unei unice configurații a unității elementare de calcul atât în interiorul oricărei trepte de calcul, cât și de-a lungul treptelor de calcul poate conduce la un câștig important de eficiență. Algoritmul lui Singleton este predispus implementărilor pe bază de rutine autorecurente datorită aspectului repetitiv al schemei sale de calcul.

## 7 Algoritmi de tip FFT bazați pe segmentarea semnalului în frecvență

### 7.1 Principiul general

Principiul general de construcție a algoritmilor de tip FFT este conservat în esență și în cadrul acestui capitol. De această dată, însă, semnalul de intrare este segmentat diferit, astfel încît să se poată separa calculul eșantioanelor de ordin par ale TFD de cele de ordin impar. Reamintim că TFD este un instrument de transformare a informației temporale într-o informație frecvențială. De aceea, datorită acestui artificiu, se spune că algoritmi de tip FFT din această categorie se bazează pe *segmentarea semnalului în frecvență*, deși, în realitate, segmentarea efectivă se produce tot în timp.

Pentru a ilustra modul general de lucru al unui algoritm de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului în frecvență, să considerăm că secvența inițială  $x$  are suportul de lungime pară,

$2M$ :  $x \in \mathcal{S}_{d2M}$ . Această proprietate permite exprimarea formulei de calcul directe a TFD cu ajutorul a două sume care segmentează semnalul în două jumătăți:

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{2M-1} x[n] w_{2M}^{nk} = \sum_{n=0}^{M-1} x[n] w_{2M}^{nk} + \sum_{n=M}^{2M-1} x[n] w_{2M}^{nk} = \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} x[n] w_{2M}^{nk} + w_{2M}^{Mk} \sum_{n=0}^{M-1} x[n+M] w_{2M}^{nk}, \quad \forall k \in \overline{0, 2M-1}. \end{aligned} \quad (53)$$

Deoarece termenii fiecărei sume conțin numai eșantioane de semnal ponderate de " $w_{2M}^{nk}$ ", nu este posibilă exprimarea cu ajutorul a două TFD de dimensiuni mai mici, în această formă (așa cum s-a întâmplat în cazul segmentării semnalului în timp). Observăm, însă, că:  $w_{2M}^{Mk} = (-1)^k$ , deci sumele de mai sus pot fi din nou regrupate în una singură:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{M-1} (x[n] + (-1)^k x[n+M]) w_{2M}^{nk}, \quad \forall k \in \overline{0, 2M-1}. \quad (54)$$

Plecînd de la această formulă de exprimare a TFD, se pot pune în evidență două tipuri de valori:

- valori ale TFD de ordin par:

$$X[2k] = \sum_{n=0}^{M-1} (x[n] + x[n+M]) w_M^{nk}, \quad \forall k \in \overline{0, M-1};$$

- valori ale TFD de ordin impar:

$$X[2k+1] = \sum_{n=0}^{M-1} (x[n] - x[n+M]) w_M^n w_M^{nk}, \quad \forall k \in \overline{0, M-1}.$$

(În ambele situații, s-a folosit faptul că  $w_{2M}^{2nk} = w_M^{nk}$ .) Rezultatul la care s-a ajuns ne permite să definim următoarele secvențe discrete (din  $\mathcal{S}_{dM}$ , de această dată):

$$\begin{cases} g[n] \stackrel{\text{def}}{=} x[n] + x[n+M] \\ h[n] \stackrel{\text{def}}{=} x[n] - x[n+M] \end{cases}, \quad \forall n \in \overline{0, M-1}. \quad (55)$$

Este evident, atunci, că:

$$X[k] = (1 - k\%2) TFD(g)[k] + (k\%2) TFD(h w_M^n)[k], \quad \forall k \in \overline{0, 2M-1}. \quad (56)$$

Schema de calcul asociată acestei formule este ilustrată în Figura 12.

Procedeul de calcul a cărui primă etapă am prezentat-o mai sus poate fi continuat utilizînd un raționament similar, dacă dimensiunea suportului secvenței de intrare este divizibilă cu 4:  $N = 4M$ . În acest caz, cele două blocuri de calcul ale TFD din Figura 12 pot fi "sparte" în 4 blocuri, fiecare dintre ele fiind responsabil cu calculul unei TFD de dimensiune de 4 ori mai mică decît cea inițială:  $TFD_M$ . Aceste 4 blocuri primesc ca date de intrare rezultatele penultimei etape (*trepte*) de calcul. Spre deosebire de cazul segmentării în timp, aici semnalul de intrare este o singură dată împărțit în două, urmînd ca numai ieșirile fiecărei trepte de calcul să sufere succesiv segmentări. Aceste semnale de ieșire au toate natură frecvențială, fapt care justifică încă o dată numele dat categoriei de algoritmi de tip FFT aflată în discuție.

În general, dacă dimensiunea suportului este proporțională cu o putere a lui 2, de exemplu cu  $2^L$  (unde  $L \in \mathbb{N}^*$ ), atunci dimensiunea TFD efective de calcul va fi redusă prin acest procedeu de  $2^L$  ori, în timp ce semnalul de ieșire va fi segmentat în  $2^L$  secvențe (frecvențiale). Numărul treptelor de calcul va fi egal cu  $L$ , după evaluarea celor "mai mici" TFD, care definitivează,

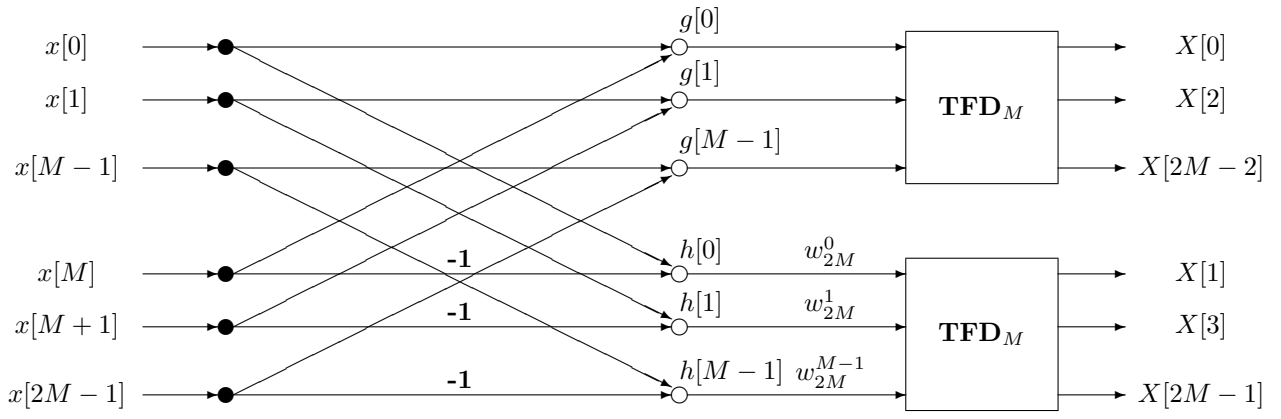


Figura 12: Prima etapă de calcul a unui algoritmul de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în frecvență.

de fapt, întregul proces de calcul. Aceste observații conduc la concluzia că durata secvenței de intrare ar trebui să fie egală tot cu o putere a lui 2, ca în cazul segmentării în timp.

Să revenim acum la exemplul în care secvența de intrare are doar  $N = 8 = 2^3$  eșantioane. Atunci schema de calcul a  $\text{TFD}_8$  are doar  $L = 3$  trepte de calcul, așa cum este ilustrat în Figura 13. În acest caz particular, se observă că, practic, singurii coeficienți ce provoacă

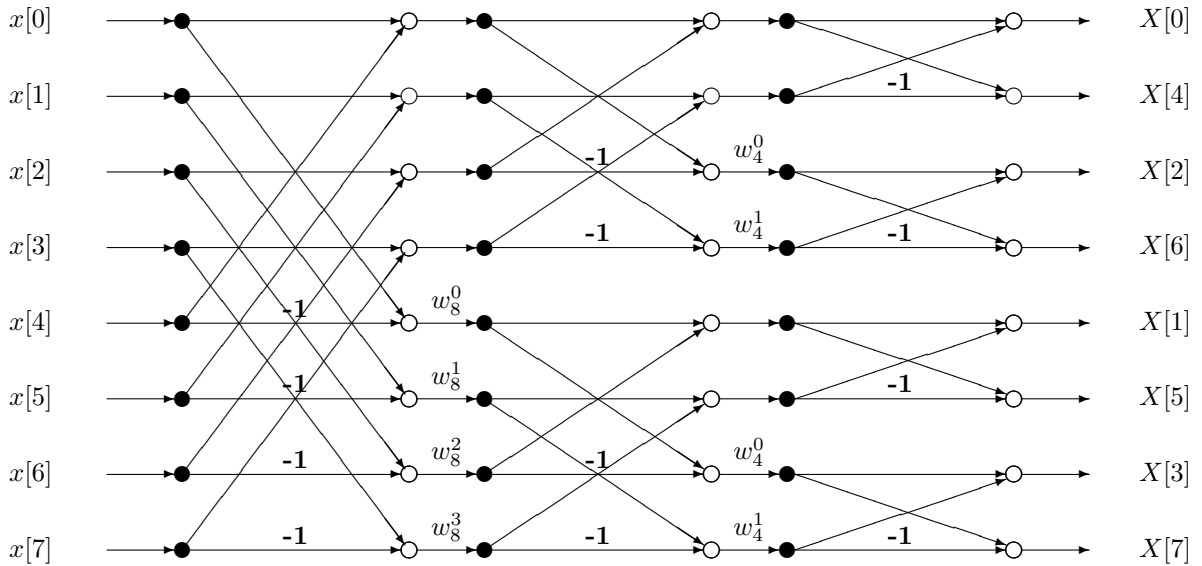


Figura 13: Schema de calcul aferentă unui algoritmul de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în frecvență, în cazul duratei finite egale cu  $N = 2^3 = 8$ .

efectuarea de înmulțiri complexe sînt:  $w_8^0, w_8^1, w_8^2, w_8^3$ . În consecință, complexitatea algoritmului este și în acest caz redusă considerabil.

De altfel, toate observațiile din secțiunea 6.2 referitoare la evaluarea complexității de calcul a algoritmului rămîn valabile și aici. Mai mult, chiar, datorită formei speciale a unității elementare de calcul de tip "fluture" (redată aici direct în formă eficientă), numărul total de calcule aferent acestei categorii de algoritmi este direct dat de:

$$\mathcal{O}[N] \sim [2N \log_2 N]_{\bullet} + [2N \log_2 N]_{+} = [4N \log_2 \sqrt{N}]_{\bullet} + [4N \log_2 \sqrt{N}]_{+}, \quad (57)$$

ca și în cazul categoriei de algoritmi de tip FFT bazați pe segmentarea semnalului în timp.

## 7.2 Corelația cu algoritmi de tip FFT bazați pe segmentarea semnalului în timp

Cele două categorii de algoritmi sînt intercorelate datorită Teoremelor lui Tellegen și a simetriei referitoare la reprezentarea sistemelor prin grafuri de semnale ([4]). În această secțiune, vom ilustra această corelație și o vom utiliza pentru a construi un algoritm de calcul al TFD inverse.

Pentru a simplifica expunerea, vom considera că secvența de intrare are durată de forma  $N = 2^L$ , cu  $L \in \mathbb{N}^*$ . Este evident că schema bloc a evoluției semnalului de la forma inițială la forma finală (din care rezultă valorile TFD) se identifică tot cu cea din Figura 6 (de la pagina 26). Algoritmul este inițializat cu un vector  $v_0$  ale cărui elemente sînt determinate de valorile secvenței de intrare  $x$ , rearanjate în altă ordine, regula de rearanjare fiind descrisă de relația (51) din cadrul Algoritmului Cooley-Tukey (practic, nu este vorba de o veritabilă rearanjare). Vectorul de ieșire  $v_L$  conduce direct la determinarea  $TFD_N(x)$ , după regula dată de relația (52) descrisă tot în cadrul Algoritmului Cooley-Tukey.

Fiecare treaptă de calcul are la bază o unitate elementară de tip "fluture", pe care o vom studia în continuare. Fie  $l \in \overline{0, L-1}$  un număr arbitrar fixat, pe care îl vom utiliza pentru a eticheta cu " $(l+1)$ " blocul (treapta) de calcul în studiu. Intrarea acestui bloc este vectorul  $v_l$ , iar ieșirea sa – vectorul  $v_{l+1}$ . Legătura dintre elementele celor doi vectori este dată, evident, de următoarele relații (ușor diferite de (49) din capitolul anterior):

$$\begin{cases} v_{l+1} [2^{L-l}p + m] &= v_l [2^{L-l}p + m] + v_l [2^{L-l}p + 2^{L-l-1} + m] \\ v_{l+1} [2^{L-l}p + 2^{L-l-1} + m] &= w_{2^{L-l}}^{m-1} (v_l [2^{L-l}p + m] - v_l [2^{L-l}p + 2^{L-l-1} + m]) \end{cases}, \quad (58)$$

$$\forall l \in \overline{0, L-1}, \quad \forall m \in \overline{1, 2^{L-l-1}}, \quad \forall p \in \overline{0, 2^l - 1}.$$

Unitatea elementară de calcul de tip fluture arată ca în Figura 14.

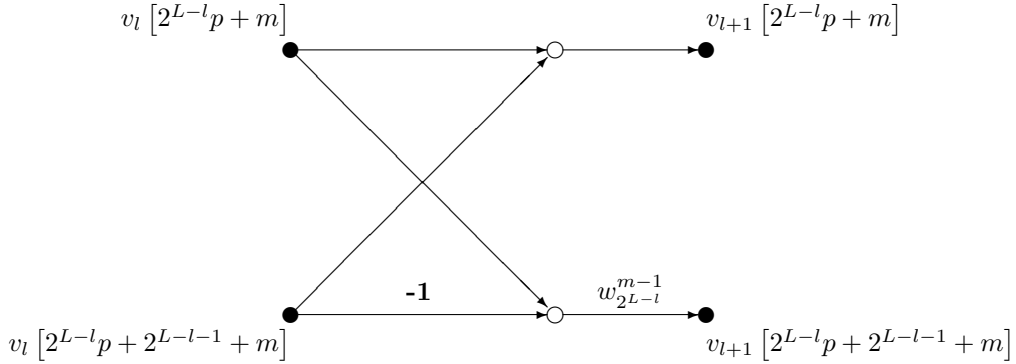


Figura 14: Schema unității de calcul de tip "fluture" specifice unui algoritm de tip FFT, bazat pe segmentarea semnalului în frecvență.

Această schemă se poate obține din cea descrisă în Figura 7 (dreapta) prin *transpunere*. Operația de transpunere presupune schimbarea intrărilor cu ieșirile și inversarea sensurilor tuturor arcelor grafului. Ea constituie legătura care se poate crea între cele două categorii de algoritmi de tip FFT prezentate pînă acum.

Mai precis, să revenim la unitatea elementară de calcul de tip "fluture" descrisă de (49) din capitolul precedent. Atunci, se constată că o modalitate echivalentă de a exprima operațiile aferente este următoarea:

$$\begin{cases} v_l [2^{l+1}p + m] &= \frac{1}{2} (v_{l+1} [2^{l+1}p + m] + v_{l+1} [2^{l+1}p + 2^l + m]) \\ v_l [2^{l+1}p + 2^l + m] &= \frac{w_{2^{l+1}}^{1-m}}{2} (v_{l+1} [2^{l+1}p + m] - v_{l+1} [2^{l+1}p + 2^l + m]) \end{cases},$$

unde:  $l \in \overline{0, L-1}$ ,  $m \in \overline{1, 2^l}$ ,  $p \in \overline{0, 2^{L-l-1} - 1}$ .

Este evident că schema de calcul aferentă noilor relații este similară celei din Figura 14, adăugînd cîte o multiplicare cu  $\frac{1}{2}$  pe fiecare dintre cele două ramuri de ieșire. Practic, aceste relații exprimă matematic operația de transpunere.

Această observație permite proiectarea unui algoritm de calcul pentru ITFD, folosind schema de calcul a unui algoritm de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului în timp și operația de transpunere. Ceea ce se obține este chiar un algoritm de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului în frecvență, avînd coeficienții de multiplicare ușor modifcați (se ține cont de proprietatea de periodicitate:  $w_N^{-k} = w_N^{N-k}$ ). Practic, treptele de calcul ale algoritmului inițial sînt transpuse și parcurse în sens invers succesiunii lor normale.

În general, se poate demonstra următorul rezultat:

### Teorema 7.1

*Pentru orice algoritm de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului în timp există un unic algoritm de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului în frecvență, a cărui schemă de calcul se obține din schema originală prin următoarele operații:*

1. *inversarea intrărilor cu ieșirile;*
2. *inversarea sensului tuturor arcelor.*

□

Rezultatul a fost folosit și în proiectarea algoritmilor de calcul pentru ITFD. Aceasta poate fi verificată cu ușurință, dacă revenim la exemplul semnalului cu  $N = 2^3 = 8$  eșantioane. Schema de calcul a ITFD este ilustrată în Figura 15.

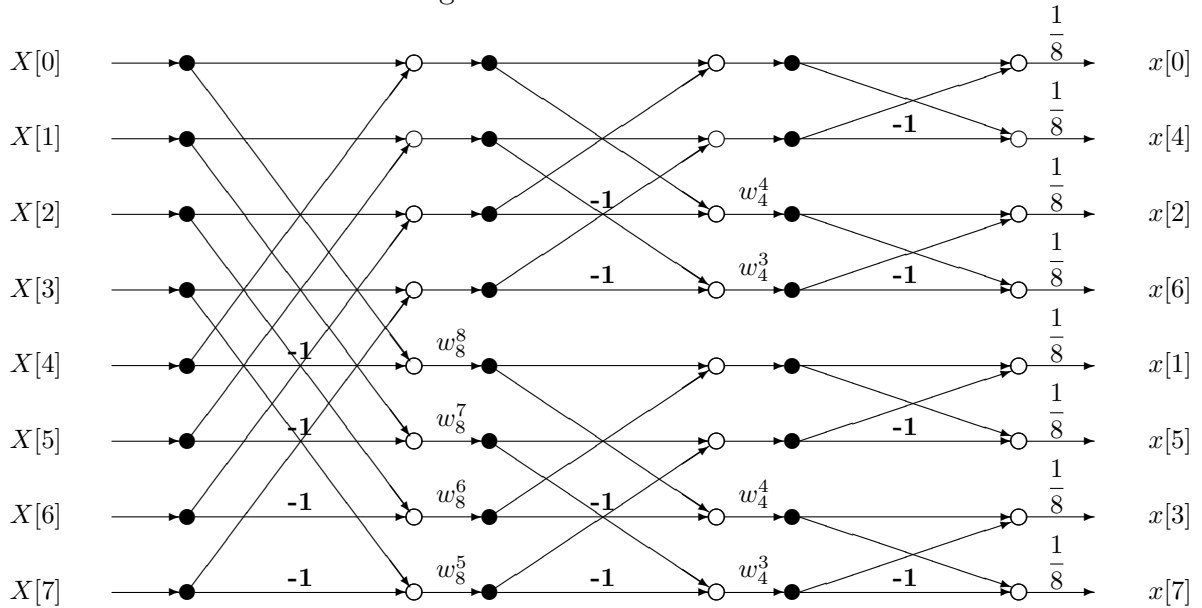


Figura 15: Schema de calcul aferentă Algoritmului de tip FFT utilizat pentru determinarea valorilor ITFD, în cazul unui semnal de durată finită egală cu  $N = 2^3 = 8$ .

Tot Teorema 7.1 poate fi utilizată și pentru a proiecta alte forme alternative ale algoritmului de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului în frecvență, plecînd de la formele alternative din capitolul precedent.

## 8 Algoritmi de tip FFT pentru semnale cu durată compozită

### 8.1 Principiul general

În capitolele anterioare, am pus în evidență faptul că algoritmi de tip FFT devin extrem de eficienți dacă durata semnalului de intrare este o putere a lui 2. Mai mult, am indicat și o modalitate de "completare/trunchiere" a acestei durate pînă la cea mai apropiată putere a lui 2, dacă această restricție nu este satisfăcută. Reamintim că, totuși, această modificare a duratei originale atrage după sine introducerea unei erori de metodă în calculul TFD cu ajutorul unui algoritm de tip FFT. Această eroare poate fi inacceptabilă în anumite aplicații, unde este necesar ca precizia de determinare a spectrului semnalului de intrare să fie ridicată. De aceea, o altă categorie de algoritmi de tip FFT a fost definită, durata semnalului fiind, în acest caz, cea originală, nu neapărat o putere a lui 2, categorie pe care o vom descrie în acest capitol.

Durata unui semnal este un număr natural  $N$ , care se poate descompune în factori primi:

$$N = P_1 P_2 \cdots P_L . \quad (59)$$

Aici,  $P_1, \dots, P_L$  sînt numere prime nu neapărat distincte între ele. Datorită acestei exprimări, se mai spune că  $N$  este un *număr compozit*, iar secvența a cărei durată este chiar  $N$  se numește și *secvență cu durată compozită*.

Dacă notăm cu  $Q_1 \stackrel{\text{not}}{=} P_2 \cdots P_L$ , atunci  $N = P_1 Q_1$  și secvența inițială  $x \in \mathcal{S}_{dN}$  se poate segmenta în  $P_1$  semnale avînd fiecare durată egală cu  $Q_1$ :

- semnalul 1:  $\{x[0], x[P_1], \dots, x[(Q_1 - 1)P_1]\};$
- semnalul 2:  $\{x[1], x[P_1 + 1], \dots, x[(Q_1 - 1)P_1 + 1]\};$
- $\vdots$
- semnalul  $P_1$ :  $\{x[P_1 - 1], x[2P_1 - 1], \dots, x[Q_1 P_1 - 1]\}.$

În aceste condiții,  $X \stackrel{\text{not}}{=} TFD(x)$  se exprimă astfel:

$$\begin{aligned} X[k] &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{P_1 Q_1 - 1} x[n] w_{P_1 Q_1}^{nk} = \sum_{p=0}^{P_1 - 1} \sum_{q=0}^{Q_1 - 1} x[qP_1 + p] w_{P_1 Q_1}^{k(qP_1 + p)} = \\ &= \sum_{p=0}^{P_1 - 1} w_{P_1 Q_1}^{pk} \sum_{q=0}^{Q_1 - 1} x[qP_1 + p] w_{Q_1}^{qk} = \sum_{p=0}^{P_1 - 1} w_{P_1 Q_1}^{pk} G_p[k \% Q_1] , \quad \forall k \in \overline{0, P_1 Q_1 - 1} , \end{aligned} \quad (60)$$

unde:

$$G_p[k] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{q=0}^{Q_1 - 1} x[qP_1 + p] w_{Q_1}^{qk} , \quad \forall k \in \overline{0, Q_1 - 1} , \quad \forall p \in \overline{0, P_1 - 1} .$$

Practic  $TFD(x)$  a fost exprimată ca o sumă ponderată de alte TFD de dimensiuni mai mici, relația (60) constituind o generalizare a lui (38).

Procedeul poate continua pentru fiecare dintre cele  $P_1$  TFD (" $G_p$ "), exprimînd  $Q_1 = P_2 Q_2$ , apoi  $Q_2 = P_3 Q_3$ , etc. În final,  $Q_{L-1} = P_L$  și vor fi puse în evidență tot  $L$  trepte de calcul ca în cazul categoriilor de algoritmi de tip FFT descrise în capitolele precedente, numai că, aici, intrarea fiecărei trepte este segmentată eventual în mod diferit de intrările celorlalte trepte. Formula teoretică de calcul a TFD este, în acest caz, următoarea:

$$X[k] = \sum_{p_1=0}^{P_1-1} w_N^{p_1 k} \sum_{p_2=0}^{P_2-1} w_{Q_1}^{p_2 k} \cdots \sum_{p_{L-1}=0}^{P_{L-1}-1} w_{Q_{L-2}}^{p_{L-1} k} G_{p_1 p_2 \cdots p_{L-1}}[k \% P_L] , \quad \forall k \in \overline{0, N - 1} , \quad (61)$$

unde:

$$G_{p_1 p_2 \dots p_{L-1}}[k] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p_L=0}^{P_L-1} x [p_L P_1 \dots P_{L-1} + p_{L-1} P_1 \dots P_{L-2} + \dots + p_2 P_1 + p_1] w_{P_L}^{p_L k},$$

$$\forall k \in \overline{0, P_L - 1}.$$

## 8.2 Evaluarea complexității

Pentru a evalua efortul de calcul implicat de implementarea formulei (61), vom apela la un procedeu inductiv în raport cu numărul de factori primi,  $L$ . Să considerăm, pentru început, că  $L = 2$  (deci  $Q_1 = P_2$ ) și că valorile oricărei TFD de durată  $P_2$  au fost evaluate cu un efort de calcul notat prin  $\mathcal{O}[P_2]$ . Atunci formula (61) coincide cu formula (60). În acest caz, pentru fiecare  $k \in \overline{0, N-1}$ , sînt necesare  $(P_1 - 1)$  înmulțiri complexe (înmulțirea cu  $w_N^0$  nu este luată în considerare în această sumă) și  $(P_1 - 1)$  adunări complexe, ceea ce revine la  $4(P_1 - 1)$  înmulțiri reale și  $4(P_1 - 1)$  adunări reale. În total:

$$\mathcal{O}[N] = [4N(P_1 - 1)]_{\bullet} + [4N(P_1 - 1)]_+ + P_1 \mathcal{O}\left[\frac{N}{P_1}\right].$$

Dacă  $L = 3$ , atunci formula de mai sus devine:

$$\mathcal{O}[N] = [4N(P_1 + P_2 - 2)]_{\bullet} + [4N(P_1 + P_2 - 2)]_+ + P_1 P_2 \mathcal{O}\left[\frac{N}{P_1 P_2}\right].$$

În general, pentru  $L \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , se poate scrie că:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}[N] &= [4N(P_1 + P_2 + \dots + P_{L-1} - (L - 1))]_{\bullet} + [4N(P_1 + P_2 + \dots + P_{L-1} - (L - 1))]_+ + \\ &+ P_1 P_2 \dots P_{L-1} \mathcal{O}[P_L]. \end{aligned}$$

Dacă  $N$  este un număr prim, atunci vom considera că:

$$\mathcal{O}[N] = [4N^2]_{\bullet} + [4N^2 - 2N]_+,$$

așa cum am arătat în Capitolul 4 (vezi relația (30)). Cum  $P_L$  est un număr prim, numărul total de operații pentru algoritmul de tip FFT asociat secvențelor compozite este următorul:

$$\mathcal{O}[N] = [4N(P_1 + P_2 + \dots + P_L - L) + 4N]_{\bullet} + [4N(P_1 + P_2 + \dots + P_L - L) + 2N]_+. \quad (62)$$

Dependența directă a numărului total de operații de cantitatea  $N(P_1 + P_2 + \dots + P_L - L)$  arată că, pentru a obține o eficiență ridicată, este necesar ca numărul de factori,  $L$ , să fie cît mai mare. De aici, s-a ajuns la exprimarea în factori primi, care este optimă. Însă, din punct de vedere formal, nu se observă nici un avantaj în alegerea unei combinații de factori în favoarea alteia.

În cazul particular cînd  $N = P^L$ , numărul total de operații devine eval cu:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}[N] &= [4NL(P - 1) + 4N]_{\bullet} + [4NL(P - 1) + 2N]_+ = \\ &= [4N(P - 1) \log_P N + 4N]_{\bullet} + [4N(P - 1) \log_P N + 2N]_+. \end{aligned}$$

## 8.3 Exemple

Modul de lucru al unui algoritm de tip FFT destinat secvențelor cu durată compozită poate fi mai bine înțeles în cadrul cîtorva exemple sugestive. Vom analiza în continuare două cazuri des întîlnite în practică: unul în care durata semnalului este un multiplu de 3 și altul în care ea este un multiplu de 4.

### 8.3.1 Cazul duratei divizibile cu 3

Fie  $x \in \mathcal{S}_{d3M}$ . În acest caz, formula de calcul a  $TFD_{3M}(x)$  este următoarea:

$$X[k] = \sum_{p=0}^2 w_{3M}^{pk} \sum_{q=0}^{M-1} x[3q+p] w_M^{qk} = \sum_{p=0}^2 w_{3M}^{pk} G_p[k \% M], \quad \forall k \in \overline{0, 3M-1},$$

unde:

$$G_p[k] \stackrel{def}{=} \sum_{q=0}^{M-1} x[3q+p] w_M^{qk}, \quad \forall k \in \overline{0, M-1}, \quad \forall p \in \overline{0, 2}.$$

Schema de calcul asociată ultimei trepte a algoritmului de tip FFT bazat pe implementarea formulelor de mai sus este ilustrată în Figura 16 (stînga). Aici,  $k \in \overline{0, M-1}$ .

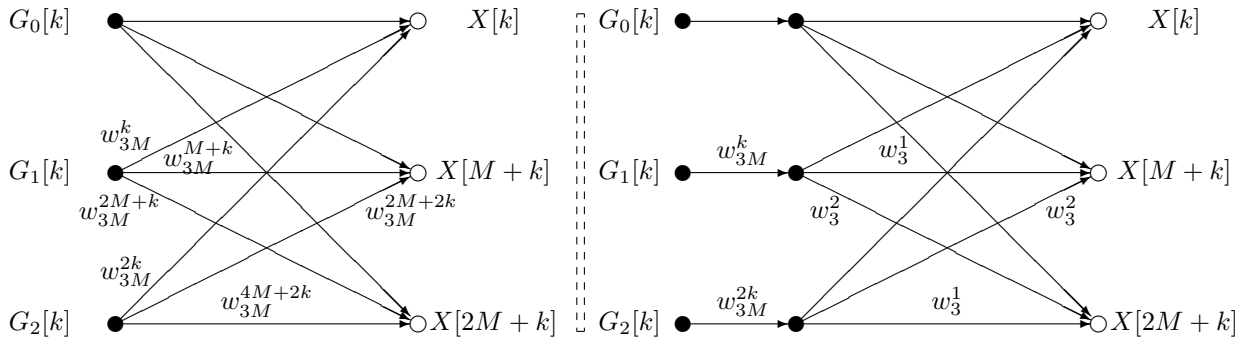


Figura 16: Două scheme de calcul echivalente, asociate ultimei trepte a unui algoritm de tip FFT pentru secvențe cu durată compozită divizibilă cu 3.

Această schemă poate fi optimizată, dacă se ține cont că multiplicatorii  $w_{3M}^k$  și  $w_{3M}^{2k}$  pot fi izolați pe ramuri distincte, înainte de intrarea în procesul de calcul efectiv. Totodată, este evident că:

$$w_{3M}^M = w_3^1; \quad w_{3M}^{2M} = w_3^2; \quad w_{3M}^{4M} = w_3^1,$$

fapt care conduce la schema echivalentă din Figura 16 (dreapta).

Această schemă este optimizată, de aceea vom efectua asupra ei analiza complexității de calcul. Astfel, pentru fiecare  $k \in \overline{0, M-1}$ , sînt necesare 6 înmulțiri complexe și 6 adunări complexe. Aceasta revine la 24 de înmulțiri reale și 24 de adunări reale. Dacă  $\mathcal{O}[M]$  este numărul de operații necesar pentru a implementa calculul unei  $TFD_M$ , atunci numărul total de operații al algoritmului de mai sus este următorul:

$$\mathcal{O}[3M] = [24M]_{\bullet} + [24M]_{+} + 3\mathcal{O}[M].$$

Dacă secvența de intrare are durată de forma  $N = 3^L$ , atunci:

$$\mathcal{O}[N] = [8N \log_3 N]_{\bullet} + [8N \log_3 N]_{+}.$$

### 8.3.2 Cazul duratei divizibile cu 4

Să considerăm acum că  $x \in \mathcal{S}_{d4M}$ . Atunci o formulă de calcul a  $TFD_{4M}(x)$  este următoarea:

$$X[k] = \sum_{p=0}^3 w_{4M}^{pk} \sum_{q=0}^{M-1} x[4q+p] w_M^{qk} = \sum_{p=0}^3 w_{4M}^{pk} G_p[k \% M], \quad \forall k \in \overline{0, 4M-1},$$

unde:

$$G_p[k] \stackrel{def}{=} \sum_{q=0}^{M-1} x[4q+p] w_M^{qk}, \quad \forall k \in \overline{0, M-1}, \quad \forall p \in \overline{0, 3}.$$

Această relație de calcul nu este unică, evident. În Capitolele 6 și 7 am prezentat încă două variante de calcul. Studiind acest exemplu, vom vedea, însă, că, uneori, este mai eficient să nu se realizeze o descompunere a duratei compozite pînă la factorii primi, mai ales în cazul factorilor cu multiplicități supraunitare.

Ținînd cont de valorile extrem de speciale ale rădăcinilor de ordin 4 ale unității,  $TFD_{4M}$  se poate exprima astfel, pentru fiecare  $k \in \overline{0, M-1}$ :

$$\begin{cases} X[k] &= G_0[k] + w_{4M}^k G_1[k] + w_{4M}^{2k} G_2[k] + w_{4M}^{3k} G_3[k] \\ X[M+k] &= G_0[k] - j w_{4M}^k G_1[k] - w_{4M}^{2k} G_2[k] + j w_{4M}^{3k} G_3[k] \\ X[2M+k] &= G_0[k] - w_{4M}^k G_1[k] + w_{4M}^{2k} G_2[k] - w_{4M}^{3k} G_3[k] \\ X[3M+k] &= G_0[k] + j w_{4M}^k G_1[k] - w_{4M}^{2k} G_2[k] - j w_{4M}^{3k} G_3[k] \end{cases}$$

În consecință, schema de calcul asociată ultimei trepte a algoritmului de tip FFT bazat pe implementarea formulelor de mai sus este ilustrată în Figura 17. Ca de obicei,  $k \in \overline{0, M-1}$ .

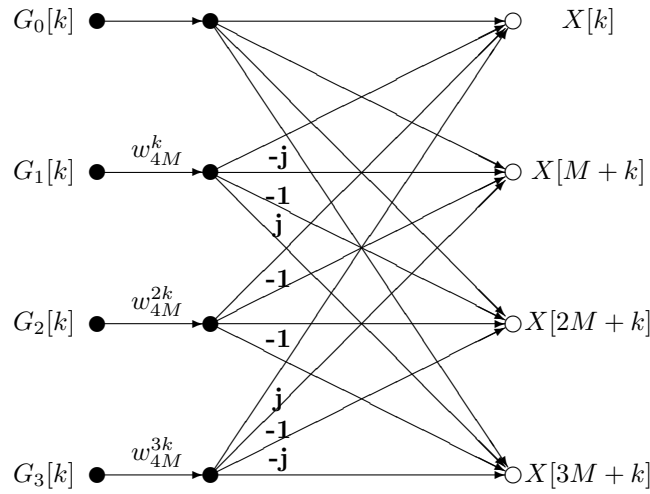


Figura 17: Schema de calcul asociată ultimei trepte a unui algoritmul de tip FFT pentru secvențe cu durată compozită divizibilă cu 4.

Această schemă este direct optimizată, de aceea vom efectua asupra ei analiza complexității de calcul. Pentru aceasta, nu vom mai contoriza înmulțirile cu numerele imaginare  $\pm j$ , deoarece ele sînt echivalente doar cu interschimbări ale părților reale și imaginare, însoțite de eventuale schimbări de semn. Astfel, pentru fiecare  $k \in \overline{0, M-1}$ , sînt necesare doar 3 înmulțiri complexe și 12 adunări complexe. Aceasta revine la 12 înmulțiri reale și 30 de adunări reale. Dacă  $\mathcal{O}[M]$  este numărul de operații necesar pentru a implementa calculul unei  $TFD_M$ , atunci numărul total de operații al algoritmului de mai sus este următorul:

$$\mathcal{O}[4M] = [12M]_{\bullet} + [30M]_{+} + 4\mathcal{O}[M] .$$

Dacă secvența de intrare are durată de forma  $N = 4^L$ , atunci:

$$\mathcal{O}[N] = [6N \log_4 \sqrt{N}]_{\bullet} + [15N \log_4 \sqrt{N}]_{+} .$$

Reamintim că, în cazul utilizării unui algoritmul de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului în timp, cele mai bune performanțe erau măsurate de următoarea relație:

$$\mathcal{O}[N] = [4N \log_2 \sqrt{N}]_{\bullet} + [4N \log_2 \sqrt{N}]_{+} = [8N \log_4 \sqrt{N}]_{\bullet} + [8N \log_4 \sqrt{N}]_{+} .$$

Aceasta arată că, surprinzător, dacă valoarea duratei este exprimată în forma  $N = 4^L$  în loc de  $2^{2L}$ , se obține o scădere cu 25% a numărului de înmulțiri, pe seama unei creșteri de aproape 2 ori a numărului de adunări, fapt care conduce la îmbunătățirea eficienței de calcul. Totul se datorează utilizării rădăcinilor de ordin 4 ale unității și reducerii de 2 ori a numărului treptelor de calcul (de la  $2L$  la  $L$ ).

Din acest exemplu se poate desprinde concluzia că, în cazul duratei de forma  $N = 2^L$ , este mai eficient ca ea să fie exprimată cu ajutorul puterilor lui 4. Astfel, există o unică pereche de numere  $\alpha \in \{0, 1\}$  și  $\beta \in \mathbb{N}$  care verifică relațiile:  $2\beta + \alpha = L$  și  $N = 2^L = 2^\alpha 4^\beta$ . Plecând de la această observație, algoritmul de tip FFT pentru durata  $N$  exprimată în această formă compozită este mai eficient decât cel clasic.

★

Abordarea din perspectiva segmentării semnalului în timp poate fi înlocuită și în cazul duratei compozite cu o abordare bazată pe segmentarea semnalului în frecvență, aceasta constituind un exercițiu util pentru cititor.

Evaluarea TFD utilizând algoritmi de tip FFT pentru secvențe cu durată compozită în locul celor din capitolele precedente, are și avantaje și dezavantaje. Unul dintre avantaje ar fi acela că, în anumite cazuri (cum este și ultimul exemplu de mai sus), eficiența poate fi crescută, fapt care conduce la un timp de calcul mai mic. În schimb, durata compozită poate conduce la indexări extrem de complicate ale vectorilor intermediari, fapt care atrage după sine o creștere a timpului de calcul datorată nu calculelor efective, ci accesărilor la memorie și rearanjărilor datelor. De aceea, alegerea unei variante cât mai eficiente de algoritm de tip FFT va fi efectuată în funcție de structura intimă a duratei secvenței de intrare cu care se operează.

★

Algoritmii de tip FFT prezentați în acest curs sînt extrem de utilizați în aplicațiile practice. În Capitolul 3, am arătat cum ar putea fi utilizat un algoritm de tip FFT în evaluarea valorilor secvențelor de convoluție liniară sau chiar ale Transformatei  $\mathcal{Z}$ . Dar cele mai frecvente astfel de aplicații provin din domeniul Estimării Spectrale ([4]). O serie de exerciții propuse spre rezolvare în anexa următoare ilustrează și mai mult rolul acestor algoritmi în soluționarea unor probleme concrete de Prelucrare Numerică a Semnalelor.



## A Exerciții propuse

### Exercițiul 1

Arătați că operatorii SFD, TFD, ISFD și ITFD sînt liniari.

### Exercițiul 2

1. Dacă  $\tilde{x} \in \mathcal{S}_d^N$  și  $m \in \mathbb{Z}$ , atunci să se arate că:

$$SFD(q^{-m} \tilde{x})[k] = w_N^{mk} SFD(\tilde{x})[k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

2. Dacă fiecare valoare  $\tilde{x}[n]$  a secvenței periodice  $\tilde{x} \in \mathcal{S}_d^N$  este rotită cu unghiul  $-\frac{2mn\pi}{N}$ , atunci să se arate că:

$$SFD(\{w_N^{mn} \tilde{x}[n]\}_{n \in \mathbb{Z}})[k] = SFD(\tilde{x})[k+m] = q^{+m} SFD(\tilde{x})[k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

### Exercițiul 3

Demonstrați proprietățile de simetrie ale SFD, specificate în Tabelul 1 de la pagina 3. Ce devin aceste proprietăți în cazul secvențelor cu valori reale?

### Exercițiul 4

Să se calculeze produsul de convoluție periodică dintre secvențele din Figura 18, unde valorile lui  $\tilde{x}$  și  $\tilde{y}$  sînt redată numai pe perioada principală.

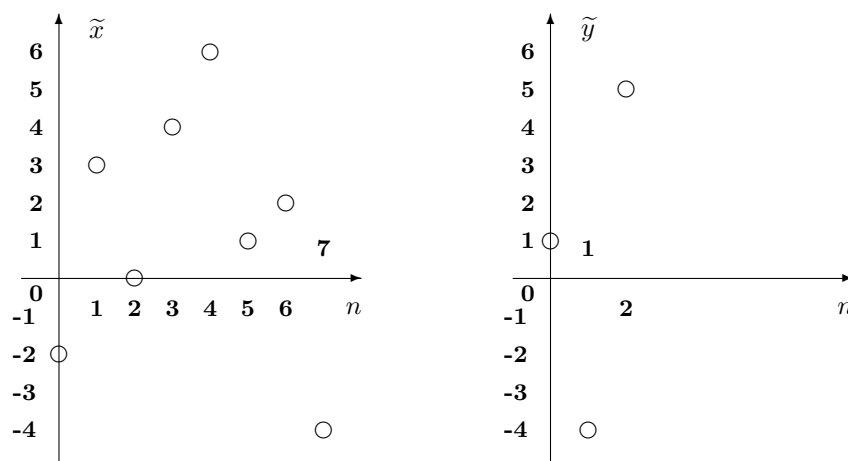


Figura 18: Două secvențe periodice de perioade diferite.

### Exercițiul 5

Să se demonstreze că operația de convoluție periodică (notată prin  $\tilde{\star}$ ) este asociativă și comutativă.

### Exercițiul 6

Să se demonstreze Teorema (directă) de convoluție periodică (Teorema 2.1, de la pagina 4).

### Exercițiul 7

Arătați că  $(\mathcal{S}_d^N, +, \cdot, \tilde{\star})$  este o algebră unitară comutativă, elementul unitar fiind impulsul unitar periodic  $\delta_{N\mathbb{Z}}$ .

### Exercițiul 8

Să se demonstreze proprietățile de deplasare circulară ale operatorului TFD (adică relațiile (18) și (19) de la pagina 9), fără a apela la secvența periodică asociată unui semnal discret de durată finită.

### Exercițiul 9

Demonstrați proprietățile de simetrie ale operatorului TFD, prezentate în Tabelul 2 de la pagina 10. Ce devin aceste proprietăți în cazul secvențelor cu valori reale?

### Exercițiul 10

Calculați produsul de convoluție circulară al secvențelor de durată finită generate de semnalele periodice din Figura 18. Comparați rezultatul cu cel obținut prin evaluarea produsului de convoluție periodică.

### Exercițiul 11

Să se demonstreze că operația de convoluție circulară dintre secvențele discrete de durată finită este asociativă și comutativă.

### Exercițiul 12

Fie  $M$  și  $N$  două numere naturale nenule alese astfel încât  $M > N$ . Arătați că deși  $\mathcal{S}_{dN} \subset \mathcal{S}_{dM}$ , totuși:

$$x \underset{N}{\star} y \neq x \underset{M}{\star} y .$$

### Exercițiul 13

Demonstrați Teoremele de convoluție 3.1 și 3.2 din Capitolul 3.

### Exercițiul 14

Fie un sistem liniar descris de următoarea ecuație cu diferențe:

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} ,$$

unde  $x$  este intrarea,  $y$  este ieșirea, iar  $0 < a < 1$ . Să presupunem că intrarea  $x$  este  $N$ -periodică:  $x \in \mathcal{S}_d^N$  și să o renotăm prin  $\tilde{x}$ . Mai presupunem că sistemul stimulat cu această intrare a atins regimul staționar de funcționare. Să se determine secvența pondere a unui filtru de tip FIR (în funcție de  $a$ ) care are proprietatea că oferă aceeași ieșire  $\tilde{y}$  ca și sistemul de tip IIR de mai sus, atunci când ambele sisteme sînt stimulate cu aceeași intrare  $\tilde{x}$ .

### Exercițiul 15

Fie secvențele periodice din Figura 19, fiecare dintre ele fiind notată cu  $\tilde{x}$ . Se notează, ca de obicei, prin  $\tilde{X}$  imaginea prin SFD a lui  $\tilde{x}$ . Pentru fiecare dintre aceste secvențe, nu este precizată originea timpilor.

1. Pentru care dintre cele 3 secvențe se poate alege convenabil o origine a timpului astfel încât  $\tilde{X}$  să fie reală?
2. Pentru care dintre cele 3 secvențe se poate alege convenabil o origine a timpului astfel încât  $\tilde{X}$  să fie imaginară (cu excepția valorii  $\tilde{X}[0]$ )?
3. Pentru care dintre cele 3 secvențe  $\tilde{X}$  are proprietatea  $\tilde{X}[2k] = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ?

### Exercițiul 16

Fie  $\tilde{x} \in \mathcal{S}_d^N$ . Este evident că  $\tilde{x}$  este și o secvență  $2N$ -periodică. Se notează prin  $\tilde{X}_N$  imaginea prin SFD a lui  $\tilde{x}$ , considerată a fi o secvență  $N$ -periodică. Să se determine  $\tilde{X}_{2N}$  în funcție de  $\tilde{X}_N$ .

### Exercițiul 17

Fie două secvențe periodice  $\tilde{x} \in \mathcal{S}_d^N$  și  $\tilde{y} \in \mathcal{S}_d^M$ , unde  $M, N \in \mathbb{N}^*$ . Se construiește secvența  $\tilde{z} \equiv \tilde{x} + \tilde{y}$ .

1. Să se arate că  $\tilde{z} \in \mathcal{S}_d^{MN}$ .



### Exercițiul 22

Fie un semnal analogic stabil eșantionat cu frecvența  $\nu_0$ . Imaginea prin TCFD a sa este eșantionată, la rîndul ei, cu ajutorul operatorului  $\text{TFD}_N$ . Să se determine distanța în frecvență dintre două eșantioane succesive ale eșantioanelor TCFD astfel calculate. Caz particular:  $\nu_0 = 10 \text{ kHz}$  și  $N = 1024$ .

### Exercițiul 23

Se știe că imaginea prin TFD a unei secvențe de durată finită  $x \in \mathcal{S}_{dN}$  coincide cu eșantioanele Transformatei  $\mathcal{Z}$  a lui  $x$  ( $\mathcal{Z}(x) \stackrel{\text{not}}{=} X$ ), calculate în puncte echidistante ale cercului unitar. Folosind această proprietate, se cere să se arate cum poate fi modificată secvența  $x$  astfel încît imaginea prin TFD a noii secvențe să coincidă cu următoarele eșantioane ale Transformatei  $\mathcal{Z}$ , calculate în puncte echidistante ale cercului de rază 0.5, centrat în origine:

$$\left\{ X \left( \frac{1}{2} e^{\frac{2k+1}{10} \pi j} \right) \right\}_{k=0, 10} .$$

### Exercițiul 24

Fie  $x \in l^1(\mathbb{Z})$  o secvență stabilă de durată infinită, a cărei Transformată  $\mathcal{Z}$  este de forma:

$$X(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} , \quad \forall |z| > \frac{1}{3} .$$

Să se determine o secvență de durată finită  $y \in \mathcal{S}_{dN}$  a cărei imagine prin operatorul  $\text{TFD}_N$  are următoarea proprietate:

$$Y[k] = X(z)|_{z=e^{\frac{2k\pi}{N}j}} , \quad \forall k \in \overline{0, N-1} .$$

### Exercițiul 25

Fie  $x_a$  un semnal analogic stabil de bandă limitată, inclusă în intervalul  $[-2\pi 10^4, +2\pi 10^4]$ .

Se eșantionează acest semnal cu perioada  $T = \frac{10^{-3}}{16}$ , obținîndu-se semnalul  $x \in \mathcal{S}_{d1000}$ , a cărei imagine prin operatorul TFD are următoarele proprietăți speciale:  $X[420] = 5$  și  $X[999] = 1$ . Folosind aceste date, să se determine cît mai multe valori ale TCFC  $\widehat{x_a}$  în banda  $(-2\pi 10^4, +2\pi 10^4)$ .

### Exercițiul 26

Fie  $x, y \in \mathcal{S}_{dN}$ . Se notează cu  $X(\cdot)$  Transformata  $\mathcal{Z}$  a lui  $x$  și cu  $Y[\cdot]$  imaginea prin TFD a lui  $y$ . Dacă  $X$  și  $Y$  sînt legate prin următoarea relație:

$$Y[k] = X(z)|_{z=\frac{1}{3} e^{\frac{2k+1}{N} \pi j}} , \quad \forall k \in \overline{0, N-1} ,$$

să se determine legătura care există între secvențele  $x$  și  $y$ .

### Exercițiul 27

Fie  $X$  imaginea prin TFD a secvenței  $x \in \mathcal{S}_{dN}$ .

1. Dacă  $x[n] = -x[N-1-n]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , să se arate că  $X[0] = 0$ .
2. Arătați că dacă  $N$  este un număr par și  $x[n] = x[N-1-n]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , atunci  $X\left[\frac{N}{2}\right] = 0$ .

### Exercițiul 28

Să se evalueze imaginea prin TFD a imaginii prin TFD a unei secvențe de durată finită.

### Exercițiul 29

Să se demonstreze următorul principiu de conservare a energiei (de tip Parseval) relativ la secvențele de durată finită:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |TFD(x)[k]|^2 .$$

### Exercițiul 30

Fie  $x \in \mathcal{S}_{dN}$  și  $x_{ep}$ ,  $x_{op}$  componentele sale simetric periodică, respectiv antisimetric periodică (definite în secțiunea 3.3). Se mai notează prin  $x_e$ ,  $x_o$  componentele simetric conjugată, respectiv antisimetric conjugată ale lui  $x$  (definite în [8]).

1. Demonstrați că  $x_{ep}$  și  $x_{op}$  se pot construi folosind numai  $x_e$ , respectiv numai  $x_o$ :

$$\begin{cases} x_{ep}[n] &= \mathcal{R}_N[n] (x_e[n] + x_e[n - N]) = \mathcal{R}_N[n] \frac{x[n] + \overline{x[-n]} + x[n - N] + \overline{x[N - n]}}{2} \\ x_{op}[n] &= \mathcal{R}_N[n] (x_o[n] + x_o[n - N]) = \mathcal{R}_N[n] \frac{x[n] - \overline{x[-n]} + x[n - N] - \overline{x[N - n]}}{2} \end{cases}$$

(unde  $n \in \mathbb{Z}$ ).

2. Arătați că, în general,  $x_e$  nu poate fi construită cunoscând numai  $x_{ep}$ , iar  $x_o$  nu poate fi construită cunoscând numai  $x_{op}$ . Demonstrați că acest lucru ar fi totuși posibil dacă s-ar opera în contextul spațiului  $\mathcal{S}_{d2N}$  în loc de  $\mathcal{S}_{dN}$ .

### Exercițiul 31

Fie  $x$  o secvență de durată finită a cărei imagine prin operatorul  $TFD_8$  este ilustrată în Figura 21. Plecînd de la  $x$ , se construiește o nouă secvență de durată egală cu 16, prin:

$$y \equiv x \uparrow 2 ,$$

unde " $\uparrow M$ " este operația de interpolare cu  $M$  zerouri. Să se evalueze  $TFD_{16}(y)$ .

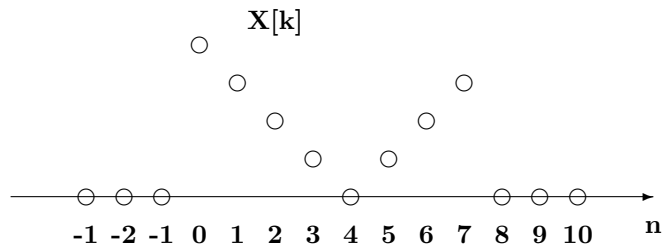


Figura 21: *Imaginea prin operatorul  $TFD_8$  a unei secvențe de durată finită.*

### Exercițiul 32

Fie secvențele discrete:

$$x[n] \stackrel{def}{=} u_0[n] - u_0[n - 8] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \& \quad y[n] \stackrel{def}{=} \delta_0[n] + \frac{1}{2} \delta_0[n - 3] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} ,$$

unde  $u_0$  este treapta unitară discretă. Să se calculeze secvența:

$$z \equiv x \star y .$$

### Exercițiul 33

Fie un filtru de tip FIR, avînd secvența pondere  $h$  de durată egală cu 15. Să presupunem că filtrul este stimulat cu o intrare  $x$  tot de durată finită, dar egală cu 25. Pentru a evalua ieșirea sistemului,  $y \equiv x \star h$ , se propune următoarea procedură de calcul:

**Pas 1:** Se definesc următoarele semnale din  $\mathcal{S}_{d20}$ :

$$x_1 \equiv x \cdot \mathcal{R}_{20} \quad \& \quad x_2 \equiv (q^{+10} x) \cdot \mathcal{R}_{20} \quad .$$

**Pas 2:** Se calculează  $X_i \stackrel{def}{=} TFD_{20}(x_i)$  ( $i \in \{1, 2\}$ ).

**Pas 3:** Se calculează  $H \stackrel{def}{=} TFD_{20}(h)$ .

**Pas 4:** Se calculează  $Y_i \stackrel{def}{=} X_i \cdot H$  ( $i \in \{1, 2\}$ ).

**Pas 5:** Se calculează  $y_i \stackrel{def}{=} ITFD_{20}(Y_i)$  ( $i \in \{1, 2\}$ ).

**Pas 6:** Se construiește  $y$  din  $y_1$  și  $y_2$ .

Poate fi reconstruit perfect  $y$  utilizînd această procedură? Dacă da, descrieți cum. Dacă nu, determinați care dintre valorile lui  $y$  pot fi calculate exact folosind  $y_1$  și  $y_2$ .

### Exercițiul 34

Fie  $P$  și  $Q$  două polinoame de grad  $N$ , respectiv  $M$ , avînd coeficienți din corpul numerelor complexe. Să se imagineze o procedură de calcul a coeficienților polinomului produs  $R \equiv PQ$ , care să apeleze numai la operatorii TFD și ITFD.

### Exercițiul 35

Fie  $f$  un semnal  $P$ -periodic, continuu, cu valori reale și de bandă limitată. Seria Fourier complexă asociată acestuia este finită:

$$f(t) = \sum_{m=-M}^M a_m e^{\frac{2\pi m}{P} t j} , \quad \forall t \in \mathbb{R} ,$$

iar coeficientul  $a_M$  este real.

Se eșantionează  $f$  cu perioada  $T_1 = \frac{P}{2M}$ , obținîndu-se secvența discretă  $\tilde{x}_1$ , care este  $2M$ -periodică. Fie  $x_1 \equiv \tilde{x}_1 \mathcal{R}_{2M}$  și  $X_1 \equiv TFD_{2M}(x_1)$ .

Se repetă algoritmul de mai sus pentru o perioadă de eșantionare de două ori mai mică:

$T_2 = \frac{P}{4M}$ , obținîndu-se secvențele  $\tilde{x}_2 \in \mathcal{S}_d^{4M}$ ,  $x_2, X_2 \in \mathcal{S}_{d4M}$ .

Să se arate cum se poate obține în mod direct  $X_2$  utilizînd numai valorile lui  $X_1$ .

### Exercițiul 36

Fie  $x$  o secvență de durată infinită a cărei Transformată  $\mathcal{Z}$  este notată prin  $X(\cdot)$  și  $y$  o secvență de durată finită egală cu  $N$ , a cărei imagine prin operatorul  $TFD_N$  este  $Y[\cdot]$ . Să se determine relația care există între  $x$  și  $y$  dacă:

$$Y[k] = X(z)|_{z=w_N^{-k}} , \quad \forall k \in \overline{0, N-1} ,$$

unde  $w_N \stackrel{def}{=} e^{-\frac{2\pi}{N} j}$ .

### Exercițiul 37

Fie  $x[n] \stackrel{def}{=} \frac{1}{2^n} u_0[n]$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , unde  $u_0$  este treapta unitară discretă. Se notează prin  $X(e^{j\omega})$  imaginea prin TCFD a acestei secvențe. Să se determine semnalul de durată finită  $y \in \mathcal{S}_{d10}$  a cărei imagine prin  $TFD_{10}$  are următoarea proprietate:

$$Y[k] = X\left(e^{\frac{k\pi}{5} j}\right) , \quad \forall k \in \overline{0, 9} .$$

### Exercițiul 38

Fie un filtru de tip IIR cauzal și stabil ale cărui intrare și ieșire verifică următoarea ecuație cu diferențe:

$$y[n] = \sum_{k=1}^K a_k y[n-k] + x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dorim să determinăm  $N$  eșantioane în frecvență ale răspunsului în frecvență al filtrului ( $H$ ), calculate în rădăcinile de ordin  $N$  ale unității, utilizând un operator  $\text{TFD}_N$ . O posibilitate este sugerată de exercițiul anterior, dar ea necesită evaluarea explicită a secvenței pondere. De aceea, se poate imagina o soluție mai simplă.

1. Presupunând că  $N > K$ , arătați cum se pot calcula cele  $N$  eșantioane ale lui  $H$  utilizând numai coeficienții ecuației cu diferențe și un  $\text{TFD}_N$  (prin intermediul câtorva calcule elementare).
2. Se poate generaliza acest rezultat la clasa sistemelor liniare descrise de o ecuație cu diferențe de forma:

$$y[n] = \sum_{p=1}^P a_p y[n-p] + \sum_{q=1}^Q b_q x[n-q], \quad \forall n \in \mathbb{Z} ?$$

Justificați răspunsul.

### Exercițiul 39

Fie  $x \in \mathcal{S}_{dN}$  și  $M < N$ . Dorim să calculăm valorile Transformatei  $\mathcal{Z}$  ale lui  $x$  în cele  $M$  rădăcini de ordin  $M$  ale unității. Să se indice (și să se justifice) o procedură de calcul în care să intervină o singură  $\text{TFD}_M$  aplicată unei secvențe  $y$  obținute din  $x$  printr-un artificiu adecvat.

### Exercițiul 40

Fie  $x \in \mathcal{S}_{d8}$  și  $y \in \mathcal{S}_{d20}$ . Se calculează secvența:

$$r \equiv \text{ITFD}_{20}(\text{TFD}_{20}(x) \cdot \text{TFD}_{20}(y)) .$$

Să se determine care dintre valorile lui  $r$  corespund unor valori ale secvenței  $x \star y$ .

### Exercițiul 41

Se inițiază o procedură de filtrare a unui șir foarte lung de date cu ajutorul unui filtru de tip FIR a cărui secvență pondere are durată egală cu 50. Tehnica utilizată este *prin salvarea suprapunerilor* (descrisă în secțiunea 3.6).

Pentru aceasta, este necesar ca secvența de date să fie segmentată, iar segmentele să se suprapună peste  $V$  eșantioane. Filtrînd fiecare segment, este suficient să se calculeze ieșirea în numai  $M$  puncte, celelalte fiind deja calculate din filtrarea segmentului anterior.

Să presupunem că fiecare segment are 100 de eșantioane și că dimensiunea TFD de lucru este de 128.

1. Să se determine  $V$  și  $M$ .
2. Să se determine indexul de început și de sfîrșit al celor  $M$  puncte.

### Exercițiul 42

Fie  $x \in \mathcal{S}_{d8}$  o secvență discretă oarecare. La pagina 34, am enunțat Teorema 7.1, care relevă dualitatea dintre algoritmii de tip FFT bazați pe segmentarea semnalului în timp și cei bazați pe segmentarea semnalului în frecvență. Folosind acest rezultat, să se traseze schemele de calcul corespunzătoare următoarelor forme alternative ale algoritmului de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului  $x$  în frecvență:

- Algoritmul Cooley-Tuckey;
- Algoritmul avînd intrările și ieșirile ordonate normal;
- Algoritmul lui Singleton.

### Exercițiul 43

Fie  $x \in \mathcal{S}_{d18}$  o secvență avînd durata compozită. Să se descrie schema de calcul a unui algoritm de tip FFT adecvat, eventual în formă optimizată. (Justificați rezultatul.)

### Exercițiul 44

Să se reia exercițiul anterior pentru o secvență  $x \in \mathcal{S}_{d20}$ .

### Exercițiul 45

Fie  $x \in \mathcal{S}_{dN}$ . În Capitolul 5, am prezentat Algoritmul lui Goertzel destinat calculului TFD asociate lui  $x$  (notată cu  $X$ ), fără a implementa direct formula de definiție. În acel context, am folosit faptul că  $w_N^{-Nk} = 1$ .

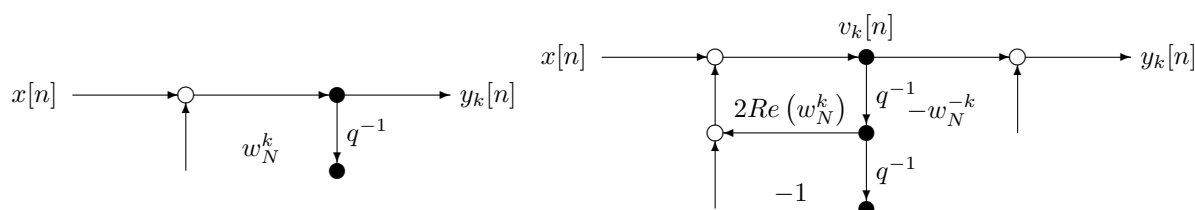


Figura 22: Două scheme de calcul aferente variantei modificate a Algoritmului lui Goertzel.

1. Utilizînd faptul că  $w_N^{Nk} = 1$ , să se arate că valoarea  $X[N-k]$  poate fi obținută utilizînd soluția după  $N$  iterații a unei ecuații cu diferențe a cărei schemă de calcul este ilustrată în partea stîngă a Figurii 22. (Adică se cere să se arate că  $X[N-k] = y_k[N]$ , pentru orice  $k \in \overline{0, N-1}$ .)
2. Arătați că  $X[N-k]$  este egal și cu ieșirea după  $N$  iterații a schemei de calcul din partea dreaptă a acestei figuri.

### Exercițiul 46

Implementarea eficientă a unui Algoritm de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului în timp presupune utilizarea unității elementare de calcul de tip "fluture" din Figura 23 (vezi și Capitolul 6).

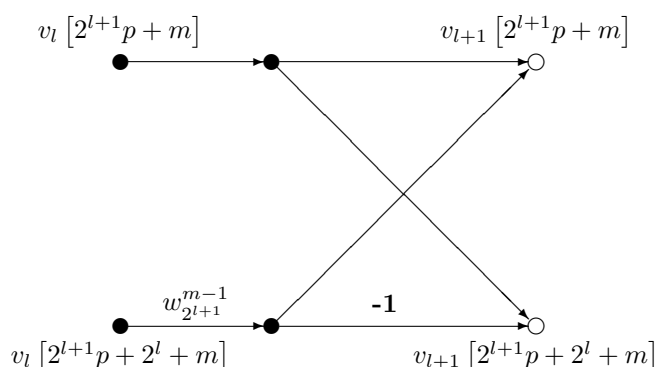


Figura 23: Unitatea elementară de calcul de tip "fluture" care conduce la implementarea eficientă a unui Algoritm de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului în timp.

1. Arătați că dacă se impun restricțiile:

$$\left| v_l [2^{l+1}p + m] \right| < \frac{1}{2} \quad \& \quad \left| v_l [2^{l+1}p + 2^l + m] \right| < \frac{1}{2} \quad ,$$

atunci se poate evita eroarea de tip ”depășire în virgulă mobilă” (ieșirea din intervalul  $(-1, 1)$ ) în cazul implementării acestei scheme de calcul. Practic, trebuie arătat că:

$$\left| \operatorname{Re} \left\{ v_{l+1} [2^{l+1}p + m] \right\} \right| < \frac{1}{2} \quad ; \quad \left| \operatorname{Re} \left\{ v_{l+1} [2^{l+1}p + 2^l + m] \right\} \right| < \frac{1}{2} \quad ;$$

$$\left| \operatorname{Im} \left\{ v_{l+1} [2^{l+1}p + m] \right\} \right| < \frac{1}{2} \quad ; \quad \left| \operatorname{Im} \left\{ v_{l+1} [2^{l+1}p + 2^l + m] \right\} \right| < \frac{1}{2} \quad .$$

2. În practică, este mult mai simplu și mai convenabil să se impună condițiile următoare:

$$\left| \operatorname{Re} \left\{ v_l [2^{l+1}p + m] \right\} \right| < \frac{1}{2} \quad ; \quad \left| \operatorname{Re} \left\{ v_l [2^{l+1}p + 2^l + m] \right\} \right| < \frac{1}{2} \quad ;$$

$$\left| \operatorname{Im} \left\{ v_l [2^{l+1}p + m] \right\} \right| < \frac{1}{2} \quad ; \quad \left| \operatorname{Im} \left\{ v_l [2^{l+1}p + 2^l + m] \right\} \right| < \frac{1}{2} \quad .$$

Sînt aceste condiții suficiente pentru a asigura că eroarea de depășire în virgulă mobilă nu poate să apară? Justificați răspunsul.

### Exercițiul 47

Verificați dacă schemele de calcul din Figurile 24 și 25 sînt echivalente. (Ele descriu două SLID cauzale.)

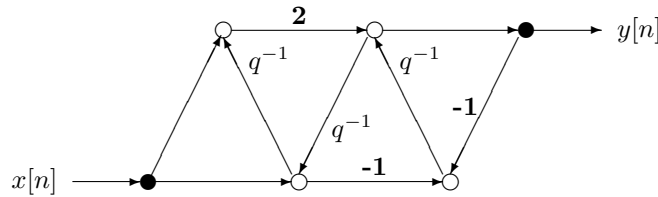


Figura 24: Schema de calcul nr. 1.

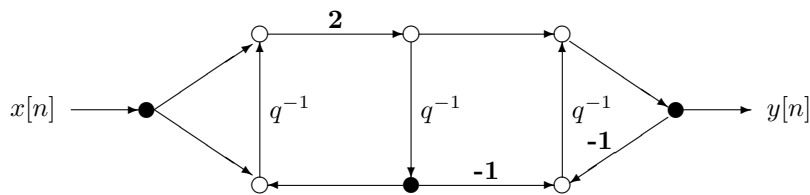


Figura 25: Schema de calcul nr. 2.

### Exercițiul 48

1. Să se scrie cîte un program în una din versiunile limbajului C, care să realizeze calculul TFD prin metoda segmentării în **timp** a semnalului de intrare, în cazul utilizării formei de bază și a celor 3 forme alternative prezentate în Capitolul 6 (4 programe , în total). Se vor accepta semnale cu maxim 1024 eşantioane și se va lua în considerare faptul că durata semnalului de intrare nu este în mod necesar o putere a lui 2 (deci semnalul va trebui completat/trunchiat pînă ce durata sa devine egală cu cea mai apropiată putere a lui 2).

2. Să se repete punctul precedent, dar cu 4 programe dezvoltate în mediul de programare MATLAB, care să aibă proprietatea de a utiliza cât mai puține referiri la elemente de vector sau de matrici (deoarece acestea sînt mari consumatoare de timp de calcul).
3. Să se implementeze cele 8 programe pe un mijloc automat de calcul și să se compare performanțele lor în cazul utilizării aceleiași secvențe de intrare.

### Exercițiul 49

1. Să se scrie cîte un program în una din versiunile limbajului C, care să realizeze calculul TFD prin metoda segmentării în **frecvență** a semnalului de intrare, în cazul utilizării formei de bază și a celor 3 forme alternative prezentate în Capitolul 7 (4 programe în total). Se vor accepta semnale cu maxim 1024 eșantioane și se va lua în considerare faptul că durata semnalului de intrare nu este în mod necesar o putere a lui 2 (deci semnalul va trebui completat/trunchiat pînă ce durata sa devine egală cu cea mai apropiată putere a lui 2).
2. Să se repete punctul precedent, dar cu 4 programe dezvoltate în mediul de programare MATLAB, care să aibă proprietatea de a utiliza cât mai puține referiri la elemente de vector sau de matrici (deoarece acestea sînt mari consumatoare de timp de calcul).
3. Să se implementeze cele 8 programe pe un mijloc automat de calcul și să se compare performanțele lor în cazul utilizării aceleiași secvențe de intrare.

### Exercițiul 50

Să se indice schema de calcul a unui algoritm de tip FFT bazat pe segmentarea în timp a semnalului, dacă acesta are durata egală cu  $9 = 3 \times 3$ . Să se evalueze efortul de calcul.

### Exercițiul 51

Să se indice schema de calcul a unui algoritm de tip FFT bazat pe segmentarea în frecvență a semnalului, dacă acesta are durata egală cu  $16 = 4 \times 4$ . Să se evalueze efortul de calcul.

### Exercițiul 52

Să se indice schemele de calcul ale algoritmilor de tip FFT bazați pe segmentarea în timp a semnalului, dacă acesta are durata egală cu  $12 = 3 \times 4 = 4 \times 3$ . Să se evalueze efortul de calcul în fiecare din cele două cazuri.

### Exercițiul 53

Fie  $x \in \mathcal{S}_{d16}$ . Să se realizeze o comparație între eficiența unui algoritm de tip FFT bazat pe segmentarea semnalului în timp și cea a unui algoritm de tip FFT destinat prelucrării secvențelor cu durata compozită, în care  $16 = 4 \times 4$ . (Comparația se va realiza în termeni de număr total de operații reale efectuate. Se va ține cont că înmulțirea unui număr complex cu  $\pm j$  nu conduce, practic, la înmulțiri reale.)

### Exercițiul 54

Fie  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{S}_{dN}$  patru secvențe reale avînd proprietățile următoare:

- $x_1$  și  $x_2$  sînt simetrice în cadrul suportului, adică:

$$x_i[n] = x_i[(N - n) \% N] \mathcal{R}_N[n], \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

- $x_3$  și  $x_4$  sînt antisimetrice în cadrul suportului, adică:

$$x_i[n] = -x_i[(N - n) \% N] \mathcal{R}_N[n], \quad \forall i \in \{3, 4\}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(Aici,  $\mathcal{R}_N$  reprezintă fereastra dreptunghiulară unitară discretă.) Vom nota cu  $X_i$  imaginea prin  $TFD_N$  a secvenței  $x_i$ , unde  $i \in \overline{1, 4}$ .

1. Definim următoarele secvențe discrete:

$$y_1 \stackrel{def}{=} x_1 + x_3 \quad \& \quad Y_1 \stackrel{def}{=} TFD_N(y_1) .$$

Să se arate că  $y_1$  este o secvență cu valori reale. Cum pot fi recuperate secvențele  $X_1$  și  $X_3$  folosind numai valorile secvenței  $Y_1$ ?

2. Definim alte două secvențe discrete ca mai jos:

$$y_2 \stackrel{def}{=} x_2 + x_4 \quad \& \quad Y_2 \stackrel{def}{=} TFD_N(y_2) .$$

Să se arate că și  $y_2$  este o secvență cu valori reale.

3. Dacă:

$$y_3 \stackrel{def}{=} y_1 + j y_2 \quad \& \quad Y_3 \stackrel{def}{=} TFD_N(y_3) ,$$

atunci, folosind rezultatele de la punctul 1., să se arate cum pot fi recuperate secvențele  $X_1, X_2, X_3$  și  $X_4$  folosind numai valorile secvenței  $Y_3$ .

- Acest exercițiu arată cum pot fi calculate simultan imaginile prin TFD a 4 secvențe reale, dacă două dintre ele sînt simetrice și celelalte două sînt antisimetrice.

### Exercițiul 55

Fie  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{S}_{dN}$  patru secvențe reale simetrice în cadrul suportului lor:

$$x_i[n] = x_i[(N-n)\%N] \mathcal{R}_N[n] , \quad \forall i \in \overline{1,4}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

(Aici,  $\mathcal{R}_N$  reprezintă fereastra dreptunghiulară unitară discretă.) Vom nota cu  $X_i$  imaginea prin  $TFD_N$  a secvenței  $x_i$ , unde  $i \in \overline{1,4}$ .

1. Să se arate că secvența:

$$u_3[n] \stackrel{def}{=} (x_3[(n+1)\%N] - x_3[(n-1)\%N]) \mathcal{R}_N[n] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

este antisimetrică, în sensul că:

$$u_3[n] = -u_3[(N-n)\%N] \mathcal{R}_N[n] , \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

2. Fie  $U_3$  imaginea prin TFD a secvenței  $u_3$  de mai sus. Să se exprime  $U_3$  numai cu ajutorul lui  $X_3$ .
3. Definim secvențele următoare:

$$\left[ \begin{array}{l} u_3[n] \stackrel{def}{=} (x_3[(n+1)\%N] - x_3[(n-1)\%N]) \mathcal{R}_N[n] \\ u_4[n] \stackrel{def}{=} (x_4[(n+1)\%N] - x_4[(n-1)\%N]) \mathcal{R}_N[n] \\ v_1[n] \stackrel{def}{=} x_1[n] + u_3[n] \\ v_2[n] \stackrel{def}{=} x_2[n] + u_4[n] \\ y[n] \stackrel{def}{=} v_1[n] + j v_2[n] \end{array} \right. , \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Ca de obicei, vom nota cu majuscule imaginile prin TFD ale acestor semnale discrete de durată  $N$ . Să se arate cum pot fi recuperate secvențele  $X_1, X_2, X_3$  și  $X_4$  folosind numai valorile secvenței  $Y$ . (De remarcat, totuși, că, dacă  $N = 2M$ , nu se pot obține:  $X_3[0], X_4[0], X_3[M]$  și  $X_4[M]$ .)

4. Ne situăm în contextul punctului precedent, unde  $N = 2M$ . Arătați că valorile:  $X_3[0], X_4[0], X_3[M]$  și  $X_4[M]$  pot fi obținute pe altă cale, fără a utiliza înmulțiri.

## Exercițiul 56

În calculul valorilor TFD aplicate unei secvențe reale este posibilă reducerea efortului de calcul utilizând tocmai faptul că secvența este reală. Acest exercițiu va ilustra în ce fel se poate obține aceasta.

1. Fie  $x \in \mathcal{S}_{dN}$  o secvență avînd numai valori reale și  $X$  imaginea prin  $TFD_N$  a acesteia. Se mai notează prin  $X_R$  și  $X_I$  partea reală, respectiv partea imaginară a lui  $X$ . Arătați că  $X_R$  este o secvență simetrică (pară), iar  $X_I$  – o secvență antisimetrică (impară) în raport cu suportul:

$$\begin{cases} X_R[n] = X_R[(N-n)\%N] \mathcal{R}_N[n] \\ X_I[n] = -X_I[(N-n)\%N] \mathcal{R}_N[n] \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(Aici,  $\mathcal{R}_N$  reprezintă fereastra dreptunghiulară unitară discretă.)

2. Fie  $x_1, x_2 \in \mathcal{S}_{dN}$  două secvențe cu valori reale și:

$$y \stackrel{\text{def}}{=} x_1 + j x_2.$$

Vom nota cu majuscule imaginile prin TFD ale secvențelor de mai sus și vom prelua și notațiile de la punctul precedent. Mai notăm prin:  $Y_{Po}$  și  $Y_{Pe}$  partea impară, respectiv partea pară a secvenței  $Y_P$ , unde  $P \in \{R, I\}$ . Să se determine  $X_1$  și  $X_2$  în funcție de  $\{Y_{Pp}\}_{P \in \{R, I\}, p \in \{o, e\}}$ .

Rezultatul de mai sus poate fi utilizat în mai multe feluri. O posibilitate ar fi aceea de a evalua simultan imaginile prin TFD a două secvențe reale și, apoi, de a separa cele două imagini folosind formulele obținute mai sus. O altă posibilitate este aceea de a segmenta secvența reală în 2 secvențe de durată mai mică și de a apela la algoritmul anterior pentru a determina valorile TFD ale acesteia, așa cum este propus la punctul următor.

3. Să presupunem că  $x \in \mathcal{S}_{d2M}$  este tot o secvență cu valori reale și să definim secvențele:  $x_1[n] \stackrel{\text{def}}{=} x[2n]$ ,  $x_2[n] \stackrel{\text{def}}{=} x[2n+1]$ ,  $\forall n \in \overline{0, M-1}$ . Să se determine  $X \stackrel{\text{def}}{=} TFD_{2M}(x)$  în funcție de  $X_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} TFD_M(x_{1,2})$ .

## Exercițiul 57

Fie  $x \in \mathcal{S}_{dM}$  și  $X$  Transformata  $\mathcal{Z}$  a sa, definită prin:

$$X(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{M-1} x[m] z^{-m}, \quad \forall z \in \mathcal{C}^*.$$

Dorim să evaluăm valorile lui  $X$  în punctele situate pe cercul unitar, care se identifică cu rădăcinile de ordin  $N$  ale unității,  $\{w_N^n\}_{n \in \overline{0, N-1}}$ . Să se arate cum poate fi utilizat operatorul  $TFD_N$  pentru a obține acest rezultat întâi în cazul în care  $N \leq M$  și apoi în cazul în care  $N > M$ .

- Acest exercițiu arată cum pot fi utilizați algoritmi de tip FFT în evaluarea unor valori ale Transformatei  $\mathcal{Z}$  în puncte de pe cercul unitar diferite de cele de eșantionare clasice.

## Exercițiul 58

Se notează prin  $X(e^{j\omega})$  imaginea prin TCFD a unei secvențe discrete  $x \in \mathcal{S}_{d10}$ . Dorim să evaluăm valorile lui  $X(e^{j\omega})$  în următoarele pulsații normalizate:

$$\omega_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2k^2\pi}{100}, \quad \forall k \in \overline{0, 9}.$$

Studiați posibilitatea de a realiza aceasta utilizînd:

1. Un algoritm care implementează direct formula de definiție a  $TFD_{10}$ .
2. Algoritmul lui Goertzel în varianta îmbunătățită.

### Exercițiul 59

Fie un sistem stabil de tip IIR avînd funcția pondere continuă,  $h_c$ . Se notează prin  $H_c$  funcția sa de transfer. Dorim să simulăm funcționarea acestui sistem continuu cu ajutorul unui discret, avînd funcția pondere stabilă  $h_d \in l^1(\mathbb{Z})$  și funcția de transfer  $H_d$ . O posibilitate de a determina funcția de transfer discretă din cea continuă este următoarea:

$$H_d(z) \stackrel{\text{def}}{=} H_c(s) \bigg|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}.$$

(Este binecunoscut faptul că transformarea conformă de mai sus conduce la ”discretizarea” funcției de transfer continue.) Evident, din considerente de implementabilitate pe un mijloc automat de calcul, este de dorit ca sistemul discret să fie de tip FIR și nu IIR. Studiați valoarea de adevăr a următoarei afirmații:

*Sistemul discret astfel obținut nu poate fi de tip FIR.*

(Răspunsul se va justifica fie prin demonstrarea afirmației, dacă ea este adevărată, fie prin construcția unui contraexemplu, dacă ea este falsă.)

### Exercițiul 60 (Algoritmul lui L.I. Bluestein).

În [1], L.I. Bluestein propune un algoritm de calcul al valorilor TFD asociate unei secvențe de durată finită exprimată ca un pătrat perfect:  $N = M^2$ . În acest exercițiu, cititorul este invitat să redescopere acest algoritm rezolvînd următoarele puncte:

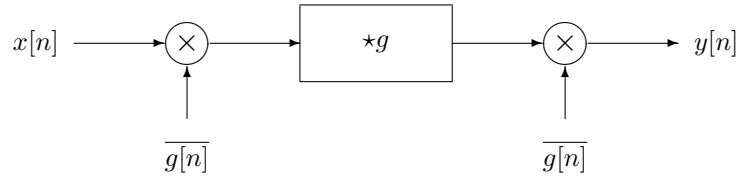


Figura 26: Sistemul aferent pentru calculul valorilor TFD în cazul secvențelor de durată egală cu un pătrat perfect,  $N = M^2$ . (Algoritmul lui Bluestein.)

1. Fie  $x \in \mathcal{S}_{dM^2}$  și  $X \stackrel{\text{def}}{=} TFD_{M^2}(x)$ . Așa cum se cunoaște, definiția lui  $X$  este următoarea:

$$X[k] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{M^2-1} x[n] w_{M^2}^{nk}, \quad \forall k \in \overline{0, M^2-1}.$$

Utilizînd identitatea:

$$nk \equiv \frac{n^2}{2} + \frac{k^2}{2} - \frac{(k-n)^2}{2}, \quad \forall n, k \in \mathbb{Z},$$

să se arate că relația de mai sus se poate exprima cu ajutorul operației de convoluție clasice, în forma:

$$X[k] = \overline{h[k]} \sum_{n=0}^{M^2-1} \left( x[n] \overline{h[n]} \right) h[k-n], \quad \forall k \in \overline{0, M^2-1},$$

unde:

$$h[n] \stackrel{\text{def}}{=} w_{M^2}^{-n^2/2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

2. Arătați că valorile lui  $X$  se pot obține utilizând suma de convoluție de mai sus și în cazul în care  $k \in \overline{M^2, 2M^2 - 1}$ . Trebuie, deci, arătat că:

$$X[k \% M^2] = \overline{h[k]} \sum_{n=0}^{M^2-1} \left( x[n] \overline{h[n]} \right) h[k - n] , \quad \forall k \in \overline{M^2, 2M^2 - 1} .$$

3. Utilizând rezultatul de la punctul precedent, să se arate că valorile lui  $X$  coincid cu ieșirile sistemului din Figura 26, calculate în punctele  $k \in \overline{M^2, 2M^2 - 1}$ . În această figură, secvența pondere  $g$  are durată finită egală cu  $2M^2$  și coincide cu  $h$  în interiorul suportului său.
4. Demonstrați că funcția de transfer a sistemului din Figura 26 se poate exprima astfel:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{M-1} w_{M^2}^{-n^2/2} z^{-n} \frac{1 - z^{-2M^2}}{1 + w_M^{-n} z^{-M}} , \quad \forall z \in \mathcal{A}(g) .$$

(Se va pleca de la definiția Transformatei  $\mathcal{Z}$  și se va utiliza schimbarea de indice:  $k = n + mM$ .)

5. Rezultatul anterior sugerează o realizare recurentă a sistemului din Figura 26. Să se traseze schema de calcul corespunzătoare acestei implementări.
6. Să se evalueze efortul de calcul necesar determinării lui  $X$  cu ajutorul schemei de la punctul anterior și să se compare rezultatul cu cel în care s-ar fi utilizat direct definiția TFD.

## Bibliografie

- [1] **Bluestein L.I.** *A Linear Filtering Approach to the Computation of Discrete Fourier Transform.* I.E.E.E. Transactions on Audio Electroacoustics, AU-18:451–455, December 1970.
- [2] **Cooley J.W., Tukey J.W.** *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series.* Mathematical Computations, 19:297–301, 1965.
- [3] **Goertzel G.** *An Algorithm for the Evaluation of the Finite Trigonometric Series.* American Mathematics Monthly, 65:34–35, January 1958.
- [4] **Oppenheim A.V., Schafer R.** Digital Signal Processing. Prentice Hall, 1985.
- [5] **Singleton R.C.** *A Method for Computing the Fast Fourier Transform with Auxiliary Memory and Limited High-Speed Storage.* I.E.E.E. Transactions on Audio Electroacoustics, AU-15:91–97, June 1967.
- [6] **Singleton R.C.** *An Algorithm for Computing the Mixed Radix Fast Fourier Transform.* I.E.E.E. Transactions on Audio Electroacoustics, AU-17:93–103, June 1969.
- [7] **Ștefănoiu D.** Signal analysis by time-frequency methods. PhD thesis, University "Politehnica" of Bucharest, Dept. of Automatic Control & Computer Science, Romania, April 1995.
- [8] **Ștefănoiu D.** Introducere în Prelucrarea Numerică a Semnalelor. Tipografia Universității "Politehnica", București, România, 1996.