Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado

Problemas de valor inicial

A menudo uno se interesa por resolver una ecuación diferencial sujeta a condiciones prescritas, que son las condiciones que se imponen a $y(x)$ o a sus derivadas.

En algún intervalo I que contenga a x_0, el problema de resolver $\dfrac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ sujeta a $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$; en donde $y_0,\ y_1, ..., y_{n-1}$ son constantes reales, se llama **problema de valor inicial**.

Los valores dados de la función desconocida, $y(x)$, y de sus primeras $n-1$ derivadas en un solo punto x_0: $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$ se llaman **condiciones iniciales** y al problema anterior se lo denomina **problema de valor inicial de enésimo orden**.

Los problemas:

$$\left|\begin{array}{ll} \text{resolver:} & \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ \text{sujeta a:} & y(x_0) = y_0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

y

$$\left|\begin{array}{ll} \text{resolver:} & \dfrac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') \\ \text{sujeta a:} & y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_1 \end{array}\right. \qquad (2)$$

Se denominan **problemas de valor inicial de primero y segundo orden**, respectivamente.

Estos problemas son fáciles de interpretar geométricamente. Para las ecuaciones (1) se está buscando una solución de la ecuación diferencial en el intervalo I que contenga a x_0, tal que una curva de solución pase por el punto (x_0, y_0) Fig. 1

Para las ecuaciones (2), se desea determinar una solución de la ecuación diferencial cuya gráfica no sólo pase por (x_0, y_0), sino que también la pendiente de la curva en ese punto sea y_1.

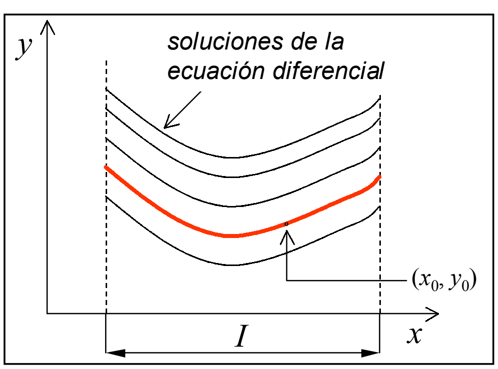

Figura 1

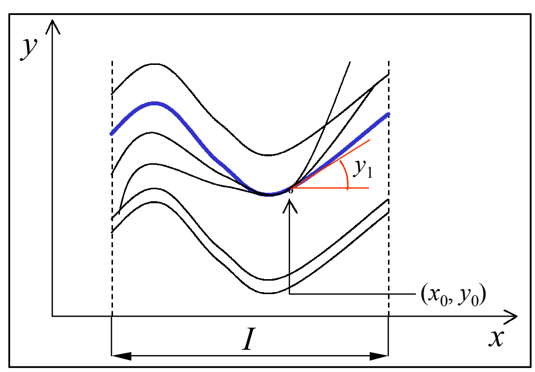

Figura 2

El término condición inicial procede de los sistemas físicos en los que la variable independiente es el tiempo t y donde $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_1$ representan, respectivamente, la posición y la velocidad en cierto momento inicial t_0.

Las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Con frecuencia se desea describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno de la vida real en términos matemáticos. Dicho sistema puede ser físico, sociológico o hasta económico. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se llama **modelo matemático** y se forma con ciertos objetivos en mente:

i. Mediante la identificación de las variables causantes del cambio del sistema. Se podrá elegir no incorporar todas las variables en el modelo. En este paso se especifica el nivel de resolución del modelo.
ii. Se establece un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema que se trata de describir. Esas hipótesis también incluyen todas las leyes empíricas aplicables al sistema.

Dado que las hipótesis acerca de un sistema implican con frecuencia la razón o tasa de cambio (derivada) de una o más variables, el enunciado matemático de esas hipótesis es una o más ecuaciones donde intervienen derivadas. En otras palabras el modelo matemático es una ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales.
Una vez formulado el modelo matemático, se llega al problema de resolverlo. Una vez resuelto se comprueba que el modelo sea razonable si su solución es consistente con los datos experimentales o los hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema. Si las predicciones que se basan en la solución son deficientes, se puede aumentar el nivel de resolución del modelo o elaborar hipótesis alternativas sobre los mecanismos del cambio del sistema; entonces se repiten los pasos del proceso de modelado (Fig. 3) Al aumentar la resolución se aumenta la complejidad del modelo matemático y la probabilidad de que se deba conformar con una solución aproximada.

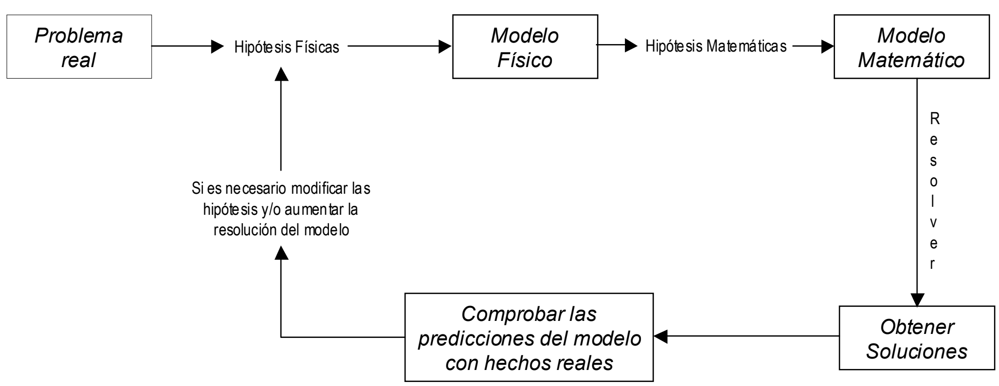

Figura 3

Con frecuencia, el modelo matemático de un sistema físico inducirá la variable *t*, el tiempo. En este caso una solución del modelo expresa el **estado del sistema**; en otras palabras, para valores adecuados de *t*, los valores de la o las variables dependientes describen el sistema en el pasado, presente o futuro.
A continuación se verán ejemplos de sistemas dinámicos; es decir, sistemas que cambian o evolucionan al paso del tiempo.

Como el estudio de los sistemas dinámicos es una rama de la matemática de moda en la actualidad, se intentará utilizar la terminología de esa rama en algunas aplicaciones.
En términos más precisos, un **sistema dinámico** consiste en un conjunto de variables dependientes del tiempo que se llaman **variables de estado** y una regla que permite determinar (sin ambigüedades) el estado del sistema (que puede ser pasado, presente o futuro) en términos de un estado específico en cierto momento t_0.
Los sistemas se clasifican como sistemas discretos o continuos en el tiempo. Sólo se describirán algunos sistemas continuos en el tiempo, que son aquellos en que todas las variables están definidas dentro de un intervalo continuo de tiempo. El **estado del sistema** en el momento t es el valor de las variables de estado en ese instante. El estado del sistema especificado en el instante t, es tan sólo el conjunto de condiciones iniciales que acompañan al modelo matemático.
La solución de un problema de valor inicial se llama **respuesta del sistema**.
Por último, cabe aclarar que no todos los sistemas son dinámicos; también, hay sistemas estáticos en los que los modelos se representan mediante ecuaciones diferenciales.

Aplicaciones

1) <u>Ley de Newton del enfriamiento</u>

Según la ley empírica de Newton del enfriamiento, la **rapidez** (ó **tasa de cambio** ó, simplemente, **derivada**) con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia de temperaturas entre la del cuerpo y la del medio que lo rodea, que es la temperatura ambiente.
Si $T(t)$ representa la temperatura del objeto en el momento t, T_m es la temperatura (constante) del medio que lo rodea y $\frac{dT}{dt}$ es la rapidez con que se enfría el objeto, la ley de Newton del enfriamiento se traduce en el siguiente enunciado matemático:

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_m\right)$$

en donde k es una constante de proporcionalidad.
Como se supone que el objeto se enfría, se debe cumplir que $T > Tm$; en consecuencia, lo lógico es que k sea menor que cero.
Si la temperatura del objeto es T_0, en el momento t_0; entonces, el modelo puede escribirse de la siguiente forma:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dT}{dt} = k\left(T - T_m\right) \\ T\left(t_0\right) = T_0 \end{array} \right. \qquad (3)$$

2) <u>Segunda ley de Newton del movimiento</u>

Para establecer un modelo matemático del movimiento de un cuerpo dentro de un campo de fuerzas, con frecuencia se comienza con la segunda ley de Newton.

Recordando, de Física, que la primera ley de Newton establece que ***si sobre un cuerpo no actúan fuerzas externas, éste se quedará en reposo ó se continuará moviendo con velocidad constante***.
La segunda ley de Newton establece que ***la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza neta o resultante que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa***. En forma de ecuación podemos enunciar la segunda ley de Newton como:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$ (véase Nota al final del documento)

Ahora, se aplicará la segunda ley de Newton para modelar el movimiento vertical de un objeto.
Supóngase que se arroja una piedra hacia arriba desde la terraza de un edificio. ¿Cuál es su posición en el momento t?

Para armar el modelo, se introducen, primero, las siguientes hipótesis físicas:

i. Se supone que el problema es unidimensional; de esta manera se prescinde de trabajar vectorialmente.
ii. Se considera a la piedra como una partícula de masa constante m.
iii. No existe otra fuerza externa más que el propio peso actuando sobre la piedra (se desprecia la resistencia del aire)
iv. La aceleración de la gravedad, g, es constante.

Como se ve en la Fig. 4, se considera que la posición respecto al suelo está dada por $s(t)$
El *origen* del *eje s* se ubicó *en la tierra* y el *sentido positivo hacia arriba* (esto se eligió por conveniencia)
La altura del edificio es s_0 y la velocidad inicial (la derivada de la posición respecto al tiempo) es v_0.

La aceleración de la piedra es la derivada segunda de la posición, es decir, $\dfrac{d^2 s}{dt^2}$.

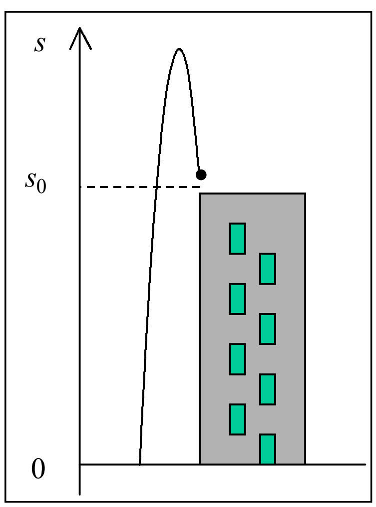

Figura 4

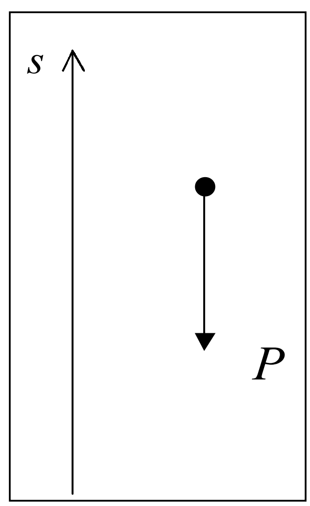

Figura 5

Si se aísla la piedra un instante después de haber sido arrojada y se dibujan las fuerzas que actúan sobre ella (esto se llama diagrama de cuerpo libre), se ve que la única fuerza externa actuante es el peso *P* (Fig. 5)
Al aplicar la segunda ley de Newton, se tiene:

$$-P = ma$$

El signo negativo de *P* se debe a que el *eje s* se escogió *positivo hacia arriba*, mientras que *P* apunta hacia abajo.
También, se sabe que *P* = *mg*, por lo tanto reemplazando, se tiene:

$$-mg = ma$$

$$-g = a$$

$$-g = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Es decir, la posición de la piedra queda determinada mediante el siguiente problema de valor inicial de segundo orden:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d^2 s}{dt^2} = -g \\ \mathrm{s}(t_0) = s_0 \\ s'(t_0) = v_0 \end{array} \right.$$

Aunque aún no se ha visto como resolver ecuaciones de segundo orden, es fácil darse cuenta que integrando dos veces la constante –*g* con respecto al tiempo, puede resolverse la ecuación diferencial.
Las condiciones iniciales determinarán las dos constantes de integración.

3) <u>Crecimiento demográfico</u>

Uno de los primeros intentos en modelar matemáticamente el crecimiento demográfico humano lo hizo Thomas Malthus, economista inglés, en 1978.
En esencia, la idea del modelo Malthusiano es la hipótesis de que la tasa de crecimiento de la población de un país crece en forma proporcional a la población total, *P*(*t*), de ese país en cualquier momento *t*. En otras palabras, mientras más personas haya en el momento *t*, habrá más en el futuro.
En términos matemáticos esta hipótesis puede expresarse como:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dP}{dt} = kP \\ P(t_0) = P_0 \end{array} \right. \qquad (4)$$

donde *k* es una constante de proporcionalidad.
A pesar de que este sencillo modelo no tiene en cuenta muchos factores (por ejemplo inmigración y emigración) que pueden influir en las poblaciones humanas, haciéndolas crecer o disminuir, predijo con mucha exactitud la población de Estados Unidos desde 1790 hasta 1860.
Esta ecuación diferencial aún se utiliza para modelar poblaciones de bacterias y animales pequeños en intervalos de tiempo cortos.

Finalmente, como puede observarse, las ecuaciones (3) y (4) tiene la misma forma, sin embargo modelan diferentes sistemas. Es decir, una ecuación diferencial sirve para modelar muchos fenómenos distintos ■

Bibliografía

– **Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (6ta edición)** Dennis Zill. International Thomson Editores.

Nota:

La segunda ley de Newton puede enunciarse rigurosamente como sigue:
***La derivada de la cantidad de movimiento de una partícula (ó derivada del momento lineal) con respecto al tiempo es igual a la fuerza que actúa sobre la partícula*.**
Cabe aclarar que la cantidad de movimiento de una partícula se define como $\vec{p} = m\vec{v}$ (masa x velocidad) y que $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ y $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ se definen como la derivada y la derivada segunda del vector posición respecto al tiempo, respectivamente.
En consecuencia, según el enunciado de la segunda ley, se tiene:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Si la masa de la partícula es constante, $\frac{dm}{dt} = 0$ y en consecuencia, $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}$, que es la forma más común de enunciar matemáticamente la segunda ley de Newton.