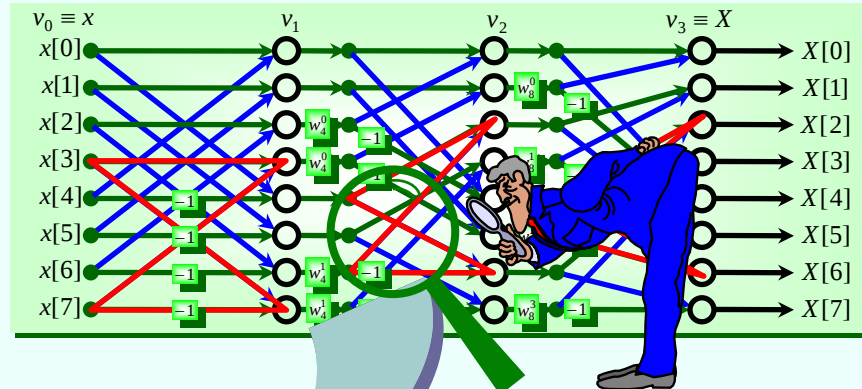
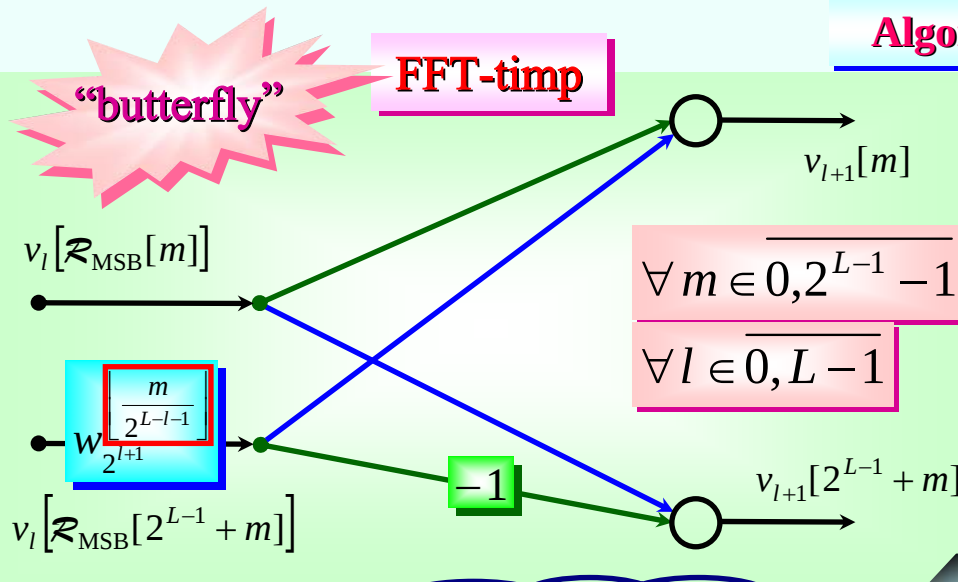


①③ Algoritmi fundamentali de tip FFT

Evitarea reindexării semnalelor de intrare și ieșire (continuare)



Algoritmul fundamental cu structură internă variabilă



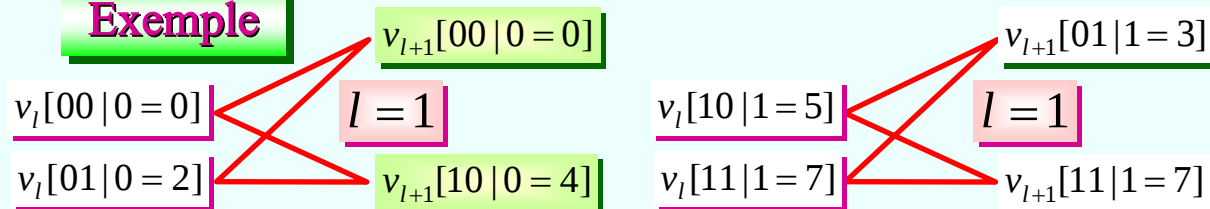
Exponentul armonice elementare pare straniu...

Nu este necesară efectuarea împărțirii întregi.

$$\left\lfloor \frac{m}{2^k} \right\rfloor$$

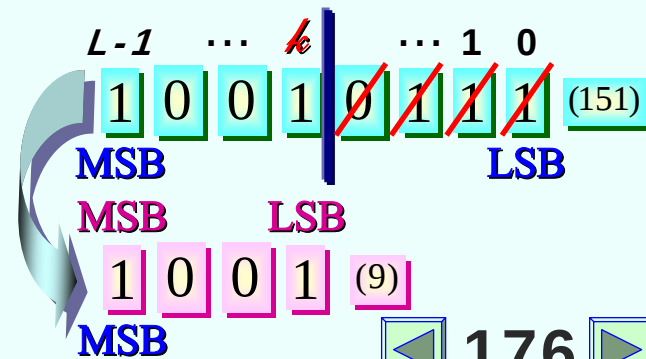
Se rețin toți biții mai semnificativi ai lui m , mai puțin ultimii k .

Exemple



Exercițiu

• Descrieți acest algoritm pentru cazul segmentării în frecvență.



① ③ Algoritmi fundamentali de tip FFT

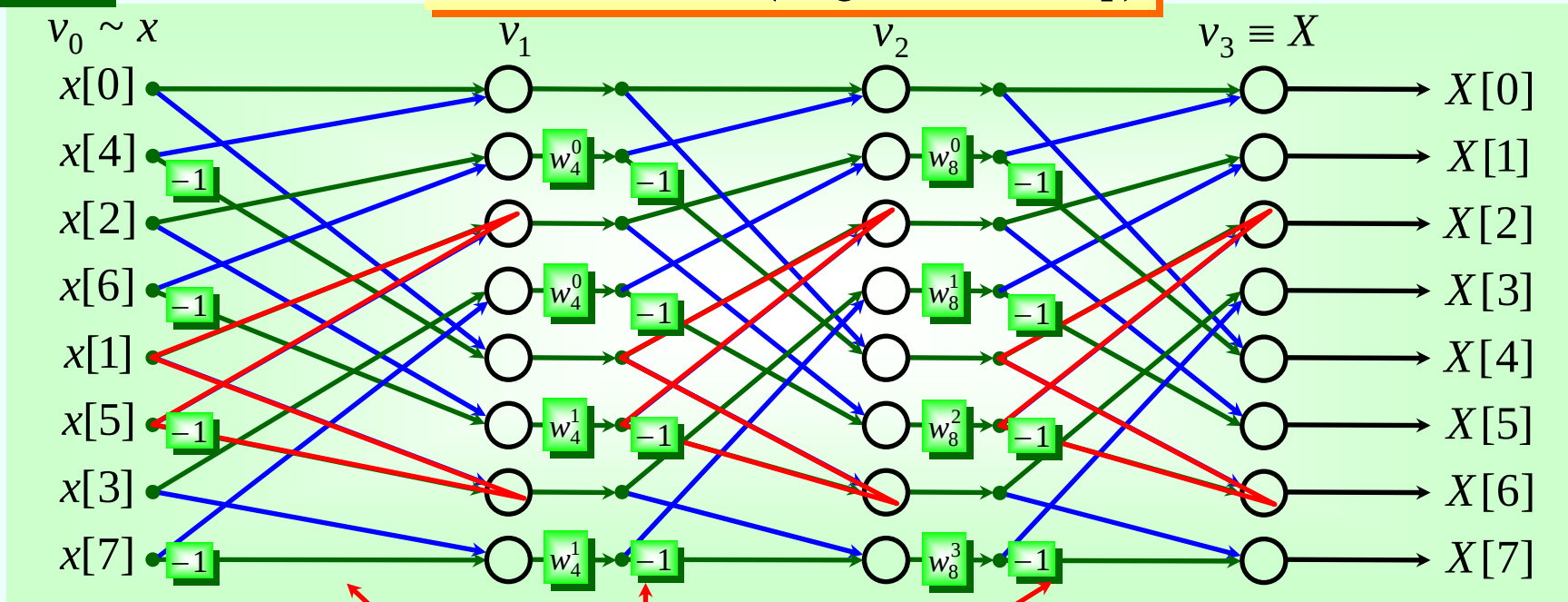
Conservarea structurii blocurilor paralele de calcul

Algoritmul fundamental de tip (R.C.) Singleton

- ➔ Semnalul de intrare v_0 sau semnalul de ieșire v_L se obțin prin rearanjare.
- ➔ Geometria blocurilor paralele de calcul este **deformată, dar constantă**.

Exemplu $N = 8 = 2^3$

Schema de calcul (Singleton FFT-timp)



3 trepte de calcul paralel

Se poate observa geometria deformată, dar constantă de-a lungul treptelor de calcul.

- Algoritmul este extrem de bine adaptat pentru implementări de tip **auto-recursiv**.

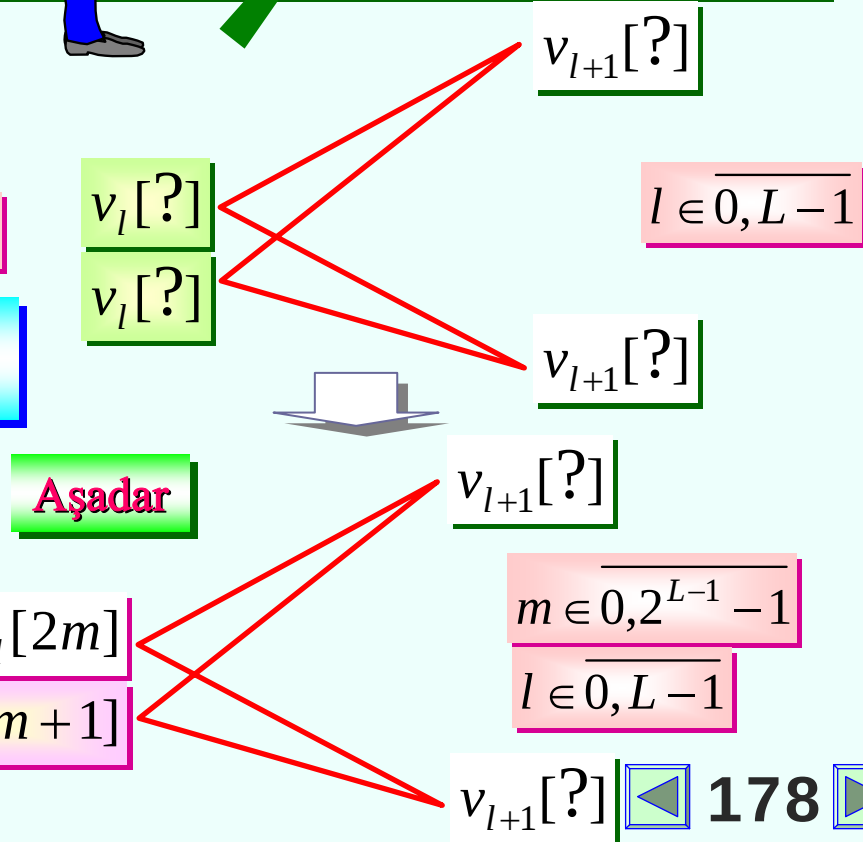
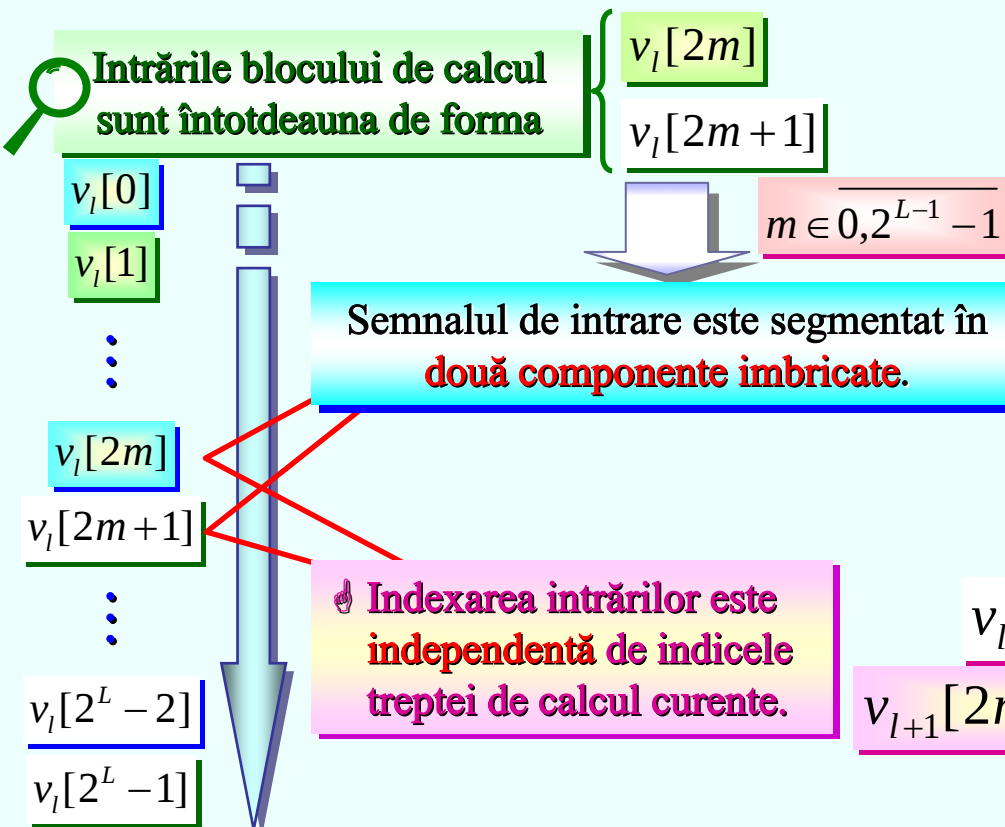
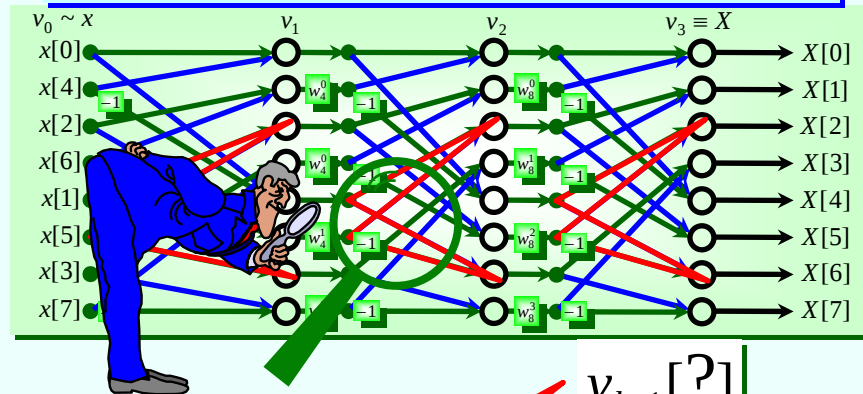
① ③ Algoritmi fundamentali de tip FFT

Conservarea structurii blocurilor paralele de calcul (continuare)

Cum se poate implementa structura constantă de-a lungul treptelor de calcul?

Trebuie analizată cu atenție **indexarea** intrărilor și ieșirilor blocului paralel generic de calcul (de tip “butterfly”).

Algoritmul fundamental de tip Singleton

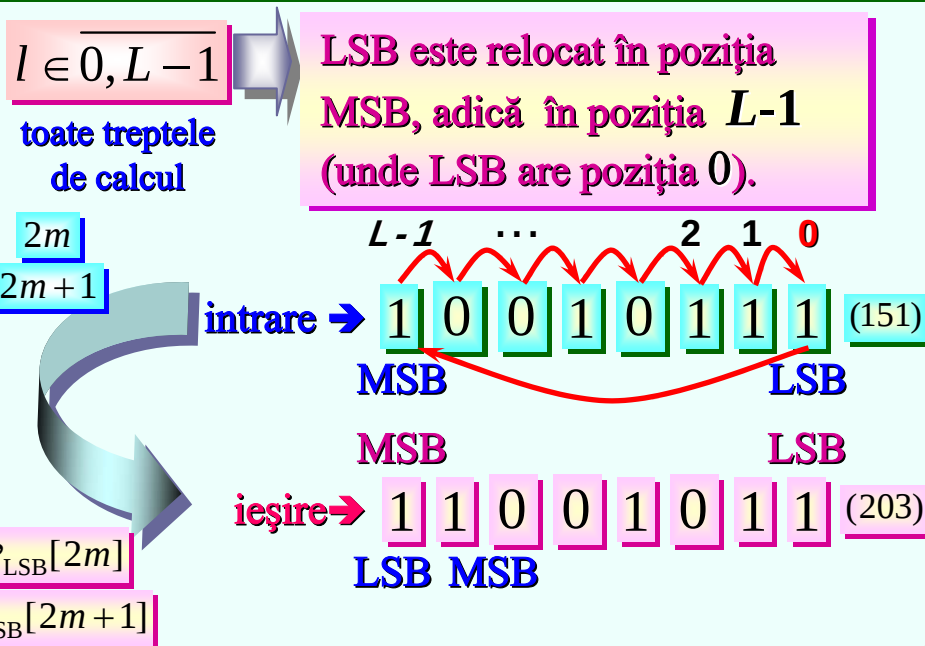


①③ Algoritmi fundamentali de tip FFT

Conservarea structurii blocurilor paralele de calcul (continuare)



Ieșirile blocului de calcul sunt indexate prin Tehnica relocării bitului celui mai puțin semnificativ (LSB) în reprezentările binare ale indicilor celor 2 intrări.



Este evidentă următoarea proprietate remarcabilă:

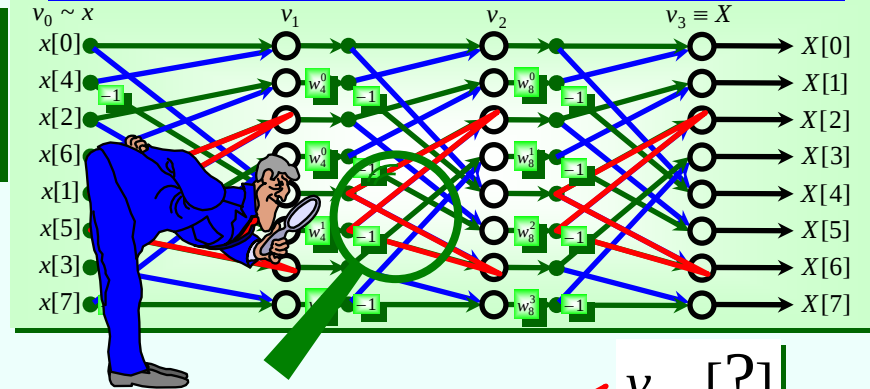
$$\mathcal{R}_{\text{LSB}}[2m+2] = \mathcal{R}_{\text{LSB}}[2m] + 1$$

$$\mathcal{R}_{\text{LSB}}[2m+3] = \mathcal{R}_{\text{LSB}}[2m+1] + 1$$

$$\forall m \in \overline{0, 2^{L-1} - 2}$$

Indicii de ieșire ai blocurilor de calcul succesive sunt consecutivi.

Algoritmul fundamental de tip Singleton



Practic, independent de indicele treptei de calcul curente, este suficientă rezolvarea indexării primului bloc de calcul paralel.

$$v_l[0 \dots 00 = 0]$$

$$v_l[0 \dots 01 = 1]$$

$$v_{l+1}[0 \dots 00 = 0]$$

$$v_{l+1}[10 \dots 0 = 2^{L-1}]$$

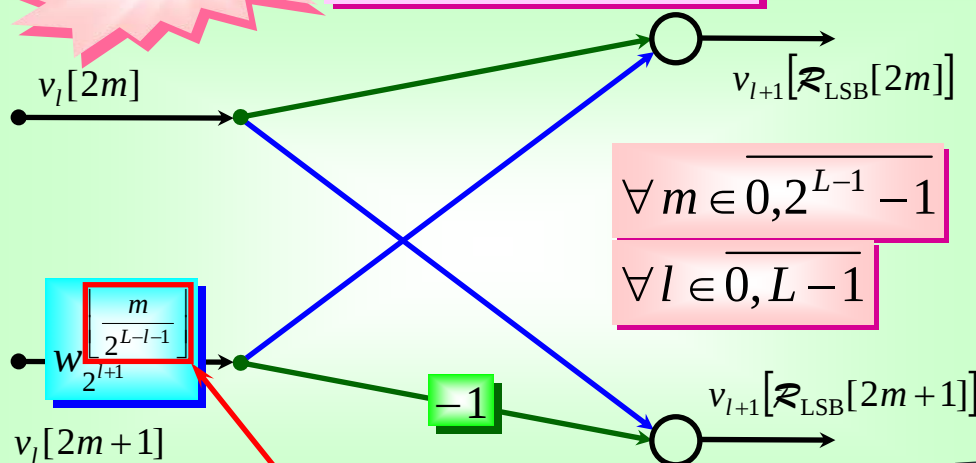
① ③ Algoritmi fundamentali de tip FFT



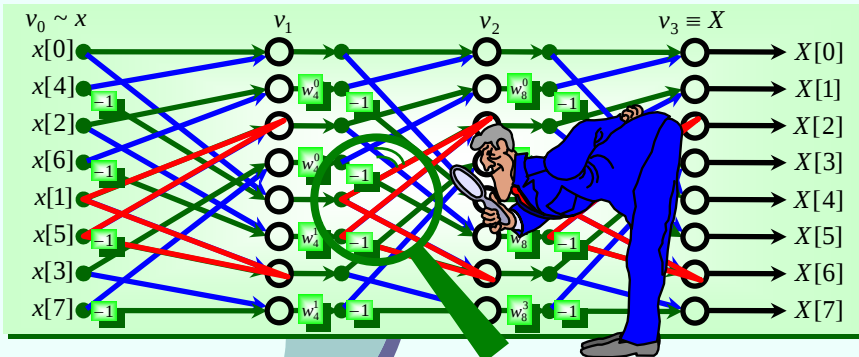
Conservarea structurii blocurilor paralele de calcul (continuare)

“butterfly”

Singleton FFT-timp



Algoritmul fundamental de tip Singleton



Nu este necesară efectuarea împărțirii întregi.

Armonica elementară se amplasează întotdeauna la **indici impari de intrare**.

Exercițiu

- Descrieți acest algoritm pentru cazul segmentării în frecvență.

Cei mai eficienți algoritmi fundamentali de tip FFT.

Caracteristici ale algoritmilor Singleton

- ☺ Geometria blocurilor paralele se conservă în interiorul și de-a lungul treptelor de calcul.
- ☺ Indexarea eşantioanelor de la intrarea și ieșirea unui bloc de calcul este extrem de ușor de implementat.
- ☺ Datorită repetabilității schemei de calcul, algoritmul se pretează la o implementare auto-recursivă.
- ☹ Este necesară rearanjarea eşantioanelor semnalului de intrare sau de ieșire.

④ Algoritmi compoziți de tip FFT

Nu se poate renunța la condiția ca durata semnalului original să fie o putere a lui 2?

Noi algoritmi de tip FFT: **Cooley-Tukey**

Într-adevăr, anumite aplicații necesită **conservarea duratei semnalului de intrare**, chiar dacă nu este exprimată ca o putere a lui 2.



$$X \in \mathcal{S}_{dN}$$

Exprimare a duratei sub forma unui **număr compozit**

divizorul principal

$$N = P_1 P_2 \cdots P_L$$

(descompunere în factori primi)
(nu neapărat ordonați crescător sau descrescător)

Ideea lui
Cooley & Tukey

Pentru a reduce dimensiunea TFD, se poate aplica
Teorema Împărțirii cu Rest (TIR).

$$N = P_1 \underbrace{P_2 \cdots P_L}_{Q_1} = P_1 \cdot Q_1$$

$$n = qP_1 + p \in \overline{0, N-1}, \text{ unde:}$$

$$\stackrel{\text{def}}{q} = \left\lfloor \frac{n}{P_1} \right\rfloor \in \overline{0, Q_1-1}$$

$$\stackrel{\text{def}}{p} = n \% P_1 \in \overline{0, P_1-1}$$

$$k = lQ_1 + m \in \overline{0, N-1}, \text{ unde:}$$

$$\stackrel{\text{def}}{l} = \left\lfloor \frac{k}{Q_1} \right\rfloor \in \overline{0, P_1-1}$$

$$\stackrel{\text{def}}{m} = k \% Q_1 \in \overline{0, Q_1-1}$$

⚡ Algoritmul de descompunere a unui număr natural în factori primi implementează **Metoda ("ciurului") lui Eratostene.**

④ Algoritmi compoziți de tip FFT

Algoritmul Cooley-Tukey compozit, cu segmentare în timp



$$TFD_N(x)[k] \stackrel{\text{def}}{=} X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{nk} \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

$$n = qP_1 + p \in \overline{0, N-1}, \text{ unde:}$$

TIR

$$q = \left\lfloor \frac{n}{P_1} \right\rfloor \in \overline{0, Q_1-1}$$

$$p = n \% P_1 \in \overline{0, P_1-1}$$

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{p=0}^{P_1-1} \sum_{q=0}^{Q_1-1} x[qP_1 + p] w_N^{k(qP_1 + p)} = \sum_{p=0}^{P_1-1} w_N^{kp} \sum_{q=0}^{Q_1-1} x[qP_1 + p] w_N^{kqP_1} = \sum_{p=0}^{P_1-1} w_N^{kp} \sum_{q=0}^{Q_1-1} x[qP_1 + p] w_{Q_1}^{kq} \\ &= \sum_{p=0}^{P_1-1} w_N^{kp} \sum_{q=0}^{Q_1-1} \underbrace{x[qP_1 + p]}_{x_p[q]} w_{Q_1}^{kq} = \sum_{p=0}^{P_1-1} w_N^{kp} \sum_{q=0}^{Q_1-1} x_p[q] w_{Q_1}^{q(k \% Q_1)} \quad \forall k \in \overline{0, N-1} \end{aligned}$$

segment de semnal temporal

$$w_{Q_1}^{kq} = w_{Q_1}^{q(lQ_1 + m)} = w_{Q_1}^{qlQ_1} w_{Q_1}^{qm} = w_{Q_1}^{qm} = w_{Q_1}^{q(k \% Q_1)}$$

$$TFD_{Q_1}(x_p)[k \% Q_1] \stackrel{\text{def}}{=} X_p[k \% Q_1] = \sum_{q=0}^{Q_1-1} x_p[n] w_{Q_1}^{q(k \% Q_1)} \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

$$k = lQ_1 + m \in \overline{0, N-1}, \text{ unde:}$$

TIR

$$l = \left\lfloor \frac{k}{Q_1} \right\rfloor \in \overline{0, P_1-1}$$

$$m = k \% Q_1 \in \overline{0, Q_1-1}$$

Dimensiunea transformatei a scăzut de P_1 ori.

$$TFD_{P_1 Q_1}(x)[k] = \sum_{p=0}^{P_1-1} w_N^{kp} TFD_{Q_1}(x_p)[k \% Q_1] \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

④ Algoritmi compoziți de tip FFT

Algoritmul Cooley-Tukey compozit, cu segmentare în timp (continuare)

Cum pot fi descrise segmentele semnalului temporal?



Semnalul de intrare se poate **aranja într-o matrice** cu P_1 coloane și Q_1 linii.



indice de segment p

indice temporal q	$x[0]$	$x[1]$	...	$x[p]$	...	$x[P_1 - 1]$
	$x[P_1]$	$x[P_1 + 1]$	...	$x[P_1 + p]$	...	$x[2P_1 - 1]$
	...	...	...	...	...	...
	$x[qP_1]$	$x[qP_1 + 1]$	...	$x[qP_1 + p]$	...	$x[(q+1)P_1 - 1]$
	...	...	...	...	...	...
	$x[(Q_1 - 1)P_1]$	$x[(Q_1 - 1)P_1 + 1]$	...	$x[(Q_1 - 1)P_1 + p]$	...	$x[Q_1 P_1 - 1]$

👉 Segment de semnal temporal.

- Fiecare segment de semnal este reprezentat într-un **vector coloană**.
- Durata oricărui segment de semnal este de asemenea un **număr compozit**.

$$Q_1 = P_2 \cdots P_L$$

TFD a fiecărui segment se poate exprima cu ajutorul a P_2 transformate de ordin $Q_2 = P_3 \cdots P_L$.

- Procedeul recursiv se oprește la **ultimul număr prim** (P_L), pentru care **TFD** se evaluează **folosind definiția**.



$$P_L = \min\{P_1, P_2, \dots, P_L\} \text{ (pentru a reduce efortul de calcul)}$$

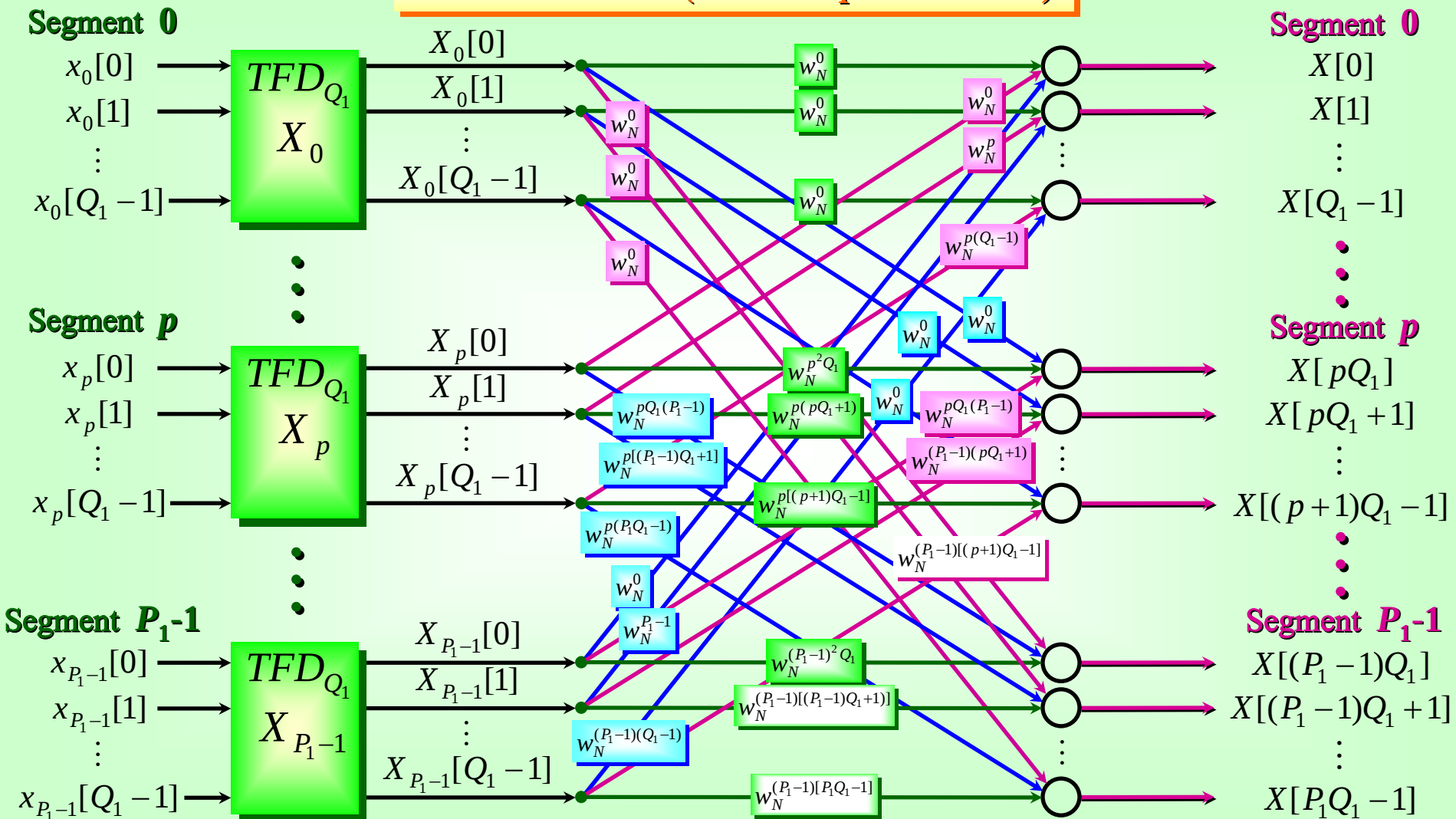
④ Algoritmi compoziți de tip FFT

Algoritmul Cooley-Tukey compozit, cu segmentare în timp (continuare)

⊗ semnal rearanjat

Schema de calcul (ultima etapă de rafinare)

😊 semnal normal



👉 În funcție de valorile factorilor primi, efortul de calcul poate fi redus prin exploatarea proprietății de simetrie a armonicelor elementare.

④ Algoritmi compoziți de tip FFT

Algoritmul Cooley-Tukey compozit, cu segmentare în timp (continuare)



$$TFD_{P_1 Q_1}(x)[k] = \sum_{p=0}^{P_1-1} w_N^{kp} TFD_{Q_1}(x_p)[k \% Q_1] \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

Cooley-Tukey compozit-timp

Efortul de calcul al Algoritmilor Cooley-Tukey compoziți.



$$\mathcal{O}_{CT}[N] = \mathcal{O}_{CT}[P_1 Q_1] = P_1 \mathcal{O}_{CT}[Q_1] + N[4P_1]_{\bullet} + N[2(2P_1 - 1)]_{+} \quad (\text{relație recursivă})$$

$$N = P_1 Q_1$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{CT}[N] &= \mathcal{O}_{CT}[P_1 Q_1] = P_1 \left(\mathcal{O}_{CT}[Q_1] + Q_1[4P_1]_{\bullet} + Q_1[2(2P_1 - 1)]_{+} \right) = \\ &= P_1 \left(P_2 \mathcal{O}_{CT}[Q_2] + Q_1[4P_1]_{\bullet} + Q_1[2(2P_1 - 1)]_{+} \right) + N[4P_1]_{\bullet} + N[2(2P_1 - 1)]_{+} = \\ &= P_1 P_2 \mathcal{O}_{CT}[Q_2] + N[4(P_1 + P_2)]_{\bullet} + N[2(2P_1 + 2P_2 - 2)]_{+} = \dots = \\ &= P_1 \dots P_{L-1} \mathcal{O}_{TFD}[P_L] + N \left[4 \sum_{i=1}^{L-1} P_i \right]_{\bullet} + N \left[2 \left(2 \sum_{i=1}^{L-1} P_i - L + 1 \right) \right]_{+} \end{aligned}$$

inducție
matematică

$$\mathcal{O}_{TFD}[P_L] = [4P_L^2]_{\bullet} + [2P_L(2P_L - 1)]_{+}$$

$$\mathcal{O}_{CT}[N] = 4N \left[\sum_{i=1}^L P_i \right]_{\bullet} + 2N \left[\left(2 \sum_{i=1}^L P_i - L \right) \right]_{+} \sim 4 \left(\prod_{i=1}^L P_i \right) \left(\sum_{i=1}^L P_i \right) \quad \text{Inferior lui } 4N^2.$$

$$N = P^L \Rightarrow \mathcal{O}_{CT}[P^L] \sim 4LP^{L+1} = 4PN \log_p N$$

$$N = 2^L \Rightarrow \mathcal{O}_{CT}[N] \sim 8N \log_2 N$$

Exercițiu

- Descrieți **Algoritmul Cooley-Tukey compozit, cu segmentare în frecvență**.



De această dată, **semnalul frecvențial trebuie aranjat într-o matrice**,
în timp ce **semnalul temporal nu necesită rearanjare**.