

①② Proprietăți de convoluție ale TF

TFD și convoluția circulară

Operația de convoluție liniară, **deși este bine definită** în spațiul semnalelor de durată finită, rezultatul **nu aparține spațiilor semnalelor convolute**.



$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathcal{S}_{dN} \\ y \in \mathcal{S}_{dM} \end{array} \right\} \Rightarrow (x * y)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] y[n-k] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y_s[k-n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] (q^{-n} y_s)[k] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

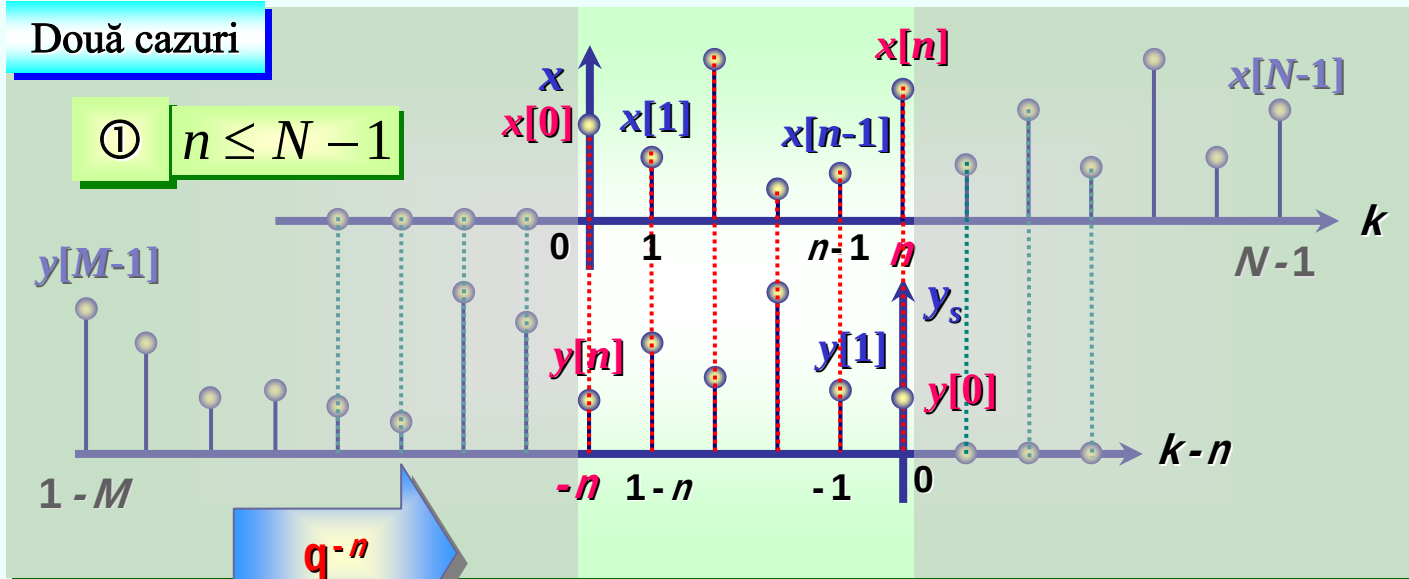
$$\text{Supp}(x * y) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{Supp}(x) \cap \text{Supp}(q^{-n} y_s)$$

$$\text{Supp}(x) = \overline{0, N-1}$$

versiunea
simetrică în oglindă

Două cazuri

① $n \leq N-1$



$$0 \leq n \leq N-1$$



$$\overline{0, N-1}$$

$$\overline{n+1-M, n}$$



$$\text{Supp}(x) \cap \text{Supp}(q^{-n} y_s) \neq \emptyset$$

$$\overline{0, N-1} \cap \overline{n+1-M, n} \neq \emptyset$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} x[k] y_s[k-n] \neq 0$$

q^{-n}
culisare

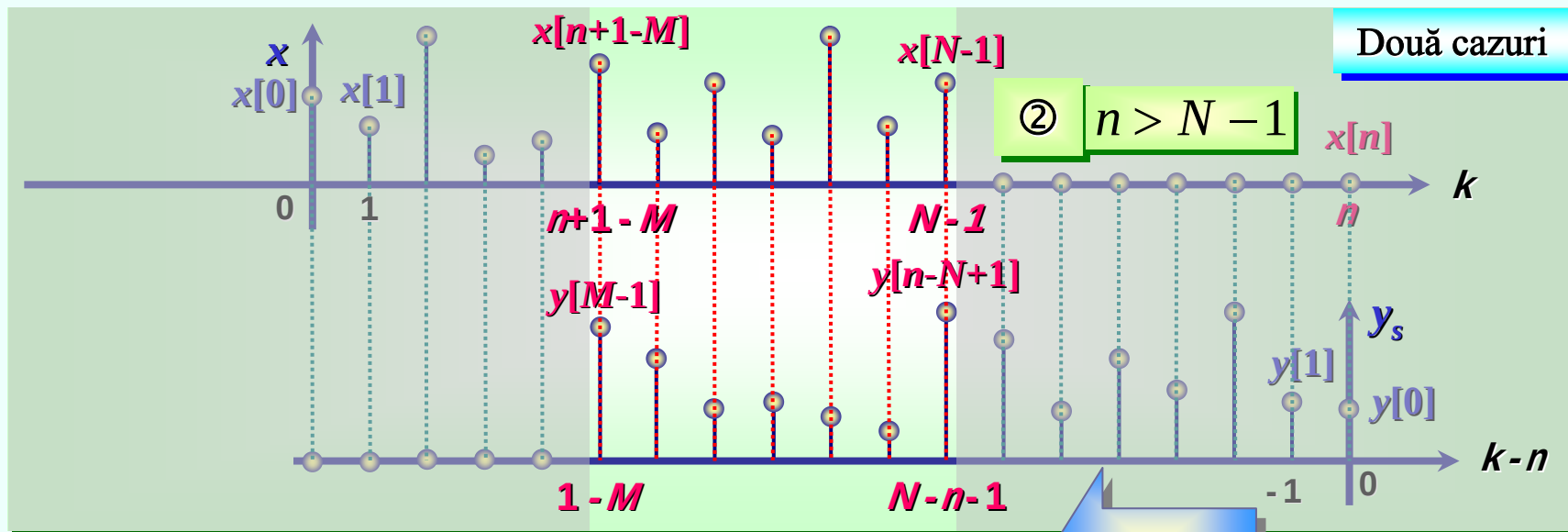
①② Proprietăți de convoluție ale TF

TFD și convoluția circulară (continuare)

$$\text{Supp}(x * y) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{Supp}(x) \cap \text{Supp}(q^{-n} y_s)$$

Două cazuri

② $n > N - 1$



$$\sum_{k=0}^{N-1} x[k] y_s[k-n] \neq 0$$

$$\text{Supp}(x) \cap \text{Supp}(q^{-n} y_s) \neq \emptyset$$

q^{-n}
culisare

$$\overline{0, N-1} \cap \overline{n+1-M, n} \neq \emptyset$$

$$\overline{0, N-1}$$

$$\overline{n+1-M, n}$$

$$N-1 < n \leq M+N-2$$

Așadar

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathcal{S}_{dN} \\ y \in \mathcal{S}_{dM} \end{array} \right\}$$

$$x * y \in \mathcal{S}_{d(M+N-1)}$$

Caz particular

$$x, y \in \mathcal{S}_{dN}$$

$$x * y \in \mathcal{S}_{d(2N-1)}$$

1 2 Proprietăți de convoluție ale TF

TFD și convoluția circulară (continuare)

De ce nu se poate lucra cu operația de convoluție liniară în cazul semnalelor de durată finită?

Se poate lucra cu această operație, dar nu poate fi rezolvată problema convoluției.

$$x \in \mathcal{S}_{dN} \rightarrow TFD_N(x)$$

$$y \in \mathcal{S}_{dM} \rightarrow TFD_M(y)$$

$$x * y \in \mathcal{S}_{d(M+N-1)} \rightarrow TFD_{M+N-1}(x * y)$$

$$TFD_{M+N-1}(x * y) \neq TFD_N(x) \cdot TFD_M(y)$$

Din cauza dimensiunilor diferite ale TF.

Ce se poate face?

Ar trebui definită o nouă operație de convoluție, astfel încât să fie verificată Teorema directă de convoluție ca în cazul TCFD sau SFD.

$$\otimes_N$$

$$\mathcal{S}_{dN}$$

Apoi, noua operație de convoluție, ar trebui exprimată cu ajutorul celei liniare, dacă este posibil.

$$TFD_N\left(x \otimes_N y\right) \equiv TFD_N(x) \cdot TFD_N(y)$$

$$x \otimes_N y \stackrel{\text{def}}{=} ITFD_N(TFD_N(x) \cdot TFD_N(y))$$

1 2 Proprietăți de convoluție ale TF

TFD și convoluția circulară (continuare)



$$x \otimes_N y \stackrel{\text{def}}{=} ITFD_N(TFD_N(x) \cdot TFD_N(y))$$



sumele finite se pot amesteca

$$\begin{aligned} (x \otimes_N y)[n] &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \mathcal{R}_N[n] \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x[m] w_N^{km} \right) \left(\sum_{p=0}^{N-1} y[p] w_N^{kp} \right) \bar{w}_N^{kn} = \frac{1}{N} \mathcal{R}_N[n] \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} x[m] y[p] \left(\sum_{k=0}^{N-1} w_N^{k(m+p-n)} \right) \\ &= \mathcal{R}_N[n] \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} x[m] y[p] \delta_{NZ}[m+p-n] = \mathcal{R}_N[n] \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} x[m] y[(p \% N)] \delta_{NZ}[m+p-n], \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_N^{kn} = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{w}_N^{kn} = N \delta_{NZ}[n] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Relația lui Poisson

$$= p, \quad \forall p \in \overline{0, N-1}$$

- Un raționament similar celui utilizat pentru a defini operația de convoluție periodică implică:

$$(x \otimes_N y)[n] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_N[n] \left(\sum_{m=0}^n x[m] y[n-m] + \sum_{m=n+1}^{N-1} x[m] y[(N+n-m) \% N] \right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Exercițiu

$(n-m) \% N$
periodicitatea argumentului

Convoluția circulară



$$(x \otimes_N y)[n] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_N[n] \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y[(n-k) \% N] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

1 2 Proprietăți de convoluție ale TF

TFD și convoluția circulară (continuare)

Circulară?



Definiția se bazează pe operatorul de **deplasare circulară**.



$$(\odot^{-m} x)[n] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_N[n] x[(n-m)\%N]$$

$\forall m, n \in \mathbb{Z}$



$$(x \otimes_N y)[n] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_N[n] \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y[(n-k)\%N]$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$

$$(x \otimes_N y)[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] (\odot^{-n} y_s)[k]$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$

versiunea
simetrică în oglindă

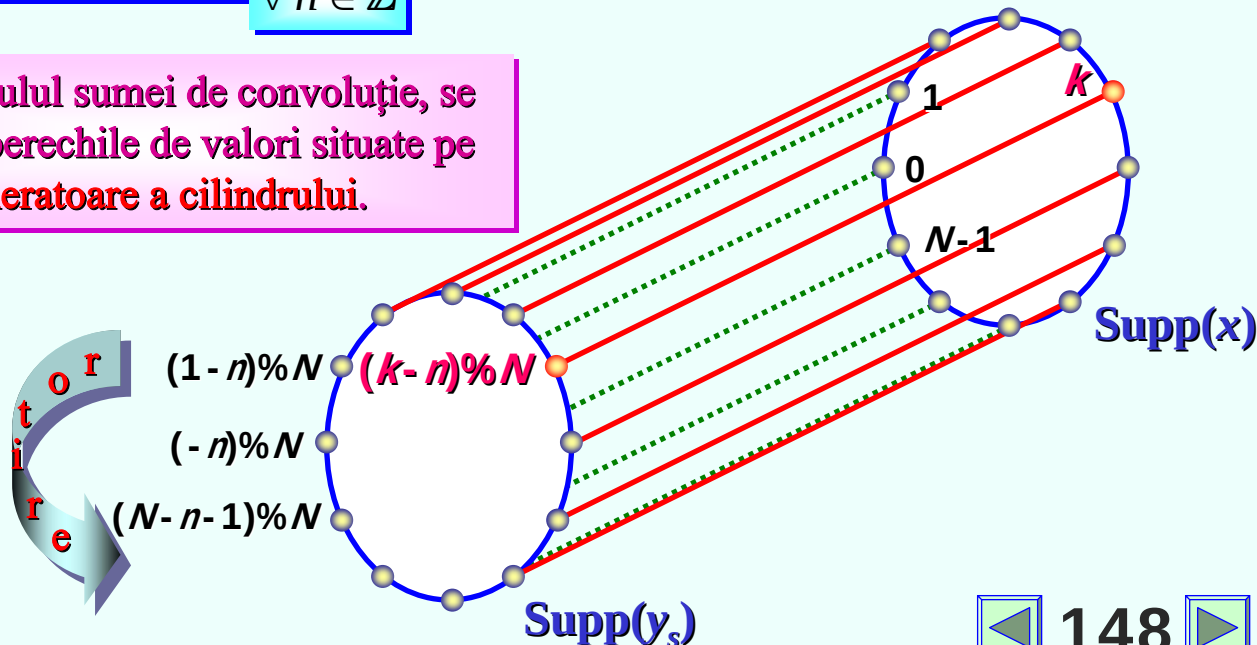
Suporturile celor 2
semnale se repartizează
pe **2 cercuri**.

✎ Pentru calculul sumei de convoluție, se înmulțesc perechile de valori situate pe aceeași generatoare a cilindrului.

$N < M$

$$\mathcal{S}_{dN} \subset \mathcal{S}_{dM}$$

$$(x \otimes_N y) \neq (x \otimes_M y)$$



1 2 Proprietăți de convoluție ale TF

TFD și convoluția circulară (continuare)



Teorema directă de convoluție circulară

$$TFD_N(x \otimes_N y) \equiv TFD_N(x) \cdot TFD_N(y)$$

Demonstrație

Inclusă în definiția convoluției circulare.

Teorema inversă de convoluție circulară

$$TFD_N(x \cdot y) \equiv \frac{1}{N} TFD_N(x) \otimes_N TFD_N(y)$$

Demonstrație

Exercițiu

Totuși, un filtru FIR stimulată de un semnal discret de durată finită răspunde aplicând convoluția liniară...

Corect. Numai că TFD a ieșirii nu se poate evalua decât după aplicarea operației de convoluție.

- Ar fi interesant (și mai eficient) dacă TFD a ieșirii s-ar putea evalua numai cu ajutorul TFD ale intrării și secvenței pondere.
- Se caută o relație directă între operația de convoluție circulară și cea de convoluție liniară.

Convoluția circulară

$$v_N[n] \stackrel{\text{def}}{=} (x \otimes_N y)[n] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_N[n] \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y[(n-k) \% N]$$

$\mathcal{S}_{dN}$

Cum?...

Convoluția liniară

$$v[n] \stackrel{\text{def}}{=} (x * y)[n] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_{2N-1}[n] \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y[n-k]$$

$\mathcal{S}_{d(2N-1)}$

1 2 Proprietăți de convoluție ale TF



TFD, convoluția circulară și convoluția liniară

Se caută o relație biunivocă între semnalele v_N și v .

direct

rezultatul este nenul numai pentru $n \in \overline{0, N-1}$

$$v_N[n] = \overset{\text{def}}{(x \otimes_N y)[n]} = \overset{\text{def}}{\mathcal{R}_N[n] \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[(n-k)\%N]} = \mathcal{R}_N[n] \left(\sum_{k=0}^{\overline{n}} x[k]y[(n-k)\%N] + \sum_{k=n+1}^{N-1} x[k]y[(n-k)\%N] \right)$$

$$= \mathcal{R}_N[n] \left(\sum_{k=0}^n x[k]y[n-k] + \sum_{k=n+1}^{N-1} x[k]y[N+n-k] \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$(n-k)\%N = n-k$$

$$(n-k)\%N = N - (k-n) < 0$$

$$v_N[n] = \mathcal{R}_N[n](v[n] + v[N+n]) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$v_N[n] = \mathcal{R}_N[n] \sum_{p \in \mathbb{Z}} v[n+pN] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Relație de aliere în timp.

corectă datorită
ferestrei dreptunghiulare

În suma de aliere trebuie să rămână un singur termen!

$$v \in \mathcal{S}_{d(2N-1)}$$

$x, y \in \mathcal{S}_{d(2N-1)}$ semnalele convolute
trebuie completate cu zerouri

$$v[n] = \begin{cases} \sum_{k=0}^n x[k]y[n-k] & , n \in \overline{0, N-1} \\ \sum_{k=n-N+1}^{N-1} x[k]y[n-k] & , n \in \overline{N, 2N-2} \\ 0 & , n \in \mathbb{Z} \setminus \overline{0, 2N-2} \end{cases}$$

$$v[N+n] = \sum_{k=n+1}^{N-1} x[k]y[N+n-k] \quad \forall n \in \overline{0, N-1}$$

Așadar

$$x \otimes_{2N-1} y \equiv x * y$$

Exercițiu

1 2 Proprietăți de convoluție ale TF

TFD și convoluția liniară (cazul general)



Teorema directă de convoluție liniară

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathcal{S}_{dN} \\ y \in \mathcal{S}_{dM} \end{array} \right\} \Rightarrow TFD_{M+N-1}(x * y) \equiv TFD_{M+N-1}(x) \cdot TFD_{M+N-1}(y) \equiv TFD_{M+N-1}\left(x \underset{M+N-1}{\otimes} y\right)$$

Demonstrație

Exercițiu

Teorema inversă de convoluție liniară

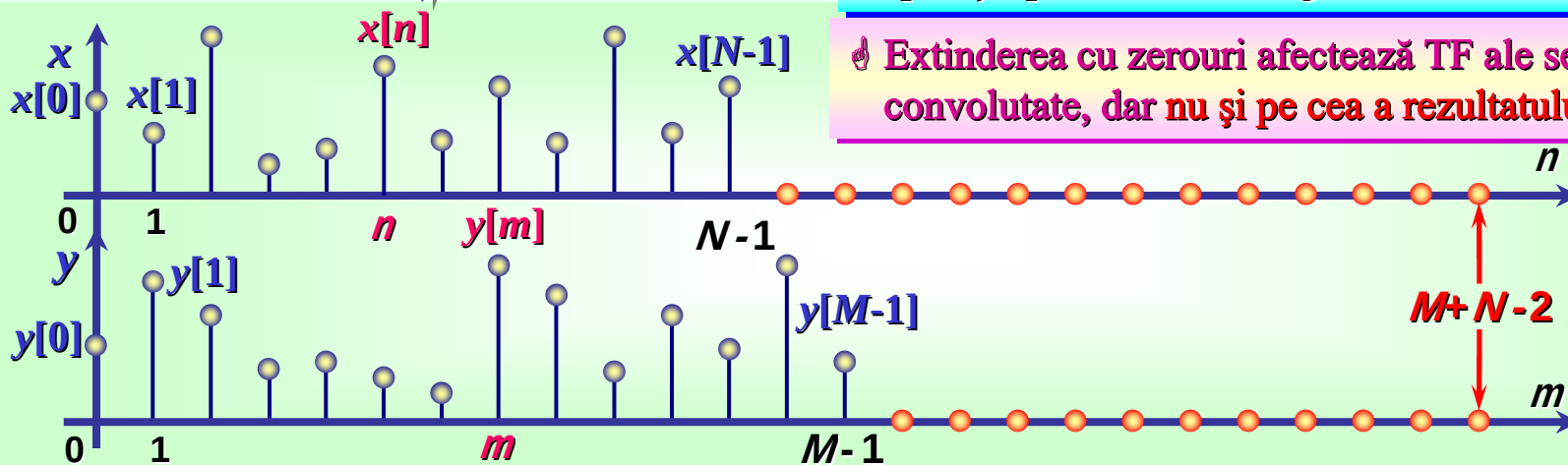
$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathcal{S}_{dN} \\ y \in \mathcal{S}_{dM} \end{array} \right\} \Rightarrow TFD_{M+N-1}(x \cdot y) \equiv \frac{1}{N} TFD_{M+N-1}(x) * TFD_{M+N-1}(y) \equiv \\ \equiv \frac{1}{N} TFD_{M+N-1}(x) \underset{M+N-1}{\otimes} TFD_{M+N-1}(y)$$

Demonstrație

Exercițiu

Operația preliminară obligatorie: **extinderea cu zerouri**.

Extinderea cu zerouri afectează TF ale semnalelor convolute, dar nu și pe cea a rezultatului convoluției.



①② Proprietăți de convoluție ale TF

Consecințe practice ale Teoremei directe de convoluție



Teorema directă de convoluție liniară (TFD)

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathcal{S}_{dN} \\ y \in \mathcal{S}_{dM} \end{array} \right\} \Rightarrow TFD_{M+N-1}(x * y) \equiv TFD_{M+N-1}(x) \cdot TFD_{M+N-1}(y) \equiv TFD_{M+N-1}\left(x \underset{M+N-1}{\otimes} y\right)$$

Este aceasta mai eficientă decât metoda directă de calcul?



$$x * y \equiv ITFD_{M+N-1}\left(TFD_{M+N-1}(x) \cdot TFD_{M+N-1}(y)\right)$$

O altă metodă de calcul al rezultatului unei operații de convoluție.



$$(x * y)[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[n-k]$$

Numărul de operații al definiției.

$$\forall n \in \overline{0, M+N-1}$$

$$\mathcal{O}_*[M, N] = [4N(M+N-1)]_{\bullet} + [(3N-1)(M+N-1)]_{+}$$

Numărul de operații al relației cu TFD.

numărul de înmulțiri reale

numărul de adunări reale

$$\mathcal{O}_{\otimes}[M, N] = ([6(M+N-1)]_{\bullet} + [2(M+N-1)]_{+}) \mathcal{O}_{TFD}[M, N]$$

Efortul de calcul implicat de algoritmi care implementează TFD este superior lui $(M+N-1)$.

Atunci, care este utilitatea convoluției circulare?

**Cipuri DSP,
Procesoare de semnal**

Definiția convoluției liniare nu este implementată hardware, dar evaluarea TFD – DA.



① ③ Algoritmi fundamentali de tip FFT



$$TFD_N(x)[k] \stackrel{\text{def}}{=} X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{nk} \quad \forall n \in 0, N-1$$



Obiectiv

Implementarea eficientă a TFD

👉 **Relația de calcul pe care se fundamentează procesoarele de semnal.**

Efortul de calcul al definiției.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\underbrace{\text{Re}(x[n]) \cos \omega_{nk}^N + \text{Im}(x[n]) \sin \omega_{nk}^N}_{\text{două înmulțiri și o adunare}} + j \sum_{n=0}^{N-1} \left[\underbrace{\text{Im}(x[n]) \cos \omega_{nk}^N - \text{Re}(x[n]) \sin \omega_{nk}^N}_{\text{două înmulțiri și o adunare}} \right] \right] \quad \forall k \in 0, N-1$$

2N înmulțiri și 2N-1 adunări

2N înmulțiri și 2N-1 adunări

Cum poate fi micșorat efortul de calcul?

$$\mathcal{O}_{TFD}[N] = [4N^2]_{\bullet} + [2N(2N-1)]_{+} \sim 4N^2$$

- O ușoară scădere a efortului de calcul se obține prin **contorizarea doar a operațiilor cu operanzi nebanali** (adică pentru $n \neq 0$ și $k \neq 0$).

Prin exploatarea proprietăților armonicelor elementare.

Exercițiu

- O reducere de aproape 2 ori a efortului de calcul se obține pe seama **simetriei/periodicității armonicelor elementare**.

$$w_N^{k(N-n)} = \overline{w_N^{kn}}$$

$$\forall n, k \in 0, N-1$$

①③ Algoritmi fundamentali de tip FFT

- Un algoritm care conduce la o **reducere de 4 ori** a efortului de calcul este bazat pe **Metoda lui (Gerald) Goertzel**, descrisă în cadrul pachetului de laborator **FFT**.

⑤ Algoritmul lui Goertzel
⑤.① Prima variantă de calcul a TFD

• Reprezentare echivalentă a TFD: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w_N^{k(N-n)}, \forall k \in 0, N-1$ $w_N^{4N} = 1$
 $\forall k \in 0, N-1$

Explicarea la momentul N a unui sistem finit

Sumă de convoluție: $(\text{Supp } x = 0, N-1)$

$$y_k[p] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]h_k[p-n] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w_N^{k(N-n)}, \forall p \in 0, N-1$$

$$h_k[p] = w_N^k u_0[p], \forall p \in \mathbb{Z}$$

$$X[k] = y_k[N], \forall k \in 0, N-1$$

• Funcția de transfer a sistemului: $H_k(z) = \sum_{p=0}^{\infty} h_k[p]z^{-p} = \sum_{p=0}^{\infty} (w_N^k z^{-1})^p = \frac{1}{1 - w_N^k z^{-1}}, \forall k \in 0, N-1$ $|z| > 1$

• Funcția recursivă a ieșirii: $y_k[n] - w_N^k y_k[n-1] = x[n], \forall n \in \mathbb{Z}$

• Funcția recursivă a TFD: $y_k[0] = x[0]$
 $y_k[1] = w_N^k y_k[0] + x[1]$
 $\vdots$
 $y_k[N] = w_N^k y_k[N-1] + x[N] = w_N^k y_k[N-1] = X[k]$ $\forall k \in 0, N-1$

5

⑤ Algoritmul lui Goertzel
⑤.② A doua variantă de calcul a TFD (ambunătățită)

• Reprezentare echivalentă compactă recursive simplificată

$$(1 - w_N^k q^{-1})y_k[n] = x[n], \forall n \in 0, N, \forall k \in 0, N-1$$

Transformare simplă cu $(1 - w_N^k q^{-1})$

$$(1 - 2\cos\frac{2k\pi}{N}q^{-1} + q^{-2})y_k[n] = (1 - w_N^k q^{-1})x[n], \forall n \in 0, N, \forall k \in 0, N-1$$

$$y_k[n] = 2y_k[n-1]\cos\frac{2k\pi}{N} - y_k[n-2] + x[n] - w_N^k x[n-1], \forall n \in 0, N, \forall k \in 0, N-1$$

Schemă de calcul

Inițializare: $y_k[-1] = y_k[-2] = 0, \forall k \in 0, N-1$

6

⑤ Algoritmul lui Goertzel
⑤.③ Varianta eficientă de calcul a TFD

Schemă simplificată de calcul se poate transforma echivalent, folosind **Teorema lui THILBERG**.

Algoritmul lui Goertzel

$$y_k[-2] = y_k[-1] = 0$$

$$\vdots$$

$$y_k[n] = 2\cos\frac{2k\pi}{N}y_k[n-1] - y_k[n-2] + x[n]$$

$$\vdots$$

$$y_k[N] = 2\cos\frac{2k\pi}{N}y_k[N-1] - y_k[N-2]$$

$$X[k] = y_k[N] - w_N^k y_k[N-1]$$

$$\forall k \in 0, N-1$$

Număr de operații

$$O[N] = \left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil (2N+5) + [4N(N+1)]_+ - N^2$$

de 4 ori mai mic

7

- Acest algoritm exploatează periodicitatea armonicelor elementare.

👉 Pentru a obține o reducere semnificativă a efortului de calcul, proprietățile armonicelor elementare trebuie combinate cu o aranjare eficientă a datelor.

Algoritmi Fourier rapizi (de tip FFT – Fast Fourier Transform)

Algoritmi bazați pe segmentarea în timp

Algoritmi bazați pe segmentarea în frecvență

Algoritmi cu structură internă variabilă

Algoritmi de tip Singleton (cu structură internă constantă)

Algoritmi Cooley-Tukey

(1965)