UNIDAD TEMATICA 2

MEDICION DE RESISTENCIAS CON VOLTIMETRO Y AMPERIMETRO

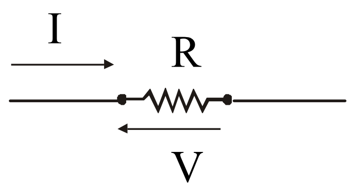
1. Introducción:

Si la exigencia en la medición no es excesiva, o sea no mejor que el 0,5 %, se pueden medir resistencias utilizando voltímetro y amperímetro.

Si se desea que la exactitud con que se conozca una resistencia sea menor al 0,5 % , se debe recurrir al puente de Wheatstone para $R > 1\ \Omega$ o al puente de Kelvin para $R < 1\ \Omega$.

Si el elemento es alineal, el método más conveniente a utilizar es el del de voltímetro y amperímetro, pues además de dar el valor de la resistencia permite medir el valor de tensión o intensidad de corriente deseados.

Se estudiará el caso de resistencias lineales. La idea del método es que si por una resistencia circula una intensidad de corriente, entre sus bornes aparecerá una diferencia de potencial.



$$R = \frac{V}{I} \qquad (1)$$

Donde V e I son los valores reales de tensión e intensidad de corriente en la resistencia; por lo tanto, se debe armar un circuito de modo de poder medir los valores de la expresión (1), pero como los instrumentos no son ideales se introducen errores.

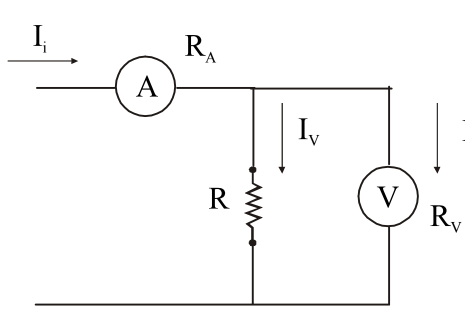
2. Análisis de los errores:

I) Groseros: en este caso los consideramos nulos.

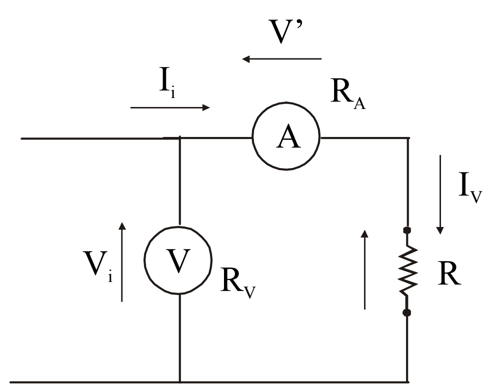
II) Sistemáticos
- a) método.
- b) instrumental.
- c) condiciones ambientales: se consideran despreciables.
- d) del observador: no se consideran.

III) Aleatorios.

2.1 Errores sistemáticos de método:



Método de tensión bien medida (TBM)



Método de corriente bien medida (CBM)

Se analizará el de tensión bien medida:

$$R_i = \frac{V_i}{I_i} = \frac{V_i}{I_V + I'} = \frac{V_i}{\frac{V_i}{R} + \frac{V_i}{R_V}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}} = \frac{R \cdot R_V}{R + R_V} = R_i$$

$$e_m = \frac{R_i}{R} - 1 = \frac{R_V}{R + R_V} - 1 = \frac{R_V - R - R_V}{R + R_V} = -\frac{R}{R + R_V}$$

$$e = -\frac{1}{1 + \frac{R_V}{R}} \qquad (2)$$

Se debe poner R en función de R_i ya que a la primera no se la conoce.

$$R = \frac{R_i \cdot R_V}{R_V - R_i}$$ reemplazando en la expresión (2)

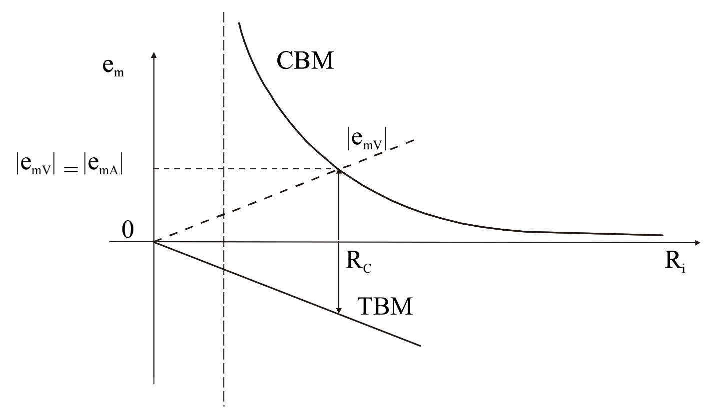
$$e_m = \frac{-1}{1 + \dfrac{R_V}{\dfrac{R_i \cdot R_V}{R_V - R_i}}} = -\frac{1}{1 + \dfrac{R_V - R_i}{R_i}} = -\frac{1}{\dfrac{R_V}{R_i}} = -\frac{R_i}{R_V}$$

El error será menor cuanto mayor sea el valor de R_V. El error es por defecto, por lo que el valor de R es menor que el verdadero.

El error sistemático de método para corriente bien medida está dado por la expresión:

$$e_m = \frac{R_A}{R_i - R_A} = \frac{1}{\dfrac{R_i}{R_A} - 1} \qquad (3)$$

Para visualizar mejor el problema se representará en forma gráfica las expresiones (2) y (3).



$R_i < R_C$ se utiliza tensión bien medida.

$R_i > R_C$ se utiliza corriente bien medida.

Fig Nº 1

Se observa que para valores bajos de R conviene aplicar el método de tensión bien medida y para valores altos corriente bien medida

Se calculará el valor de R_C que cumple con la condición de que ambos métodos presentan el mismo error de método.

Si $R_i = R_C \Rightarrow |e_{mV}| = |e_{mA}|$

$$\frac{R_C}{R_V} = \frac{R_A}{R_C - R_A} \therefore R_C^2 - R_A \cdot R_C = R_A \cdot R_V \rightarrow R_C^2 - R_A \cdot R_C - R_A \cdot R_V = 0$$

$$R_C = \frac{R_A \pm \sqrt{R_A^2 + 4 \cdot R_A \cdot R_V}}{2} = \frac{R_A}{2} \pm \sqrt{\frac{R_A^2}{4} + R_A \cdot R_V} = \frac{R_A}{2} \pm \sqrt{R_A \left[\frac{R_A}{4} + R_V\right]}$$

si $\frac{R_A}{4} << R_V$ quedará $R_C = \frac{R_A}{2} \pm \sqrt{R_A \cdot R_V}$

y considerando que $\frac{R_A}{2} << \sqrt{R_A \cdot R_V} \rightarrow R_C = \sqrt{R_A \cdot R_V}$ expresión aproximada.

Para un error menor o igual al 1 % será:

$$\frac{R_A}{2} \leq \frac{\sqrt{R_A \cdot R_V}}{100} \rightarrow \frac{\sqrt{R_A}}{2} \leq \frac{\sqrt{R_V}}{2} \rightarrow \frac{R_A}{4} \leq \frac{R_V}{10.000} \therefore 2.500 \cdot R_A \leq R_V$$

El error sistemático de método es corregible.

Cálculo del error máximo:

$$|e_{m\,max}| = \frac{R_C}{R_V} = \frac{\sqrt{R_V \cdot R_A}}{R_V}$$

Nótese que el error se puede corregir, por lo tanto, aparentemente no tendría mucho sentido preocuparse por elegir uno u otro método, pero sí es necesario conocer el $e_{m\,máx}$ que se puede cometer.

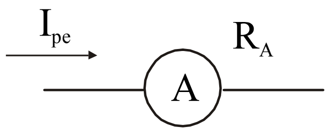
Eligiendo el método correcto se pueden tener un error del 0,1 %, y sabiendo que se pueden cometer errores de indicación y lectura del orden del 1 al 2 %, a veces no es necesario considerar el e_m.

Para poder corregir los errores es se deben conocer las resistencias internas de los instrumentos.

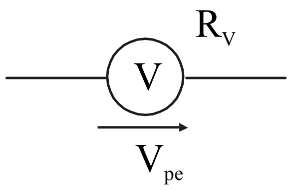
2.2 Cálculo de las resistencias internas de instrumentos analógicos en base a las especificaciones del fabricante: se define:

Consumo: es la potencia que disipa el instrumento cuando se encuentra a plena escala.

Consumo específico: es la relación entre el consumo y el alcance $p = \frac{\text{Potencia}}{\text{alcance}}$.



$$P_A = I_{pe}^2 \cdot R_A \quad \therefore \quad p_A = \frac{P_A}{I_{pe}} = I_{pe} \cdot R_A$$



$$P_V = \frac{V_{pe}^2}{R_V} \quad \therefore \quad p_V = \frac{P_V}{V_{pe}} = \frac{V_{pe}}{R_V}$$

Los fabricantes normalmente, para los voltímetros, no dan como dato el consumo específico si no que dan la sensibilidad que es la inversa del consumo específico.

$$S = \frac{1}{p_V} = \frac{R_V}{V_{pe}} \left[\frac{\Omega}{V}\right] \quad \Rightarrow \quad R_V = S \cdot V_{pe}$$

2.3 Error de instrumental: en el caso del voltímetro este error se calcula como:

$$\frac{\Delta V_i}{V_i} = C_V \cdot \frac{V_{pe}}{V_i} \quad \text{donde } C_V \text{ es la clase del voltímetro}$$

En el caso del amperímetro será:

$$\frac{\Delta I_i}{I_i} = C_A \cdot \frac{I_{pe}}{I_i} \quad \text{donde } C_A \text{ es la clase del amperímetro.}$$

Para instrumentos digitales se tiene que el error del instrumento se suele indicar como:

exactitud = error de indicación ± 1 dígito

En este tipo de instrumento el error relativo permanece constante. Por ejemplo para un voltímetro con las siguientes características:

exactitud = ± 0,2 % ± 1 dígito.

V_{pe} = 200,0 V

Si se mide V = 100 V ¿Qué error se comete?.

$$\left|\frac{\Delta V_i}{V_i}\right| = |0{,}2\ \%| + \left|\frac{0{,}1\ V}{100\ V} \cdot 100\right| = |0{,}2\ \%| + |0{,}1\ \%| = 0{,}3\ \%$$

Es importante entonces elegir la escala adecuada.

2.4 Error de lectura: para el caso del amperímetro se tendrá:

$$\left|\frac{\Delta I}{I_i}\right|_l = \frac{\Delta\alpha}{\alpha_i} \qquad \alpha_i = \text{cantidad de divisiones que indica el índice del instrumento.}$$

Propagando errores:

$$\left|\frac{\Delta R}{R}\right|_l = \left|\frac{\Delta R_i}{R_i}\right|_l = \left|\frac{\Delta\alpha_I}{\alpha_{I\,i}}\right| + \left|\frac{\Delta\alpha_V}{\alpha_{Vi}}\right|$$

2.5 Error total:

$$\left|\frac{\Delta R}{R}\right|_T = \left|\frac{\Delta R}{R}\right|_i + \left|\frac{\Delta R}{R}\right|_l \quad \text{de donde resulta}$$

$$\left|\frac{\Delta R}{R}\right|_T = \left|C_V \cdot \frac{V_{pe}}{V_i}\right| + \left|C_A \cdot \frac{I_{pe}}{I_i}\right| + \left|\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right|_I \cdot 100 + \left|\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right|_V \cdot 100$$

2.6 Criterio para despreciar el error sistemático de método: se despreciará cuando el error de método sea:

$$e_m \leq \gamma \cdot \left[\left|\frac{\Delta R}{R}\right|_l + \left|\frac{\Delta R}{R}\right|_i\right]$$

Esta expresión está dentro del orden del 10 % de los errores totales, o sea que cuando e_m es menor que el 10 % se desprecia, por lo tanto γ deberá ser igual o menor a 0,1.

3. Margen de medición con un error máximo especificado para un par de instrumentos dados:

Si se desea medir una resistencia lineal, según la ley de Ohm, se puede hacer con cualquier par de valores V_i, I_i.

Si se utiliza una fuente de tensión variable, se puede modificar la tensión de entrada por lo que se puede obtener pares de valores V_1, I_1; V_2, I_2; …; V_n, I_n.

La pregunta es: ¿Con qué par de valores de ese conjunto conviene realizar la medición de la resistencia?.

Según la ley de Ohm es indiferente, pero desde el punto de vista del error habrá un par de valores que suministrará el menor error en la medición, por lo tanto no queda duda que el par de valores que arroje el menor error de indicación y lectura serán aquellos que corresponda a la máxima deflexión en los instrumentos.

Considerando instrumentos con las siguientes características:

Voltímetro:

V_{pe}; α_V; $\Delta\alpha$; K_V

$$K_V = \frac{V_{pe}}{\alpha_{pe}} \left[\frac{V}{div}\right] \rightarrow V_i = K_V \cdot \alpha_i$$

Amperímetro:

I_{pe}; α_I; $\Delta\alpha$; K_A

$$K_A = \frac{I_{pe}}{\alpha_{pe}} \left[\frac{A}{div}\right] \rightarrow I_i = K_A \cdot \alpha_i$$

Existirá un valor de R para el cual se puede obtener el error deseado.

$$R_{mín} \leq R \leq R_{máx}$$

El caso óptimo será:

$$R' = \frac{V_{pe}}{I_{pe}}$$

Ahora si la resistencia aumenta o disminuye el error aumenta, entonces se analizará el caso en que R < R’. Si se supone que se miden resistencias de bajo valor se tendrá que el amperímetro indicará a plena escala $I_i = I_{pe}$, por lo que $\alpha_{I\,i} = \frac{I_{pe}}{K_A}$.

$$R_{min} = \frac{V_i}{I_{pe}}$$

Para el voltímetro será: $\alpha_{V\,i} = \frac{V_i}{K_V}$

Efectuando la propagación de errores se tendrá:

$$|e_{max}| = \left|C_V \cdot \frac{V_{pe}}{V_i}\right| + |C_A| + \left|\frac{\Delta\alpha_I \cdot K_A}{I_{pe}}\right| \cdot 100 + \left|\frac{\Delta\alpha_V \cdot K_V}{V_i}\right| \cdot 100$$

$$|e_{max}| - |C_A| - \left|\frac{K_A \cdot \Delta\alpha_I \cdot}{I_{pe}}\right| \cdot 100 = \left|C_V \cdot \frac{V_{pe}}{V_i}\right| + \left|\frac{K_V \cdot \Delta\alpha_V}{V_i}\right| .100$$

despejando V_i se tendrá:

$$V_i = \frac{|C_V \cdot V_{pe}| + |K_V \cdot \Delta\alpha_V| \cdot 100}{|e_{max}| - |C_A| - \left|K_A \cdot \frac{\Delta\alpha_I}{I_{pe}}\right| \cdot 100}$$

entonces el error de R_i mínimo es:

$$R_{min} = \frac{V_i}{I_{pe}} = \frac{|C_V \cdot V_{pe}| + |K_V \cdot \Delta\alpha_V| \cdot 100}{|e_{max} \cdot I_{pe}| - |C_A \cdot I_{pe}| - |K_A \cdot \Delta\alpha_I| \cdot 100}$$

Si ahora la resistencia que se desea medir es de alto valor, es posible pensar que el voltímetro llegue a indicar a plena escala antes que el amperímetro, por lo que se tendrá:

$V_i = V_{pe}$; I_i.

$$\alpha_{V\,i} = \alpha_{pe} = \frac{V_{pe}}{K_V} \quad \text{entonces} \quad R_{max} = \frac{V_{pe}}{I_i}$$

y $\alpha_i = \dfrac{I_i}{K_A}$ o sea se hace el mismo razonamiento que para el voltímetro.

$$e_{max} = |C_V| + \left|C_A \frac{I_{pe}}{I_i}\right| + \left|K_A \cdot \frac{\Delta\alpha_I}{I_i}\right| . 100 + \left|K_V \cdot \frac{\Delta\alpha_V}{V_{pe}}\right| . 100$$

$$|e_{max}| - |C_V| - \left|\frac{K_V \cdot \Delta\alpha_V}{V_{pe}}\right| . 100 = \left|C_A \cdot \frac{I_{pe}}{I_i}\right| + \left|\frac{K_A \cdot \Delta\alpha_I}{I_i}\right| . 100$$

$$\frac{1}{I_i} = \frac{|e_{max}| - C_V - \dfrac{K_V \cdot \Delta\alpha_V}{V_{pe}} . 100}{|C_A \cdot I_{pe}| + |K_A \cdot \Delta\alpha_I| . 100}$$

$$R_{max} = \frac{V_{pe}}{I_i} = \frac{V_{pe} \cdot \left(|e_{max}| - C_V - \dfrac{K_V \cdot \Delta\alpha_V}{V_{pe}} . 100\right)}{|C_A \cdot I_{pe}| + |K_A \cdot \Delta\alpha_I| . 100}$$

Si se realiza la gráfica de las expresiones de $R_{máx}$ y $R_{mín}$ en función del error de indicación y de lectura.

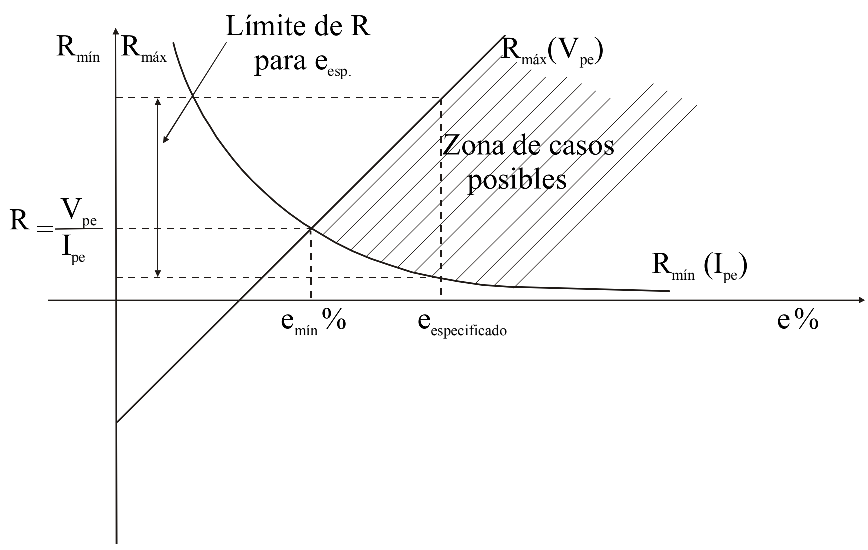


Fig Nº 2

¿Que se hace si con el par de instrumentos que se tiene no se puede cumplir con los requisitos?

Suponiendo que no tengo otros, para disminuir el error, se recurre a la recalibración de los instrumentos, en cuyo caso se puede eliminar el error de instrumental.

Eso implica considerar que las clases son nulas.

$$R_{max} = \frac{V_{pe}}{I_i} = \frac{V_{pe} \cdot \left(|e_{max}| - \dfrac{K_V \cdot \Delta\alpha_V}{V_{pe}} . 100\right)}{|K_A \cdot \Delta\alpha_i| . 100}$$

$$R_{min} = \frac{V_i}{I_{pe}} = \frac{|K_V \cdot \Delta\alpha_V| . 100}{I_{pe}\left(|e_{max}| . - \dfrac{K_A \cdot \Delta\alpha_I}{I_{pe}} . 100\right)}$$

Entonces con el gráfico de la figura Nº 1 se decide cuál es el método que da el menor e_m; para ello se compara R_i con $R_C = \sqrt{R_A . R_V}$.

Con el gráfico de la figura Nº 2 se decide si se utiliza V_{pe} o I_{pe} para obtener el menor error de indicación y lectura para ello se compara R_i con $R' = \dfrac{V_{pe}}{I_{pe}}$