

④ Algoritmi compoziți de tip FFT

Exemple de algoritmi Cooley-Tukey compoziți, cu segmentare în timp

- Decada **1970-1980** a înregistrat o **intensă activitate de proiectare a algoritmilor compoziți** bazați pe ideea lui Cooley & Tukey.

Algoritmi **FFT-RADIX**

Denumire sugerată de Limbajul **FORTRAN**, care indică **divizorul principal** sau **baza** duratei (în cazul factorizării de tipul P^L).

$$N = P^L$$

sau

$$N \in P\mathbb{N}$$



Algoritm **FFT-RADIX P**

- Cei mai populari algoritmi **FFT** compoziți: **RADIX3**, **RADIX4**, **RADIX16**, **RADIX32**, **RADIX64**.
- Exemplele care urmează: **RADIX3** & **RADIX4**.

Exemplul 1

Algoritmul compozit **FFT-RADIX3**

$$N = 3^L$$

sau

$$N = 3M \in 3\mathbb{N}$$

$$TFD_{3M}(x)[k] = \sum_{p=0}^2 w_{3M}^{kp} TFD_M(x_p)[k \% M] \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

Cooley-Tukey compozit-timp

$$TFD_M(x_p)[k] \stackrel{\text{def}}{=} X_p[k] = \sum_{m=0}^{M-1} \underbrace{x[3m+p]}_{x_p[m]} w_M^{mk} \quad \begin{matrix} \forall k \in \overline{0, M-1} \\ \forall p \in \overline{0, 2} \end{matrix}$$

$$TFD_{3M}(x)[k] = X[k] = w_{3M}^0 X_0[k] + w_{3M}^k X_1[k] + w_{3M}^{2k} X_2[k]$$

$$TFD_{3M}(x)[M+k] = X[M+k] = w_{3M}^0 X_0[k] + w_3^1 w_{3M}^k X_1[k] + \underbrace{w_3^2 w_{3M}^{2k}}_{\overline{w_3}^1} X_2[k] \quad \forall k \in \overline{0, M-1}$$

$$TFD_{3M}(x)[2M+k] = X[2M+k] = w_{3M}^0 X_0[k] + \underbrace{w_3^2 w_{3M}^k}_{\overline{w_3}^1} X_1[k] + w_3^1 w_{3M}^{2k} X_2[k]$$

$\overline{w_3}^1$ (simetrie)

④ Algoritmi compoziți de tip FFT

Exemple de algoritmi Cooley-Tukey compoziți, cu segmentare în timp (continuare)

Exemplul 1

Algoritmul compozit FFT-RADIX3 (continuare)

Blocul de calcul paralel

“butterfly”

$$\mathcal{O}_{\text{atomic}}^{\text{RADIX3}} = [24]_{\bullet} + [24]_{+}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\text{RADIX3}}[3M] &= \\ &= 3\mathcal{O}_{\text{CT}}[M] + [24M]_{\bullet} + [24M]_{+} \end{aligned}$$

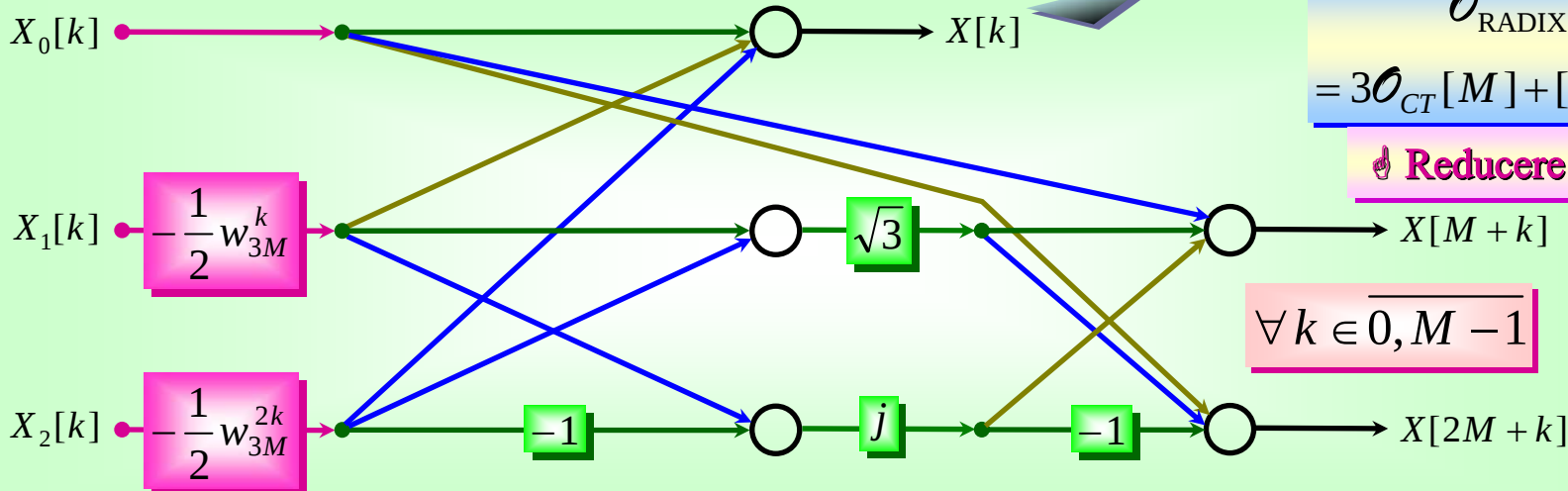
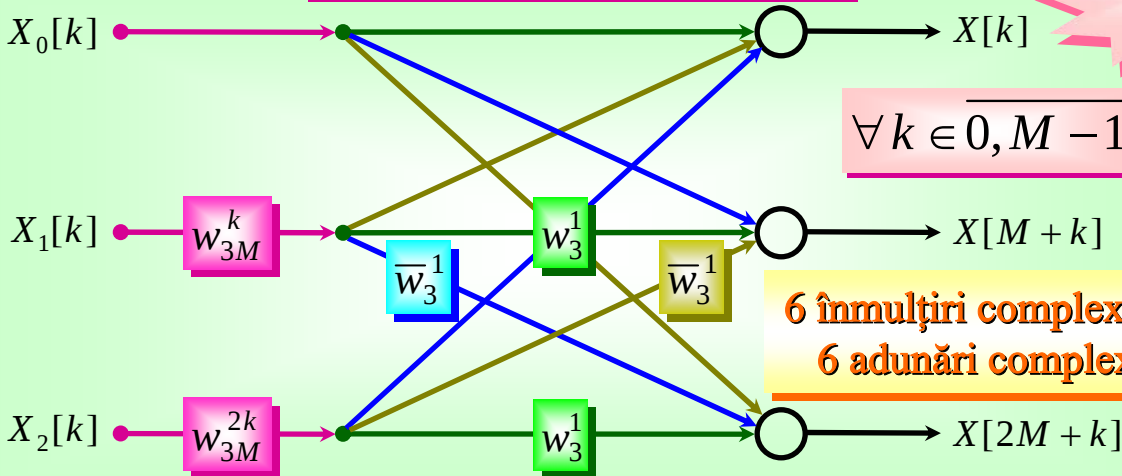
👉 Efortul de calcul poate fi redus prin exploatarea totală a simetriei armonice interioare.

$$w_3^1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\text{RADIX3+}}[3M] &= \\ &= 3\mathcal{O}_{\text{CT}}[M] + [11M]_{\bullet} + [20M]_{+} \end{aligned}$$

👉 Reducere de peste 2 ori.

$$\forall k \in \overline{0, M-1}$$



④ Algoritmi compoziți de tip FFT

Exemple de algoritmi Cooley-Tukey compoziți, cu segmentare în timp

Exemplul 2

Algoritmul compozit FFT-RADIX4

$$N = 4^L \text{ sau } N = 4M \in 4\mathbb{N}$$

$$TFD_{4M}(x)[k] = \sum_{p=0}^3 w_{4M}^{kp} TFD_M(x_p)[k \% M] \quad \forall k \in \overline{0, N-1}$$

Cooley-Tukey compozit-timp

$$TFD_M(x_p)[k] \stackrel{\text{def}}{=} X_p[k] = \sum_{m=0}^{M-1} \underbrace{x[4m+p]}_{x_p[m]} w_M^{mk} \quad \forall k \in \overline{0, M-1} \quad \forall p \in \overline{0, 3}$$

$$TFD_{4M}(x)[k] = X[k] = w_{4M}^0 X_0[k] + w_{4M}^k X_1[k] + w_{4M}^{2k} X_2[k] + w_{4M}^{3k} X_3[k]$$

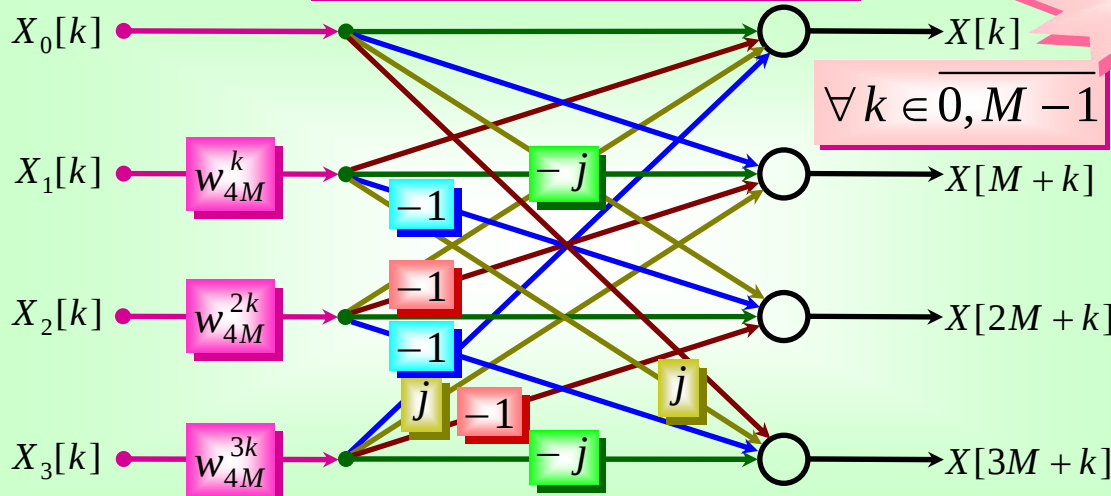
$$TFD_{4M}(x)[M+k] = X[M+k] = w_{4M}^0 X_0[k] + w_4^1 w_{4M}^k X_1[k] + w_4^2 w_{4M}^{2k} X_2[k] + w_4^3 w_{4M}^{3k} X_3[k]$$

$$TFD_{4M}(x)[2M+k] = X[2M+k] = w_{4M}^0 X_0[k] + w_4^2 w_{4M}^k X_1[k] + w_4^0 w_{4M}^{2k} X_2[k] + w_4^2 w_{4M}^{3k} X_3[k]$$

$$TFD_{4M}(x)[3M+k] = X[3M+k] = w_{4M}^0 X_0[k] + w_4^3 w_{4M}^k X_1[k] + w_4^2 w_{4M}^{2k} X_2[k] + w_4^1 w_{4M}^{3k} X_3[k]$$

$$\forall k \in \overline{0, M-1}$$

Blocul de calcul paralel



“butterfly”

3 înmulțiri complexe & 12 adunări complexe

$$\mathcal{O}_{\text{atomic}}^{\text{RADIX4}} = [12]_{\bullet} + [30]_{+}$$

$$\mathcal{O}_{\text{RADIX4}}[4M] = 4\mathcal{O}_{\text{CT}}[M] + [12M]_{\bullet} + [30M]_{+}$$

15 Problema estimării spectrale



Clasa semnalelor **deterministe**

- Valori unic determinate la fiecare moment al domeniului de definiție, $\mathcal{T}$.
- Semnale total invariante la perturbații.
- Clasa tradițională a semnalelor practice.

PS

Clasa semnalelor **nedeterministe**

- Valori afectate de un anumit grad de incertitudine, la fiecare moment al domeniului de definiție, $\mathcal{T}$.
- Se pot determina anumite probabilități de apariție a valorilor. PS & IS
- Semnale afectate de perturbații (zgomote).

Determinist

Autocovarianța unui semnal

Nedeterminist

$$r_f(\theta, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \theta) \overline{f(s - \tau)} dt ds, \quad \forall \theta, \tau \in \mathbb{R}$$

$$r_x[p, q] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} x[n - p] \overline{x[m - q]}, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}$$

$\left. \begin{array}{l} (\theta, \tau) \\ [p, q] \end{array} \right\}$ perechi de **pivoți**

$$r_f(\theta, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} E\{f(\theta) \overline{f(\tau)}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(f(\theta), \overline{f(\tau)}) f(\theta) \overline{f(\tau)} df(\theta) df(\tau), \quad \forall \theta, \tau \in \mathbb{R}$$

$$r_x[p, q] \stackrel{\text{def}}{=} E\{x[p] \overline{x[q]}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x[p], \overline{x[q]}) x[p] \overline{x[q]} dx[p] dx[q], \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}$$

operatorul de mediere statistică

densitate de probabilitate



Spectrele semnalelor din aceste clase se evaluează **în mod diferit.**

15 Problema estimării spectrale



Spectrul unui semnal stabil **determinist**

$$\mathcal{S}_f(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} |F(j\Omega)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{f(s)} e^{j\Omega(s-t)} dt ds \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{S}_x(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} |X(e^{j\omega})|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} x[n] \overline{x[m]} e^{j\omega(m-n)} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Ce relație există între spectru și densitatea spectrală de putere?



Un rezultat remarcabil relevă această relație.

Teorema 9 (Wiener-Kintchine)

Pentru orice semnal continuu sau discret stabil staționar care admite funcție de autocovarianță, spectrul coincide cu densitatea spectrală de putere:

$$\mathcal{S}_f(\Omega) = \Phi_f(\Omega) \quad , \quad \forall \Omega \in \mathbb{R} \quad ;$$

$$\mathcal{S}_x(\omega) = \Phi_x(\omega) \quad , \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad .$$

Spectrul unui semnal **nedeterminist**

👉 Chiar dacă Operatorul Fourier poate fi aplicat unui semnal nedeterminist, rezultatul este tot un semnal nedeterminist.

Un semnal nedeterminist este **stabil** dacă funcția sa de autocovarianță este un semnal stabil.

Semnale staționare

$$\mathcal{S}_f(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} |R_f(j\Omega)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_f(\tau) \overline{r_f(\theta)} e^{j\Omega(\theta-\tau)} d\theta d\tau \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{S}_x(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} |R_x(e^{j\omega})|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} r_x[k] \overline{r_x[p]} e^{j\omega(p-k)} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

densitate spectrală de putere
(psd = power spectrum density)

👉 Densitatea spectrală de putere se poate defini identic și pentru semnalele deterministe.

①⑤ Problema estimării spectrale

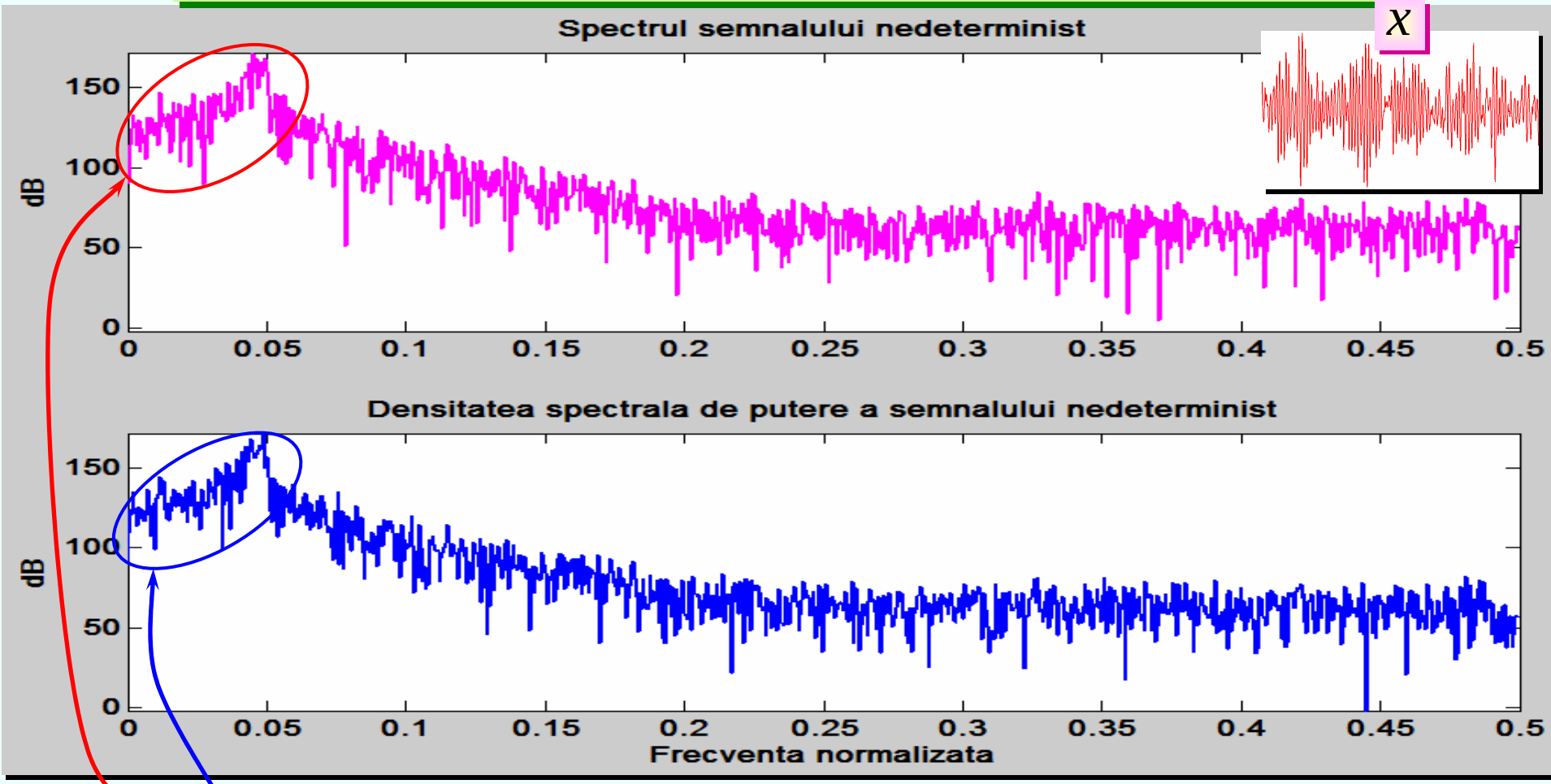


În cazul semnalelor nedeterminate, utilizarea densității spectrale de putere în locul spectrului conduce la **eliminarea zgomotului alb**.



👉 Zgomotele colorate nu sunt însă eliminate.

Densitatea spectrală de putere are doar un aspect (ușor) mai neted decât al spectrului.



👉 Observați dispersia ușor inferioară a celui de-al doilea grafic în jurul curbei mediane.

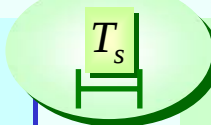
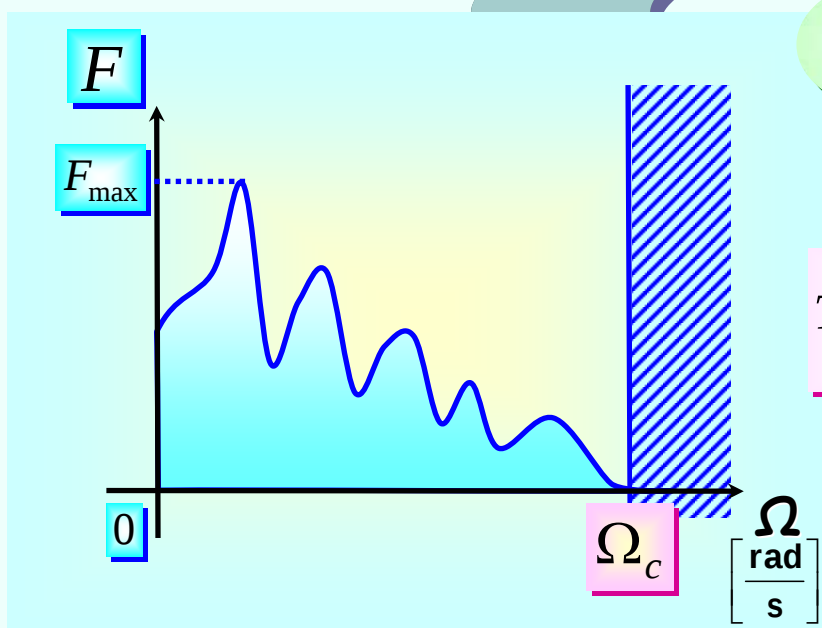
15 Problema estimării spectrale

Cum este influențat spectrul prin eșantionare și limitarea orizontului de măsură?

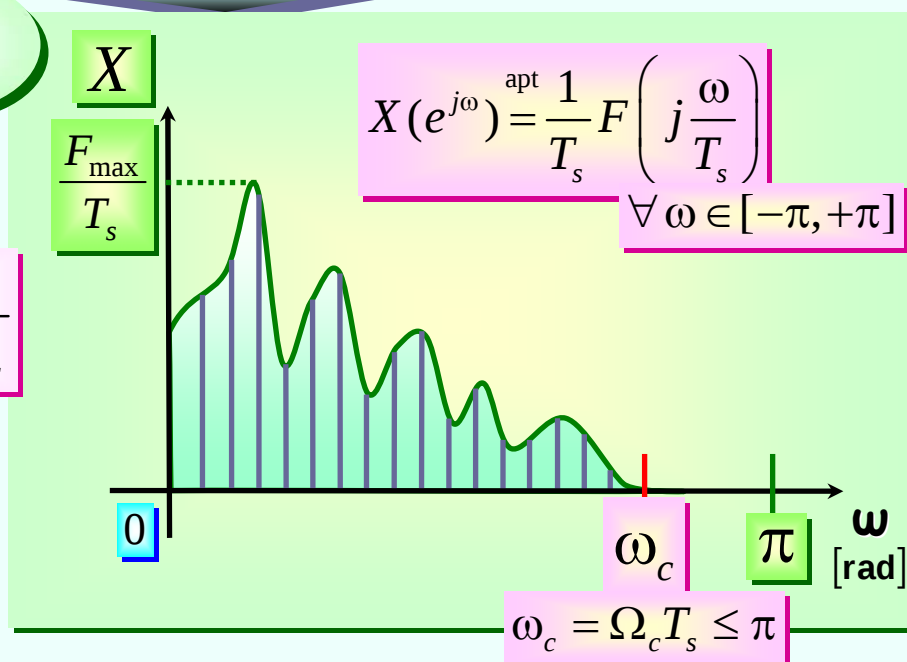


Prin eșantionare, informația spectrală este conservată, dacă se respectă **Regula lui Shannon-Nyquist**.

Eșantionare



$$T_s \leq \frac{\pi}{\Omega_c}$$



Limitarea orizontului de măsură produce însă **distorsiuni** mai mult sau mai puțin importante ale spectrului original.

👉 În acest caz, reprezentarea spectrală se supune **Principiului de incertitudine Gabor-Heisenberg**.

①⑤ Problema estimării spectrale

- Limitarea orizontului de măsură este echivalentă cu **extragerea unui segment** de semnal discret(izat) **cu ajutorul unei ferestre** (de exemplu, **dreptunghiulare**).

$$y_m \equiv x \cdot (q^{-m} \mathcal{R}_N) \Rightarrow Y_m \equiv \frac{1}{2\pi} X \tilde{*} \mathcal{F}(q^{-m} \mathcal{R}_N)$$

Teorema **inversă** de convoluție periodică

$$Y_m(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\mu}) \mathcal{F}(q^{-m} \mathcal{R}_N)(e^{j(\omega-\mu)}) d\mu \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$Y_m(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\mu}) \frac{\sin \frac{N(\omega-\mu)}{2}}{\sin \frac{\omega-\mu}{2}} e^{j(\omega-\mu)\left(\frac{N-1}{2}-m\right)} d\mu \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

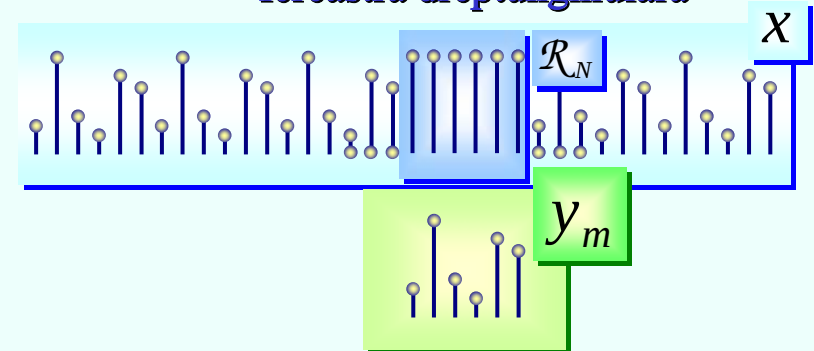
$$\mathcal{S}_{y_m}(\omega) = |Y_m(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\mu}) \frac{\sin \frac{N(\omega-\mu)}{2}}{\sin \frac{\omega-\mu}{2}} e^{-j\mu\left(\frac{N-1}{2}-m\right)} d\mu \right|^2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

- Alte tipuri de ferestre pot fi de asemenea utilizate.

Exercițiu

- Deduceți ecuația spectrului unui segment de semnal extras cu ajutorul unei **ferestre triunghiulare (Bartlett)**.

ferestra dreptunghiulară



$$\mathcal{F}(q^{-m} \mathcal{R}_N)(e^{j\omega}) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}-m\right)} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

(Exercițiu)

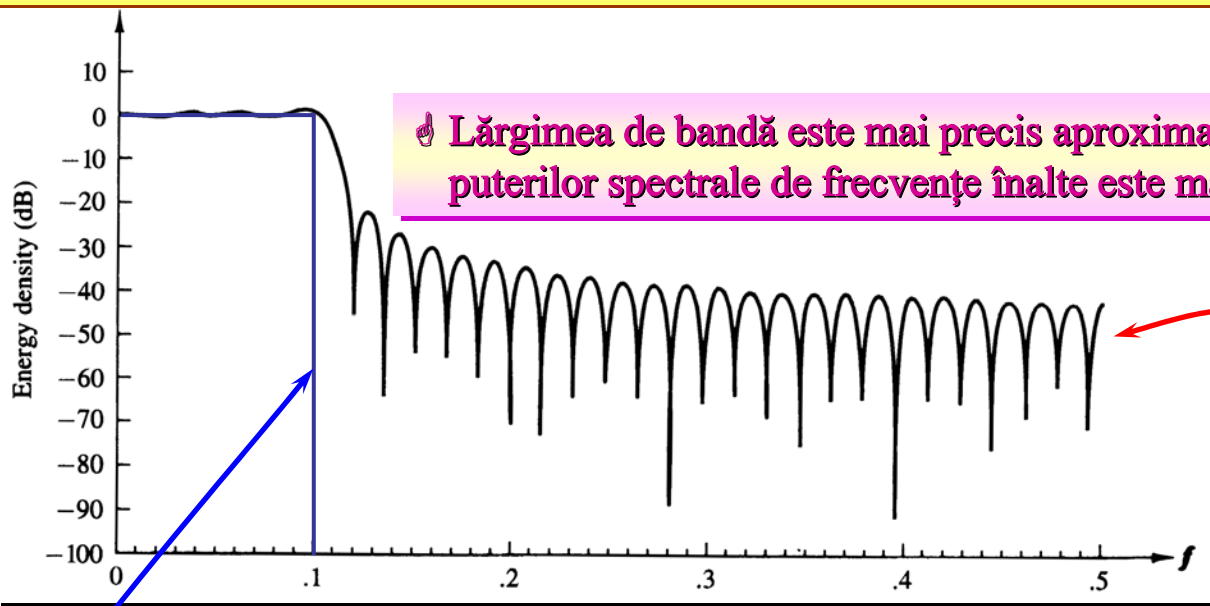
👉 Spectrul este distorsionat de operația de convoluție cu TF a ferestrei de extracție.

①⑤ Problema estimării spectrale



Exemplul 1

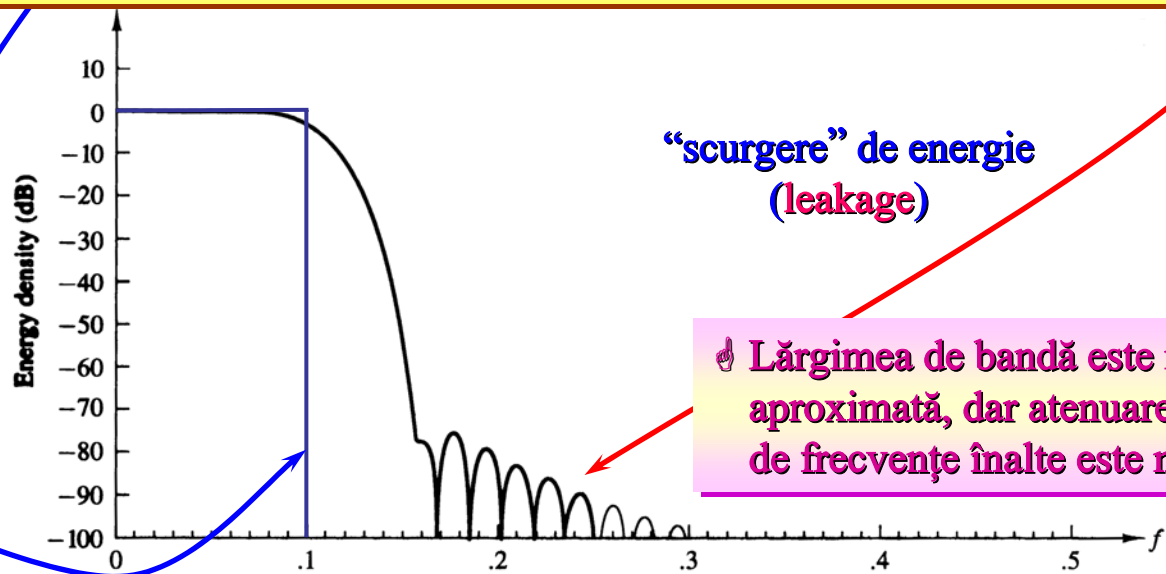
Distorsiuni induse de fereastra dreptunghiulară asupra unui FTJ ideal



efecte marginale

Exemplul 2

Distorsiuni induse de fereastra tringhiulară asupra unui FTJ ideal



“scurgere” de energie (leakage)

spectru ideal