

CAPITULO 5

COLUMNAS

Corresponde a: **Capítulo E. "COLUMNAS Y OTROS MIEMBROS COMPRIMIDOS"**
Proyecto de Reglamento de Estructuras de Acero - CIRSOC

BREVE RESEÑA

INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO DE BARRAS SOMETIDAS A COMPRESION CENTRADA

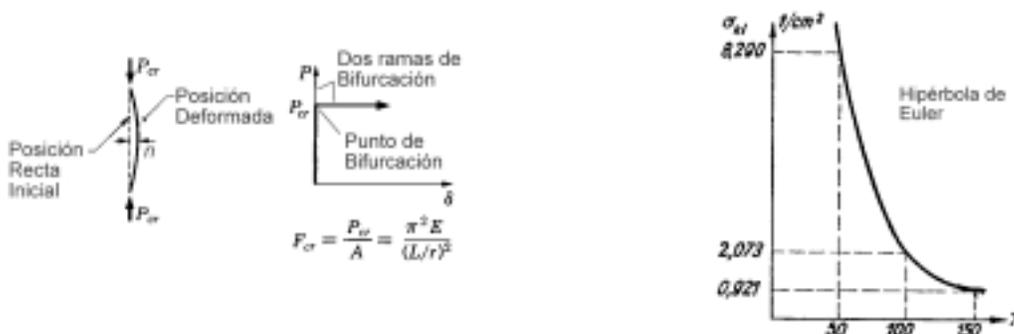
Euler presentó su fórmula para la determinación de la carga crítica de pandeo elástico, basada en hipótesis ideales, en "*De Curvis Elasticis*" en 1744, publicada luego en las Memorias de la Academia de Berlín en 1759.

Las hipótesis ideales y simplificativas establecidas en la teoría de Euler para la determinación de la "carga crítica ideal", son:

- 1) La barra es de sección constante y de eje matemáticamente recto.
- 2) La carga aplicada está perfectamente centrada (ubicada en el baricentro de la sección) y normal al plano de la sección.
- 3) El material de la barra es isótropo y homogéneo.
- 4) Se cumplen las hipótesis de Navier – Bernoulli (Teoría de flexión de las barras).
- 5) Las deformaciones son muy pequeñas $\frac{d\eta}{dz} \ll 1$.
- 6) Se considera que la pieza es axialmente rígida.
- 7) El material tiene un comportamiento elástico lineal indefinido ($E = \text{constante}$).

De esta forma, si tenemos en cuenta las hipótesis mencionadas y analizamos el equilibrio de una barra axialmente cargada en una posición deformada impuesta, se obtiene (Ver *Theory of Elastic Stability* – Timoshenko & Gere) la *Tensión Crítica Ideal de Pandeo Elástico* σ_{ki} :

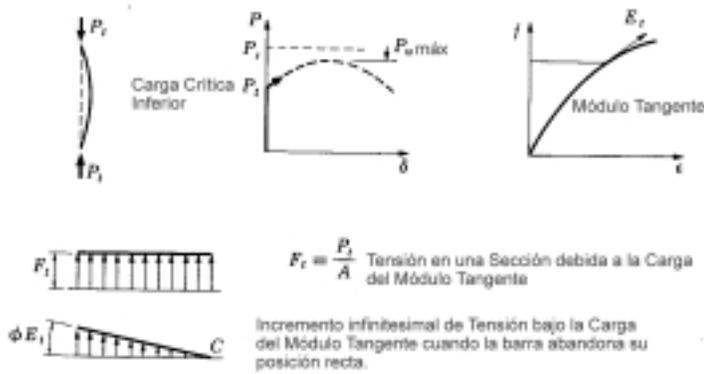
$$F_{cr} = \sigma_{ki} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$



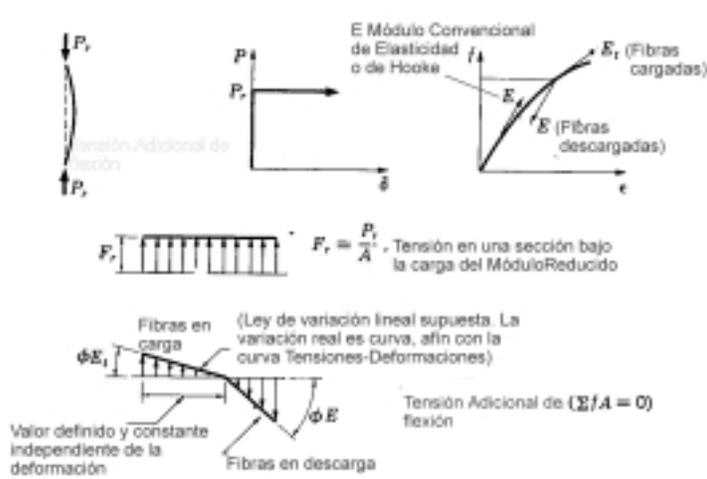
En 1889, Considère en Francia y Engesser en Alemania proclamaron la validez ilimitada de la fórmula de Euler aplicando un módulo de elasticidad variable. Así fue presentada la "*Teoría del Módulo Tangente*" (E_t) o Primera Teoría de Engesser, que se expresa:

$$F_t = \sigma_{ki} = \pi^2 \frac{E_t}{\lambda^2}$$

La hipótesis fundamental de esta primera teoría de Engesser es que **ninguna** fibra sufre un proceso de descarga al pasar de la posición recta a la deformada y que los **incrementos** de carga, en toda la sección, siguen la ley del módulo tangente E_t .



validez mediante ensayos, en 1908. Esta teoría se basa en la hipótesis que las fibras que se descargan, cuando la barra abandona su posición recta, lo hacen siguiendo el módulo de elasticidad E normal del material y las que se cargan lo hacen siguiendo el módulo tangente E_t .



Como las cargas, en estas condiciones, son crecientes a medida que la barra abandona la posición recta, se define convencionalmente como carga crítica de pandeo de Engesser a la inferior de ellas ($P_t = P_{kl}$) (ver Figura superior).

La Segunda Teoría de Engesser o "Teoría del Módulo Reducido" fue enunciada en 1895, pero no fue tomada muy en cuenta hasta que Kármán no confirmó su

Como consecuencia, puede apreciarse fácilmente que el módulo de elasticidad reducido T y por lo tanto la carga crítica de pandeo P_{kl} , dependen de la forma de la sección y del sentido de deformación adoptado para la configuración de pandeo. Esta teoría conduce a valores críticos mayores que los correspondientes a la primera teoría de Engesser y mayores también que los obtenidos en cuidadosos ensayos.

$$\sigma_{K_{II}} = \pi^2 \frac{T}{\lambda^2}$$

en la que T es igual a:

$$T = \frac{E_t \cdot J_1 + E \cdot J_2}{J}$$

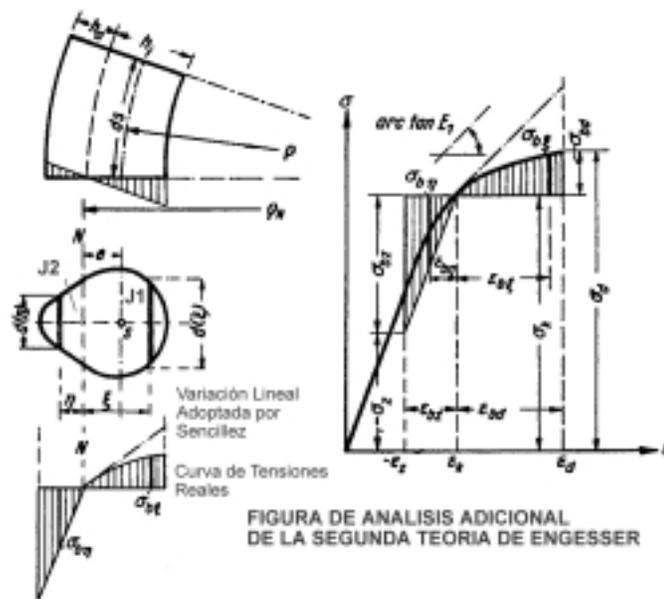
en donde:

J_1 : es el momento de inercia del área cargada de la sección respecto del eje neutro ficticio (coincidente con línea de quiebre del diagrama lineal de tensiones).

J_2 : es el momento de inercia del área descargada de la sección respecto del eje neutro ficticio.

J : es el momento de inercia baricentrico de la sección total respecto del eje de flexión.

Esta teoría 2da. Teoría considera que la barra permanece recta hasta alcanzar la carga crítica P_{kl} , como en el caso de la Teoría de Euler y recién a partir de ese instante, se supone que le es impuesta una perturbación (pequeña deformación) para encarar el estudio del equilibrio en su posición deformada. No tiene en cuenta la posibilidad de que la barra, como en el caso de la 1er. Teoría de Engesser, flexione con incrementos continuos de carga. Es decir, para el estudio del equilibrio se supone que la barra se encuentra en una posición de equilibrio indiferente bajo la acción de la carga P_{kl} .



F. R. Shanley en su trabajo "*Inelastic Column Theory*" (Journal of the Aeronautical Sciences, 1947) demostró mediante un ensayo muy simple la validez de la primera teoría de Engesser. (Ver "*Buckling Strength of Metal Structural*" F. Bleich- 1952 y "*Principles of Structural Stability Theory*" A. Chajes, 1974).

Como conclusión de su investigación se puede decir que: *"La carga del módulo tangente no define con precisión la carga de pandeo real, pero la misma puede ser considerada como el límite inferior de la carga de pandeo. Este es un límite, que en la mayoría de los metales utilizados en la ingeniería estructural, permanece inferior y muy próximo a la carga crítica de la columna"*.

En la obra citada de Bleich, el mismo autor propuso para la verificación de columnas en el período inelástico del material, la siguiente fórmula derivada de la teoría del módulo tangente:

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{(\sigma_y - \sigma_p)}{\left(\frac{l}{r}\right)^2} \left(\frac{l}{r}\right)^2$$

En la que:

- σ_y : Tensión de fluencia del material
- σ_p : Tensión de proporcionalidad
- r : Radio de giro mínimo de la sección
- l/r : Esbeltez correspondiente a σ_p

$$\left(\frac{l}{r}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_p}$$

- $\frac{l}{r}$: Esbeltez real máxima de la barra.

Introduciendo esta última en la anterior, resulta:

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{\sigma_p(\sigma_y - \sigma_p)}{\pi^2 E} \left(\frac{l}{r}\right)^2$$

Para el período elástico:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

De todos modos es necesario establecer una relación entre E y E_t que puede expresarse como:

$$\chi = \frac{E_t}{E}$$

y que a partir de las expresiones anteriores, puede ser re-escrita:

$$\chi = \frac{(\sigma_y - \sigma_c) \sigma_c}{(\sigma_y - \sigma_p) \sigma_p}$$

Los valores de χ están agrupados en la tabla siguiente y para los que se ha supuesto:

$\sigma_p = 1761 \text{ kgcm}^{-2}$ (25 kips / in²) y $\sigma_y = 2324 \text{ kgcm}^{-2}$ (33 kips / in²).

TABLA 3. Relación $\chi = E_t / E$ para acero estructural

σ_e	r	σ_e	r	σ_e	r	σ_e	r
25,0	1,000	27,0	0,810	29,0	0,580	31,0	0,3100
25,2	0,983	27,2	0,789	29,2	0,555	31,2	0,2810
25,4	0,965	27,4	0,767	29,4	0,529	31,4	0,2510
25,6	0,947	27,6	0,745	29,6	0,503	31,6	0,2210
25,8	0,929	27,8	0,723	29,8	0,477	31,8	0,1908
26,0	0,910	28,0	0,700	30,0	0,450	32,0	0,1600
26,2	0,891	28,2	0,677	30,2	0,423	32,2	0,1288
26,4	0,871	28,4	0,652	30,4	0,395	32,4	0,0972
26,6	0,851	28,6	0,629	30,6	0,367	32,6	0,0652
26,8	0,831	28,8	0,605	30,8	0,339	32,8	0,0328
						33,0	0

Las Especificaciones ASD (*Allowable Stress Design*) de la AISC adoptaron, como base para la verificación de columnas, las fórmulas de Bleich introduciéndoles modificaciones acordes con los resultados de los ensayos, de esta manera, los valores de las tensiones críticas de pandeo para el período inelástico resultan, según la ASD:

$$\sigma_{cr} = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{r \cdot l' / r} \right)^2 \right] \cdot \sigma_y$$

en las que:

$$\left(\frac{l'}{r}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_p}$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_y}{2}$$

El valor adoptado para la tensión de proporcionalidad σ_p , igual a la mitad de la tensión de fluencia σ_y , interpreta el resultado de los ensayos con barras comprimidas, durante los cuales ha quedado de manifiesto la influencia que las tensiones residuales de los procesos de laminación o de armado de los perfiles de acero, tienen en las cargas críticas de pandeo (ver "*The influence of Residual Stresses on the Instability of Columns*", A.W. Huber, Lehigh University, 1956), especialmente en el período elasto-plástico.

Además es:

$$\frac{l'}{r} = \sqrt{\frac{2\pi^2 \cdot E}{\sigma_y}} = C_c$$

con la nomenclatura americana:

para

$$\frac{k.l}{r} \leq C_c$$

la tensión crítica de pandeo resulta igual a:

$$F_{cr} = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k.l}{r.C_c} \right)^2 \right] F_y$$

en las que C_c es igual a:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}}$$

k : es el factor de longitud de pandeo equivalente (Según CIRSOC es β).

Para el período elástico:

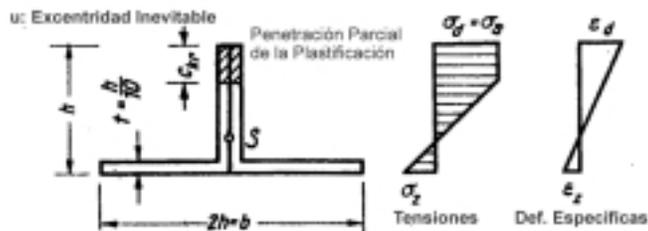
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{k.l}{r} \right)^2} \quad \text{con} \quad \frac{k.l}{r} > C_c$$

La Norma DIN 4114, lo mismo que el actual CIRSOC 302, introduce el concepto de la "Tensión Crítica Real", para el campo inelástico de barras comprimidas (Ver "Stabilitätstheorie", Bürgermeister – Steup, 1959, Berlin). Este concepto desarrollado por Jezek, se apoya en un conjunto de hipótesis "reales" (en contraposición de las "ideales" de Euler) y que consisten en aceptar, en primer lugar o como primera hipótesis, la evidencia de una "excentricidad inicial inevitable" en la aplicación de las cargas axiales, μ :

$$\mu = \frac{i}{20} + \frac{l}{500}$$

en la que: i : es el radio de giro mínimo de la sección
y l : es la longitud de pandeo de la barra.

El primer término de la ecuación representa la parte de "excentricidad inevitable" debida a la aplicación del esfuerzo axial a través de los medios de unión y el segundo término tiene en cuenta la curvatura inicial de la barra, que debe estar dentro de las tolerancias aceptables de fabricación.



Esta teoría adopta también para su desarrollo, como segunda hipótesis desfavorable, una sección T para la barra y a la vez supone para el material un comportamiento elasto-plástico ideal según Prandtl.

Mediante la "Teoría de la Tensión Crítica Real" se establece:

$$\lambda = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{kr}} \left[1 - \frac{m \cdot \sigma_{kr}}{\sigma_f - \sigma_{kr}} + 0,25 \cdot \left(\frac{m \cdot \sigma_{kr}}{\sigma_f - \sigma_{kr}} \right)^2 - 0,005 \cdot \left(\frac{m \cdot \sigma_{kr}}{\sigma_f - \sigma_{kr}} \right)^3 \right]$$

en la cual: $m = 2,317 \left(0,5 + \frac{\lambda}{500} \right)$

Resulta así una función implícita que debe resolverse por aproximaciones sucesivas para obtener el valor de σ_k correspondiente a un valor de λ elegido.

Todas las teorías reseñadas hasta ahora, están representadas en la figura de la página siguiente para su comparación.



σ_{kI} : Tensión crítica ideal de Euler

σ_{kI} : Tensión crítica de Engesser Teoría I: $E_t = E \left[\frac{(\sigma - \sigma_P)^2}{\sigma_F - \sigma_P} \right]$

σ_{kII} : Tensión crítica de Engesser Teoría II: $T = \frac{4E_t E}{(\sqrt{E_t} + \sqrt{E})^2}$

σ_{kr} : Tensión crítica real (s/ DIN 4114 – CIRSOC 302)

$F_{cr} - ASD$: Tensión crítica s/ ASD-AISC

$F_{cr} - LRFD$: Tensión crítica s/ LRFD-AISC que desarrollaremos más adelante.

FACTORES QUE INFLUENCIAN LA RESISTENCIA DE LA COLUMNA

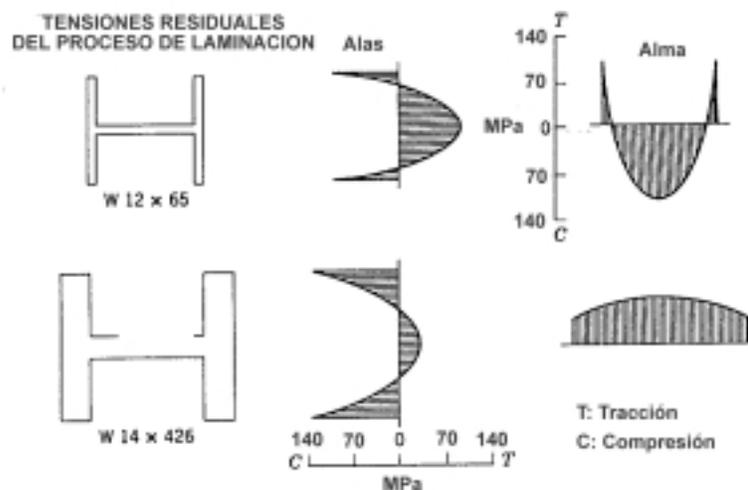
Hasta ahora la determinación de la carga crítica se ha basado en consideraciones de carácter teórico, con excepción de la ASD del AISC en cuyo caso, el criterio adoptado estaba fuertemente influenciado por el resultado de ensayos. Aquellas consideraciones teóricas han incluido sólo algunos de los factores que influyen sobre dicha carga crítica (por ejemplo, como hemos visto, la “excentricidad inevitable”, forma de la sección, etc.). Haremos a continuación una enumeración global de los factores que influyen en la capacidad resistente de las columnas:

- 1) Calidad o grado del acero.
 - a) Relación tensiones-deformaciones
 - b) Tensión de fluencia
- 2) Método de fabricación del material básico (barras, etc).
 - a) Laminado en caliente
 - b) Secciones armadas soldadas
 - b1) Usando planchuelas cortadas por oxicorte
 - b2) Usando planchuelas obtenidas por laminación
 - c) Perfiles enderezados en frío
 - c1) Rodillados (proceso continuo)
 - c2) Prensado (proceso puntual- discontinuo)
- 3) Tamaño del perfil (área de la sección).
- 4) Geometría de la sección transversal (W, C, H, T, etc).
- 5) Eje de flexión (x ó y) considerado.
- 6) Deformaciones iniciales de la barra (curvadas, torsionadas, etc).
 - a) Valor máximo
 - b) Distribución a lo largo de la columna
- 7) Condiciones de vínculo extremas
 - a) Con desplazamiento lateral impedido, articulado o de otra manera
 - b) Con desplazamiento lateral, articulado o de otra manera
 - c) Empotrado, con o sin desplazamiento lateral impedido.

De todos los factores que influyen en la resistencia de una columna, hay tres que son los más relevantes, estos son:

- 1) Método de fabricación
- 2) Deformaciones iniciales
- 3) Condiciones de vínculo

1) El método de fabricación de los perfiles que se utilizarán es uno de los factores principales, ya que refleja el nivel y distribución de las tensiones residuales. Las mismas se encuentran íntimamente ligadas a las distintas formas del suministro y a la disipación del calor durante el enfriamiento después de la laminación.



σ_{RS} : 70 a 200 MPa (dependiendo del espesor)

Siempre se debe tener presente que:

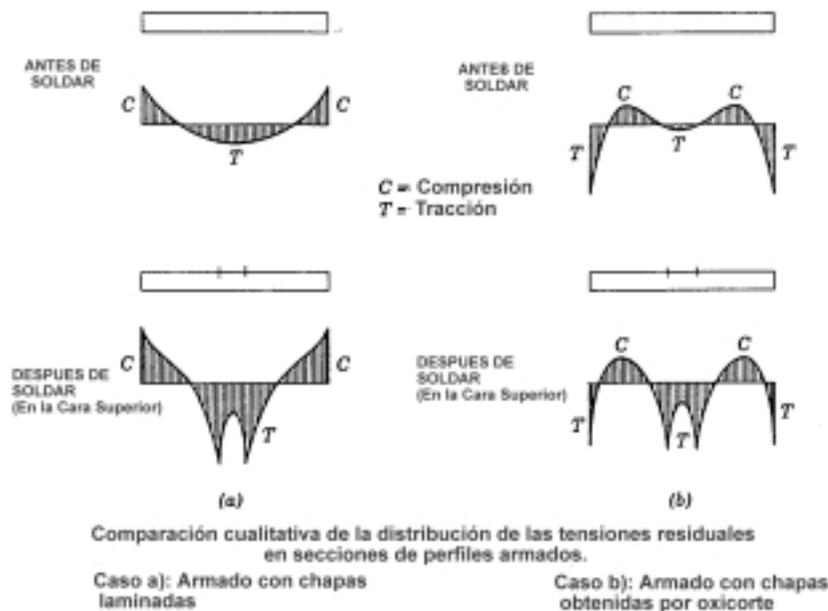
La intensidad de las tensiones residuales son independientes de la calidad del acero.

La figura anterior ilustra la distribución de tensiones residuales en dos perfiles tipo W laminados en caliente: ($W12 \times 65$ y $W14 \times 426$).

En general la formación de tensiones residuales puede resumirse en el "**Principio de las tensiones residuales**" que dice:

"Las fibras longitudinales de una barra que enfrían primero quedan con tensiones residuales de compresión, las que alcanzan la temperatura ambiente después, quedan con tensiones residuales de tracción".

Ilustraremos la diferencia entre las distribución de tensiones residuales de una placa obtenida por laminación y una placa obtenida por oxicrote (*flame-cut*):



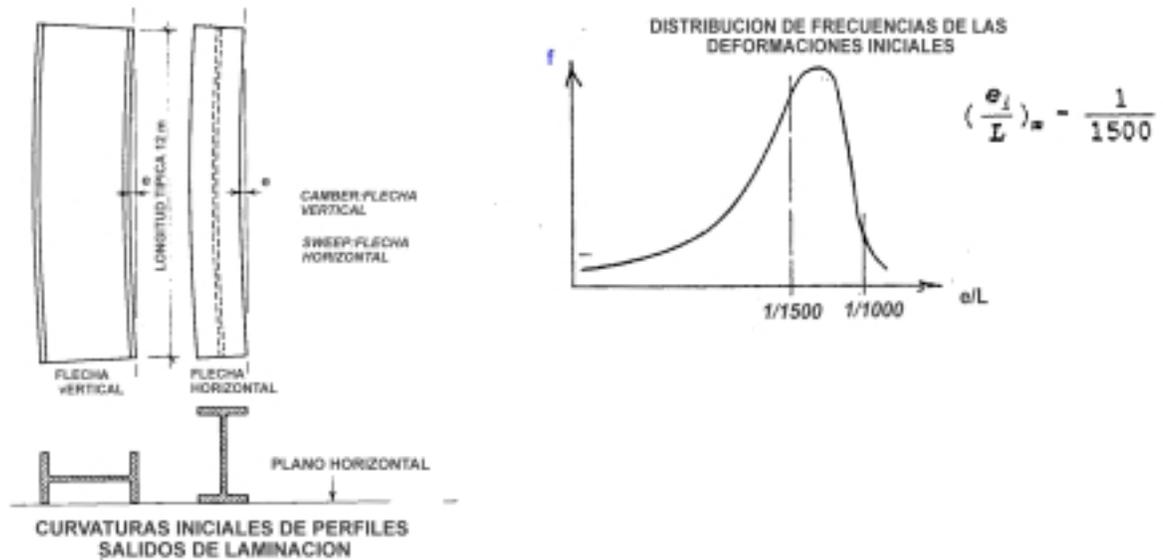
Como puede observarse en la chapa cortada por oxicrote existe un aporte de calor localizado, responsable de la distribución final de las tensiones residuales.

Si utilizamos ambos tipos de placas, especialmente como alas de perfiles armados soldados, obtendríamos las distribuciones de tensiones residuales que se indican en "después de soldar".

En el caso del perfil armado con placas cortadas por oxicrote se produce un alivio de las tensiones residuales, en términos relativos, después del enfriamiento a temperatura ambiente. Este efecto favorable, las hace preferibles para la fabricación de columnas armadas.

2) La hipótesis de columna recta es sólo una hipótesis ideal, los perfiles en general son expedidos con deformaciones - dentro de las tolerancias de fabricación - que dependen fundamentalmente de las condiciones de enfriamiento. De acuerdo a la posición en que los mismos son ubicados en la cuna de enfriamiento, después del proceso de laminación, pueden adquirir curvaturas según ambos ejes principales.

Las tolerancias fijadas para naciones industrializadas están referidas a la longitud de la barra y vale para perfiles $W : e_i \leq \frac{L}{1000}$ para otros tipos de perfiles los valores de e_i son diferentes. Los perfiles laminados W tienen una distribución de frecuencias de e_i/L aproximada como se indica en la figura, con un promedio de $L/1500$. La curva de tensiones críticas de la LRFD está basada sobre un valor medio de $L/1500$.



3) Las condiciones de vínculo son tenidas en cuenta a partir de la introducción de los factores k de longitud de pandeo equivalente y de la resolución de las estructuras planas o espaciales teniendo en cuenta los efectos de segundo orden.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Las líneas de trazos indican las elásticas de deformación correspondientes a los modos de pandeo						
Valor teórico de k	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Valor recomendado de k cuando las condiciones ideales son aproximadas	0.65	0.80	1.2	1.0	2.10	2.0
Símbolos de las condiciones de Vínculo						
		Rotación Fija	Traslación Fija	Rotación Libre	Traslación Fija	Rotación Fija
		Rotación Libre	Traslación Libre	Rotación Fija	Traslación Libre	Rotación Libre
		Rotación Libre	Traslación Libre	Rotación Libre	Traslación Libre	Rotación Libre

Factores k de Longitud Equivalente de Pandeo para columnas con carga centrada y distintas condiciones de vínculo

CRITERIO PARA EL CALCULO DE LA RESISTENCIA DE COLUMNAS SEGUN LA LRFD

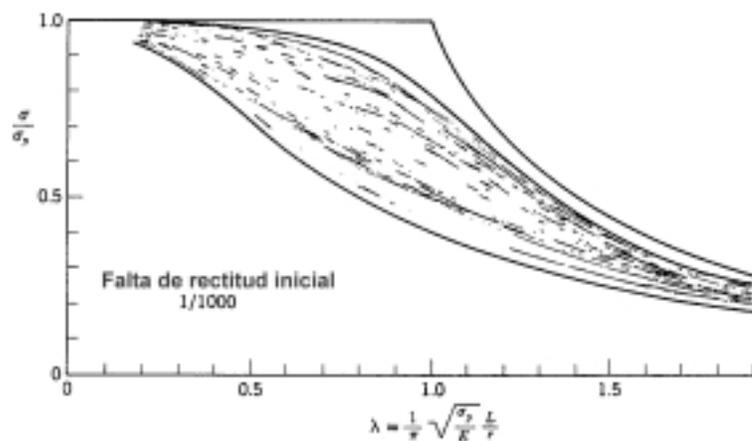
Antecedentes.

El Ingeniero Reidar BJORHOVDE (1972) dió una solución para resolver el problema de la determinación de la resistencia de una columna, aplicando un método racional que incluya al menos, los principales factores que afectan dicha resistencia (las propiedades del material, las tensiones residuales y las imperfecciones geométricas).

A partir de datos disponibles de ensayos cuidadosamente realizados en la Universidad de Lehigh, se llevó a cabo un análisis computarizado de la máxima resistencia de columnas y se demostró que el método de análisis numérico daba una predicción precisa de la resistencia obtenida en esos ensayos.

A continuación se generó un conjunto de 112 "curvas de columnas" ("column curve") para barras de las que se disponían mediciones de sus tensiones residuales, suponiendo además que su curvatura inicial era una semi-onda senoidal de máxima amplitud $L/1000$ y que estaban articuladas en sus extremos. Los perfiles utilizados abarcaban los principales perfiles utilizados para columnas, incluyendo perfiles laminados y soldados de dimensiones pesadas y livianas. Las "curvas de columnas" así obtenidas representan el espectro total del comportamiento de las columnas de acero.

Las curvas resultantes están representadas en la figura 5.11.

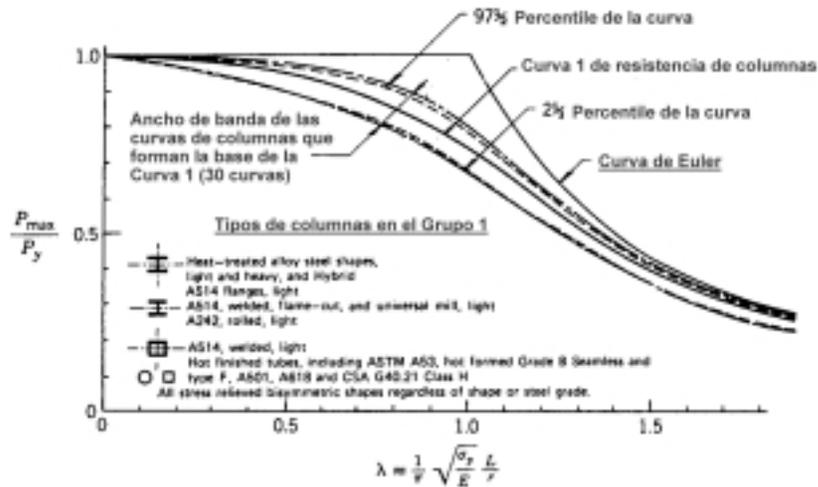


Curvas de resistencia máxima para diferentes tipos de columnas (Bjorhovde, 1972).
Figura 5.11

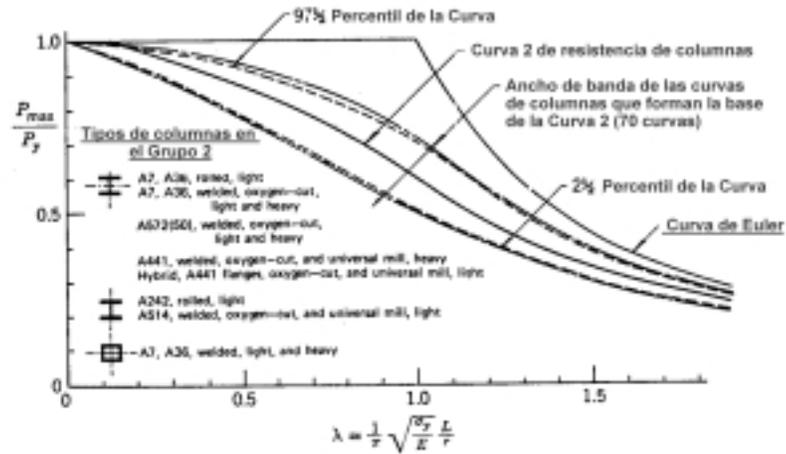
BJORHOVDE observó que existían grupos definidos entre las diferentes curvas, de los cuales fueron identificados tres subgrupos mediante una curva "media" para cada uno de ellos. Estas curvas promedio son conocidas como "SSRC (*Stability Steel Research Column*) Column Curves 1, 2 and 3" y son reproducidas en las figuras 5.12 a 5.14.

Estas figuras incluyen:

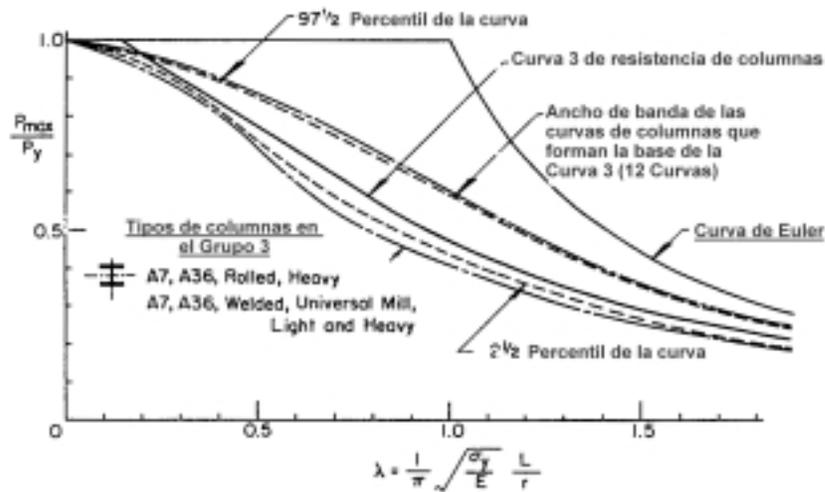
- 1) El número de "curvas de columnas" utilizadas para el análisis estadístico y el ancho de su banda de dispersión.
- 2) Para cada conjunto de curvas se indican dos percentiles de 2 1/2 y 97 1/2 para los límites inferior y superior de probabilidad.
- 3) Los tipos de columnas a los que cada conjunto de curvas se refieren.



Curva 1 de Resistencia de Columnas del SSRC para acero estructural (Bjorhovde,1972).
(Basada en la resistencia máxima y falta de rectitud inicial de 0.001L)
Figura 5.12



Curva 2 de Resistencia de Columnas del SSRC para acero estructural (Bjorhovde,1972)
(Basada en la resistencia máxima y falta de rectitud inicial de 0.001L)
Figura 5.13



Curva 3 de Resistencia de Columnas del SSRC para acero estructural (Bjorhovde, 1972)
(Basada en la resistencia máxima y falta de rectitud inicial de 0.001L)
Figura 5.14

Basado en análisis probabilístico, BJORHOVDE desarrolló curvas múltiples para las cuales la curvatura inicial media fuera igual a $L/1450$. Estas curvas representadas en la Figura 5.15 están descriptas por las siguientes ecuaciones:

SSRC Curve 1P

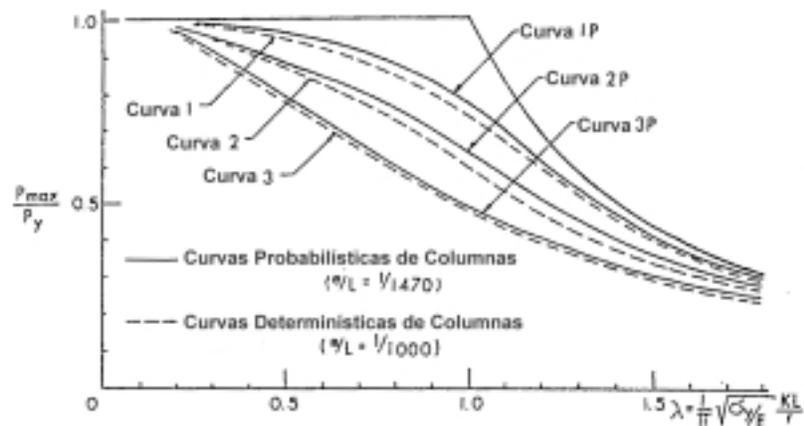
- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. Para $0 \leq \lambda \leq 0,15$ | $\sigma_u = \sigma_y$ |
| 2. Para $0,15 \leq \lambda \leq 1,2$ | $\sigma_u = \sigma_y (0,979 + 0,205.\lambda - 0,423.\lambda^2)$ |
| 3. Para $1,2 \leq \lambda \leq 1,8$ | $\sigma_u = \sigma_y (0,03 + 0,842.\lambda^{-2})$ |
| 4. Para $1,8 \leq \lambda \leq 2,6$ | $\sigma_u = \sigma_y (0,018 + 0,881.\lambda^{-2})$ |
| 5. Para $\lambda \geq 2,6$ | $\sigma_u = \sigma_y (= \text{Curva Euler})$ |

SSRC Curve 2P

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. Para $0 \leq \lambda \leq 0,15$ | $\sigma_u = \sigma_y$ |
| 2. Para $0,15 \leq \lambda \leq 1,0$ | $\sigma_u = \sigma_y (1,03 - 0,158.\lambda - 0,206.\lambda^2)$ |
| 3. Para $1,0 \leq \lambda \leq 1,8$ | $\sigma_u = \sigma_y (-0,193 + 0,803.\lambda^{-1} + 0,056.\lambda^{-2})$ |
| 4. Para $1,8 \leq \lambda \leq 3,2$ | $\sigma_u = \sigma_y (0,018 + 0,815.\lambda^{-2})$ |
| 5. Para $\lambda \geq 3,2$ | $\sigma_u = \sigma_y \lambda^{-2}$ |

SSRC Curve 3P

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. Para $0 \leq \lambda \leq 0,15$ | $\sigma_u = \sigma_y$ |
| 2. Para $0,15 \leq \lambda \leq 0,8$ | $\sigma_u = \sigma_y (1,091 - 0,608.\lambda)$ |
| 3. Para $0,8 \leq \lambda \leq 2,0$ | $\sigma_u = \sigma_y (0,021 + 0,385.\lambda^{-1} + 0,066.\lambda^{-2})$ |
| 4. Para $2,0 \leq \lambda \leq 4,5$ | $\sigma_u = \sigma_y (0,005 + 0,9.\lambda^{-2})$ |
| 5. Para $\lambda \geq 4,5$ | $\sigma_u = \sigma_y \lambda^{-2} (= \text{curva Euler})$ |



Comparación de curvas múltiples de columnas desarrolladas sobre la base de un valor medio de fuera de rectitud de $L/1470$ y un valor máximo de fuera de rectitud de $L/1000$. (Bjorhovde, 1972).
Figura 5.15

No obstante, mediante el ajuste de una expresión matemática adecuada a la curva 2P se desarrolló una única ecuación que es la adoptada, en definitiva, por *LRFD AISC Specification*.

$$F_{cr} = 0,685 \lambda_c^2 F_y \quad \text{para } \lambda_c \leq 1,5$$

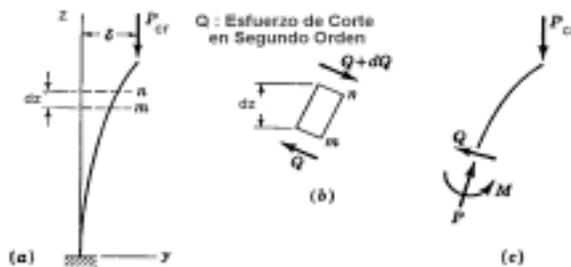
$$F_{cr} = \frac{0,877}{\lambda_c^2} F_y \quad \text{para } \lambda_c > 1,5$$

y en donde $\lambda_c = \frac{k.l}{\pi.r} \sqrt{\frac{F_y}{E}}$

El factor (0,877) en la segunda expresión tiene en cuenta la curvatura inicial en las barras de gran esbeltez.

INFLUENCIA DEL ESFUERZO DE CORTE DE SEGUNDO ORDEN

El análisis de la influencia del esfuerzo de corte en segundo orden de una barra axilmente comprimida, cargada con la carga crítica ideal que le corresponde (Burgermeister, OC pág. 49, Bleich, OC pág. 171), nos conduce a:



$$P_{crQ} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \bar{\gamma} \pi^2 \frac{E \cdot J}{L^2}\right]}$$

o bien:

$$P_{crQ} = P_{ki} \cdot \frac{1}{\left[1 + \bar{\gamma} \cdot P_{ki}\right]}$$

en la que:

P_{crQ} : es la carga crítica de pandeo de una barra tomando en consideración la influencia el esfuerzo de corte de segundo orden (proyección del esfuerzo P_{cri} sobre el plano de la sección extrema de la barra, en su posición deformada).

P_{cri} : es la carga crítica de pandeo ideal de Euler.

$\bar{\gamma}$ es la distorsión unitaria (debida a un esfuerzo de corte $\bar{Q} = 1$)

$$\bar{\gamma} = \frac{\chi}{A \cdot G}$$

χ : es un coeficiente que depende de la forma de la sección (ver Belluzzi *Ciencia de la Construcción* Tomo 1 – pág. 240)

El segundo término del denominador de las expresiones correspondientes a P_{crQ} refleja la influencia del esfuerzo de corte de segundo orden en la carga crítica de pandeo.

Si reemplazamos E por E_t y G por G_t , teniendo en cuenta que:

$$\frac{E_t}{G_t} = 2(1 + \mu)$$

obtendremos una expresión generalizada de F_{cr} :

$$F_{cr} = \frac{P_{crQ}}{A} = \frac{\pi^2 E_t}{\left(\alpha_v \frac{k.L}{r}\right)^2}$$

en la cual es:

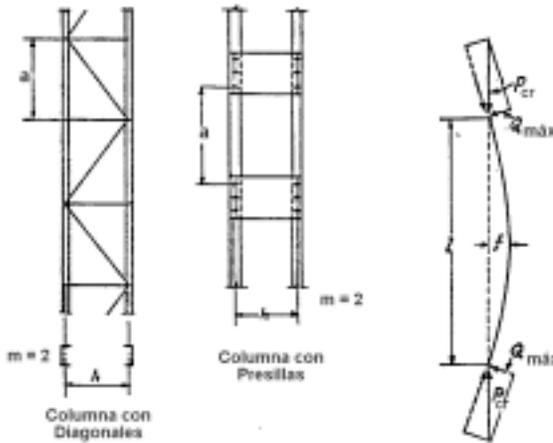
$$\alpha_v = \sqrt{1 + 2 \cdot (1 + \mu) \pi^2 \cdot \frac{\chi}{\left(\frac{k.L}{r}\right)^2}}$$

en secciones de alma llena α_v resulta

$\frac{k.L}{r}$	α_v
50	1,01
70	1,005
100	1,003

es decir, la influencia del esfuerzo de corte en barras de alma llena, es depreciable.

Bleich (OC) obtiene para columnas armadas con diagonales y con presillas, una expresión del tipo:



$$\left(\frac{kl}{r}\right)_m = \sqrt{\left(\frac{kl}{r}\right)_o^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{kl_1}{r_1}\right)_1^2}$$

en la cual:

$\left(\frac{kl}{r}\right)_m$: es la esbeltez modificada (*ideal*) de la barra incluyendo la influencia del esfuerzo de corte.

$\left(\frac{kl}{r}\right)_o$: es la esbeltez de la barra considerada como un todo (como si fuera de alma llena).

$\left(\frac{kl_1}{r_1}\right)_1$: es una esbeltez *ficticia* que puede

coincidir o no con alguna esbeltez parcial de la columna armada. En rigor, la función de este término es penalizar – disminuyéndola - la tensión crítica de pandeo de una columna armada, mediante el aumento ficticio de su esbeltez.

m : es el número secciones simples ubicados a ambos lados del eje, alrededor del cual, se analiza el pandeo global de la columna.

Esta expresión obtenida por Bleich, muestra la clara influencia que tiene el esfuerzo de corte en columnas armadas con diagonales o con presillas, sobre la carga crítica de pandeo. Evidentemente, las ordenadas η de las deformaciones, que condicionan el valor del momento externo de segundo orden $P \cdot \eta$ en la ecuación de equilibrio elástico, son relativamente mucho mayores en las columnas armadas que en las de alma llena. Como el momento interno $EJ \frac{d\eta^2}{dz^2}$ para una columna dada depende de las características de su sección transversal, la ecuación de equilibrio interno de la barra deformada:

$$\frac{d\eta^2}{dz^2} + \frac{P}{EJ} \cdot \eta = 0$$

aplicada a columnas armadas, exigirá un valor menor de P_{cr} para quedar satisfecha, ya que los brazos de palanca externos son mayores. Esta situación queda interpretada por el término adicional de esbeltez ficticia, determinado por Bleich y que vale:

Para columnas con *diagonales*:
$$\left(\frac{kl_1}{r_1}\right)_1 = \pi \sqrt{\frac{A \cdot d^3}{z \cdot F_D \cdot e^2 \cdot s_1}}$$

Para columnas con *presillas*:
$$\left(\frac{kl_1}{r_1}\right)_1 = \frac{l_1}{r_1}$$

- En estas expresiones:
- A: es el área total de la sección de la columna.
 - d: es la longitud de la diagonal entre nudos extremos.
 - F_D : área de la sección de una diagonal.
 - z: número de diagonales dispuestas una frente a otra, en planos paralelos.
 - e: distancia entre los baricentros de las secciones simples que componen la sección de la columna (= h en la fig.).
 - s_1 : es la longitud de la diagonal proyectada sobre la dirección de los parantes de la columna (=a en la figura).
 - l_1 : longitud de pandeo parcial de un parante, coincidente con la distancia entre los nudos determinados por las presillas y parantes (=a en la figura).
 - r_1 : radio de giro mínimo de una sección simple.

Estas expresiones para el cálculo de la esbeltez de las columnas fueron adoptadas oportunamente por las Normas DIN 4114 y CIRSOC 302.

La **AISC-LRFD** adopta expresiones similares:

En el caso de diagonales intermedias, unidas con bulones de alta resistencia en la condición de *apretado inicial*:

$$\left(\frac{kl}{r}\right)_m = \sqrt{\left(\frac{kl}{r}\right)_o^2 + \left(\frac{a}{r_i}\right)^2}$$

Para el caso de diagonales intermedias con uniones soldadas o con uniones de bulones *antideslizantes*:

$$\left(\frac{kl}{r}\right)_m = \sqrt{\left(\frac{kl}{r}\right)_o^2 + 0.82 \cdot \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)} \left(\frac{a}{r_{ib}}\right)^2}$$

en las cuales:

$\left(\frac{kl}{r}\right)_o$ es la esbeltez de la columna compuesta actuando como una unidad.

$\left(\frac{kl}{r}\right)_m$ esbeltez modificada de la columna compuesta

$\frac{a}{r_i}$ es la esbeltez mayor de un componente individual.

a distancia entre elementos de unión (platabandas, diagonales, medios de unión, etc.)

r_i radio de giro mínimo de un componente individual.

$\frac{a}{r_{ib}}$ es la esbeltez de un componente individual relativa al eje baricéntrico paralelo al eje de pandeo.

r_{ib} : radio de giro de un componente individual respecto del eje baricéntrico paralelo al eje de pandeo.

α : índice de separación $\alpha = \frac{h}{2r_{ib}}$

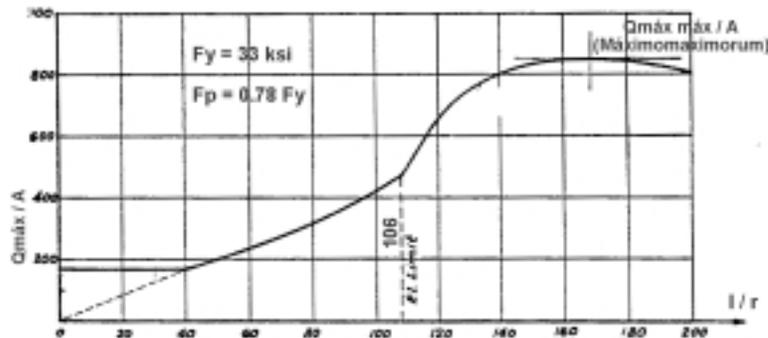
h: distancia entre los baricentros de los componentes individuales medida perpendicularmente al eje de pandeo.

EVALUACION DEL ESFUERZO DE CORTE DE SEGUNDO ORDEN

Para el dimensionamiento de los elementos de arriostramiento, diagonales o presillas, es necesario poder evaluar el esfuerzo de corte de segundo orden que estará presente en la configuración de pandeo de la columna analizada. Según Bleich (OC, página 179, artículo 55) el esfuerzo de corte de segundo orden máximo, que se produce en una columna cargada axialmente, articulada en sus extremos y en su posición deformada de equilibrio elástico, está dado por:

$$Q_{m\acute{a}x} = 2\pi (\sigma_y - \sigma_{cr}) \cdot A \frac{r}{l}$$

$$= 2\pi (\sigma_y - \sigma_{cr}) \cdot \frac{A}{l/r}$$



Ley de variación del Esfuerzo de Corte (máximo) de Segundo Orden en los extremos de una columna axialmente cargada en función de la esbeltez global de la misma l/r .

vemos que $Q_{m\acute{a}x}$ es variable con la esbeltez l/r :

$$Q_{m\acute{a}x} = 2\pi (P_p - P_{cr}) \cdot \frac{1}{l/r}$$

en la que P_p es la carga axial de plastificación total de la sección:

$$\frac{Q_{m\acute{a}x}}{P_{cr}} \cong \frac{V}{P} = 2\pi \left(\frac{P_p}{P_{cr}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{l/r}$$

V : Esfuerzo de corte para el dimensionamiento (según nomenclatura AISC)

P : Carga actuante

$$\text{Para } \frac{l}{r} = 80 \quad \frac{P_p}{P_{cr}} \cong \frac{2,4}{1,86} = 1,3$$

$$\text{de aquí: } \frac{V}{P} = 0,023$$

La Especificación LRFD adopta:

$$\frac{V}{P_n} = 0.02$$

En la que P_n es la resistencia nominal a compresión de la columna.

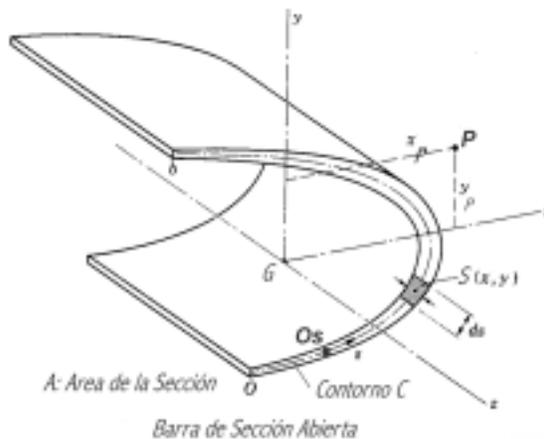
ELEMENTOS BASICOS PARA EL ESTUDIO DEL PANDEO POR TORSION PURA O POR FLEXO-TORSION

Daremos algunos elementos básicos para el estudio del pandeo por flexo-torsión, de manera que podamos estar familiarizados con el significado de muchos de los términos que intervienen en este fenómeno y que utilizaremos posteriormente. En general este tema se encuentra desarrollado en cualquiera de los libros indicados en las referencias, especialmente en el de Timoshenko-Gere (OC), a los que podemos agregar el libro de Basile Z. Vlassov "Pièces Longues en Voiles Minces" (existe versión en inglés) como uno de los referentes bibliográficos más importantes sobre el tema.

1) Concepto de Coordenada Sectorial

En primer lugar definiremos el concepto de coordenada sectorial ω . (Ver también el apunte de *Coordenadas Sectoriales* del autor).

Para una sección abierta, como la indicada en la figura, definiremos como coordenada sectorial $\omega^{(P,O)}$ del punto $S(x_S, y_S)$ respecto de un polo $P(x_P, y_P)$ y un origen sectorial $O_S(x_O, y_O)$ arbitrarios, como el doble del área barrida por el vector posición \bar{r} cuando, con un extremo apoyado en P , su extremo libre describe la línea media C de la sección (denominada contorno) hasta alcanzar el punto genérico S . El punto O_S tomado como origen del sistema debe pertenecer al contorno, en cambio el polo P puede pertenecer o no al mismo.



Dado un contorno C referido a un sistema coordenadas sectoriales (P, O_S) y ejes x, y podemos escribir la expresión de la coordenada sectorial de un punto genérico perteneciente al contorno, como:

$$\omega^{(PO_S)} = \int_{O_S}^S (x - x_P) dy - \int_{O_S}^S (y - y_P) dx = \int_{O_S}^S x dy - \int_{O_S}^S y dx - x_P \int_{y_{O_S}}^y dy + y_P \int_{x_{O_S}}^x dx$$

2) Características Geométricas de una Sección

Así como hemos definido algunas propiedades geométricas (momentos de primero y segundo orden, etc) de secciones planas respecto a sistemas de ejes coordenados, es posible definir propiedades similares respecto del sistema de coordenadas sectoriales, es decir:

Momento estático sectorial o de primer orden: $S_{\omega}^{(PO_S)} = \int_F \omega^{(PO_S)} dF$

Momento de inercia sectorial o de segundo orden: $I_{\omega}^{(PO_S)} = \int_F \omega^{(PO_S)^2} dF$

Momento centrífugo sectorial o de segundo orden respecto del eje y :

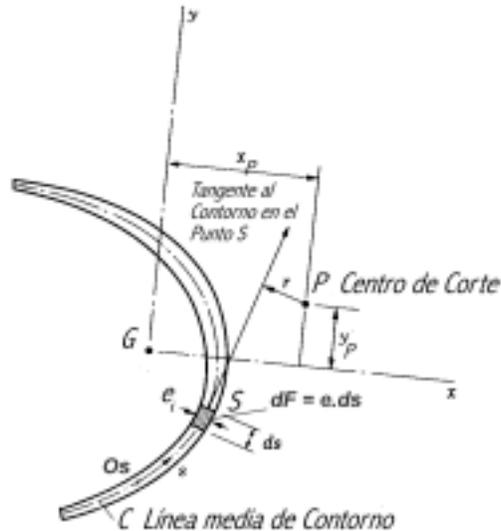
$$I_{\omega_y}^{(PO_S)} = \int_F \omega^{(PO_S)} x dF$$

o bien, momento centrífugo sectorial respecto del eje x:

$$I_{\omega x}^{(P O_s)} = \int_F \omega^{(P O_s)} y dF$$

Se debe tener presente que cada una de estas características, tal como lo establece la definición de coordenada sectorial, debe estar referida invariablemente al sistema de referencia (P, O_s) elegido y en el caso de los momentos centrífugos, éstos deben estar también referidos a los ejes x e y adoptados.

Mostraremos algunas propiedades de estas características geométricas:



- 2.1) Para cualquier punto tomado como polo de la sección habrá siempre un origen sectorial, denominado *Origen Sectorial de Primer Orden* O_s' , para el cual el momento estático sectorial es nulo:

$$S_{\omega}^{O_s'} = 0$$

- 2.2) Existirá siempre un punto, perteneciente al plano de la sección, que tomado como polo hará que el momento de inercia sectorial sea mínimo, en este caso, dicho momento se denomina corrientemente, *Módulo de Alabeo de la Sección* ($I_{\omega} = C_M$ ó C_W según diversas

nomenclaturas).

- 2.3) El punto que tomado como polo satisface la condición de momento de inercia sectorial mínimo, es único y se denomina *Polo Principal* \bar{P} de la sección y coincide con el *Centro de Corte* de la misma. (Ver en la publicación *Coordenadas Sectoriales* del autor la justificación de esta coincidencia)

Las coordenadas del Centro de Corte, referidas a un sistema de ejes principales baricéntricos (ξ, η) , están dadas por:

$$\xi_{\bar{P}} = \frac{I_{\omega_{\xi}}^{(G O_s)}}{I_{\xi}} \qquad \eta_{\bar{P}} = \frac{I_{\omega_{\eta}}^{(G O_s)}}{I_{\eta}}$$

- 2.4) En secciones con doble eje de simetría el Polo Principal coincide con el baricentro de la sección (Perfiles IPN, W, etc). En secciones de simetría simple (Perfiles UPN, doble T de alas desiguales, etc.) el Polo Principal se encuentra sobre el eje de simetría. En secciones cuyo módulo de alabeo es nulo (secciones T, angulares dobles, etc.), el Polo Principal se encuentra en la intersección de las ramas que componen la sección.
- 2.5) El origen sectorial, perteneciente al Polo Principal \bar{P} que satisface la condición de momento estático nulo, se lo denomina *Origen Sectorial Principal* o de *Segundo Orden* \bar{O}_s .

- 2.6) Los puntos \bar{P} , \bar{O}_s y el baricentro G de la sección están alineados sobre una recta que se denomina *Eje Sectorial Principal*.
- 2.7) Los valores de los momentos centrífugos sectoriales $I_{\omega x}$ e $I_{\omega y}$ para un sistema de referencia sectorial (P, O_s) arbitrario son, para un polo P dado, independientes de la ubicación del origen sectorial, pero son nulos cuando el polo adoptado es el Polo Principal o el Centro de Corte de la Sección.

3) Planteo Generalizado de las Ecuaciones de Equivalencia en Barras de Sección Abierta.

Escribiremos primero las ecuaciones de equivalencia conocidas y que corresponden a los seis esfuerzos, hasta ahora, estáticamente definidos:

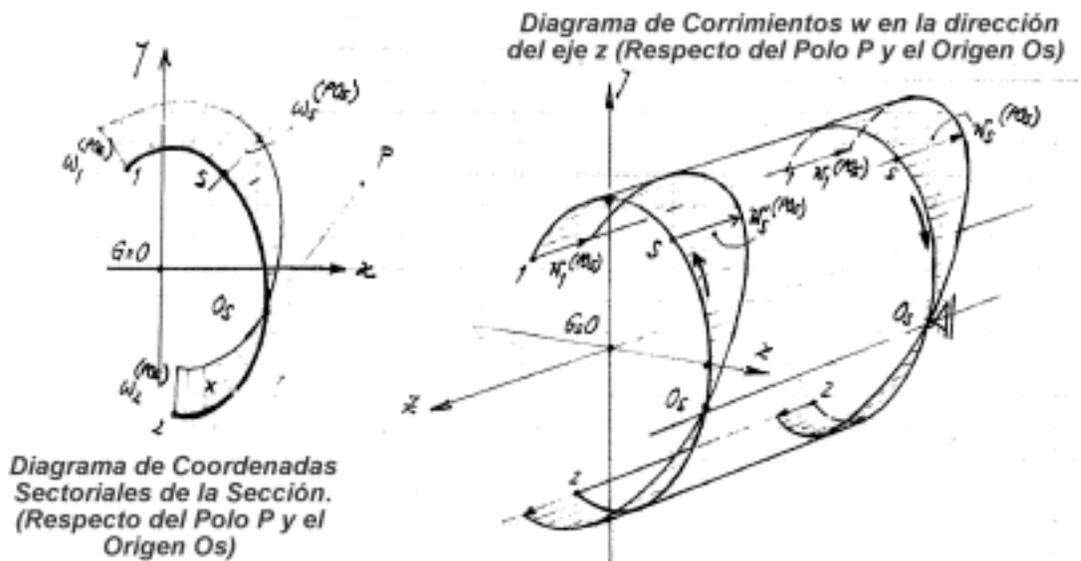
Esfuerzo Normal:	$N = \int_A \sigma \cdot dA$
Momento flexor alrededor del eje x:	$M_x = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = -EI_x \cdot \frac{d^2 v}{dz^2}$
Momento flexor alrededor del eje y:	$M_y = \int_A \sigma \cdot x \cdot dA = -EI_y \cdot \frac{d^2 u}{dz^2}$
Esfuerzo de Corte en la dirección del eje x:	$Q_x = \int_A \tau \cdot e \cdot dx = -EI_y \cdot \frac{d^3 u}{dz^3}$
Esfuerzo de Corte en la dirección del eje y:	$Q_y = \int_A \tau \cdot e \cdot dy = -EI_x \cdot \frac{d^3 v}{dz^3}$
Momento Torsor (Para alabeo libre):	$M_{zSV} = \int_A \tau \cdot r \cdot dA = GJ \cdot \frac{d\phi}{dz}$

J : es el Módulo de Torsión de la sección en estudio.

Estas ecuaciones deben ser planteadas, en su forma generalizada, tomando como centro de momentos el Centro de Corte de la sección.

La relación existente entre la coordenada sectorial ω de un punto del contorno de una sección de una barra sometida a torsión y el alabeo w de la sección (corrimiento de dicho punto en la dirección del eje longitudinal z de la barra), está dada por:

$$w^{(P, O_s)} = -\omega^{(P, O_s)} \cdot \frac{d\phi}{dz}$$



en la que: $\frac{d\phi}{dz}$ es el ángulo específico de torsión.

Si el alabeo en una sección de la barra está impedido aparecerán tensiones normales dadas por:

$$\sigma^{(P, O_s)} = E \frac{dw^{(P, O_s)}}{dz} = -E \cdot \omega^{(P, O_s)} \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2}$$

Podemos establecer ahora las siguientes ecuaciones adicionales de equivalencia, que resultan de aplicar la coordenada sectorial como variable en el contorno de la sección:

Bimomento de flexión debido al alabeo impedido:

$$B_\omega = \int_A \sigma \cdot \omega^{(\bar{P}, \bar{O}_s)} \cdot dA = -EI_\omega \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2}$$

Momento Torsor (Para alabeo impedido): $M_{z\omega} = \int_A \tau \cdot e \cdot d\omega^{(\bar{P}, \bar{O}_s)} = -EI_\omega \cdot \frac{d^3 \phi}{dz^3}$

Debemos hacer notar que el momento total aplicado M_Z , alrededor del centro de corte, será igual a:

$$M_Z = M_{ZSV} + M_{z\omega}$$

Los valores de M_{ZSV} y $M_{z\omega}$ pueden ser determinados a partir de la resolución de la ecuación diferencial:

$$EI_\omega \cdot \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GJ \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} = m_z$$

en donde:

$$m_z = \frac{dM_Z}{dz}$$

con:

$$\lambda = \sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}}$$

la solución de la ecuación diferencial es:

$$\phi = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{Sh} \lambda z + C_4 \operatorname{Ch} \lambda z + \phi \text{ (Particular)}$$

Las constantes de integración C_i se calculan a partir de las condiciones de borde del problema y de la solución particular adoptada. Por derivaciones sucesivas de ϕ podrán calcularse las funciones de los esfuerzos B_ω , $M_{z\omega}$ y M_{ZSV} . (Ver numerosos casos resueltos en "Formulario del Ingeniero" de Grekow, Isnard y Mrozowicz).

3) Determinación de las tensiones normales y tangenciales en un punto de una sección a partir de la superposición de las tensiones correspondientes a cada esfuerzo característico.

En una sección abierta las tensiones normales podrán ser determinadas mediante la siguiente expresión:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x + \frac{B_\omega}{I_\omega} \cdot \omega$$

en las que ω , x e y son las coordenadas del punto para el cual se calcula la tensión normal.

Las tensiones tangenciales estarán dadas por:

$$\tau = \frac{Q_x \cdot S_y}{I_y \cdot e} + \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot e} + \frac{M_{z\omega} \cdot S_\omega}{I_\omega \cdot e} + \frac{M_{zSV} \cdot e}{J}$$

4) Determinación de la carga crítica de pandeo por flexo-torsión (Ver Timoshenko-Gere, O.C., página 212, Burgermeister-Steup, O.C., página 237, etc.)

El estudio de las condiciones de equilibrio de una barra axialmente cargada en su posición deformada, con una sección transversal abierta sin ejes de simetría y a cuyo eje se le ha impuesto una deformación arbitraria generalizada (corrimiento y giro), nos conduce al planteo de las siguientes ecuaciones diferenciales de equilibrio:

$$(1) \quad EI_x \cdot \frac{d^4 v}{dz^4} + P \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} + P \cdot x_{\bar{P}} \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0$$

$$(2) \quad EI_y \cdot \frac{d^4 u}{dz^4} + P \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} - P \cdot y_{\bar{P}} \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0$$

$$(3) \quad EI_\omega^{(\bar{P}, \bar{O}_s)} \cdot \frac{d^4 \phi}{dz^4} - \left(GJ - \frac{P}{A} \cdot I_{\bar{P}} \right) \frac{d^2 \phi}{dz^2} + P \cdot y_{\bar{P}} \frac{d^2 u}{dz^2} - P \cdot x_{\bar{P}} \frac{d^2 v}{dz^2} = 0$$

Las ecuaciones anteriores han sido planteadas para los ejes principales baricéntricos de la sección y en las que:

$x_{\bar{P}}, y_{\bar{P}}$ son las coordenadas del centro de corte.

$I_\omega^{(\bar{P}, \bar{O}_s)}$ es el Módulo de Alabeo de la sección

$I_{\bar{P}}$ es el Momento de Inercia Polar de la sección respecto de su centro de corte \bar{P} .

J es el Módulo de Torsión

4.1) Caso de simetría central $x_{\bar{P}} = y_{\bar{P}} = 0$ (Secciones I de alas iguales)

En este caso las ecuaciones 1, 2 y 3 quedan reducidas a un sistema de tres ecuaciones independientes:

$$(1') \quad EI_x \cdot \frac{d^4 v}{dz^4} + N \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} = 0$$

$$(2') \quad EI_y \cdot \frac{d^4 u}{dz^4} + N \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$$

$$(3') \quad EI_\omega^{(\bar{P}, \bar{O}_s)} \cdot \frac{d^4 \phi}{dz^4} - \left(GJ - \frac{N}{A} \cdot I_{\bar{P}} \right) \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0$$

Las dos primeras ecuaciones 1' y 2' corresponden a los casos simples de pandeo por flexión de Euler, alrededor de los ejes x e y ; resolviendo ambas ecuaciones obtenemos los conocidos valores de las cargas críticas de pandeo:

$$P_{kx} = \pi^2 \cdot \frac{EI_x}{l^2}$$

y
$$P_{ky} = \pi^2 \cdot \frac{EI_y}{l^2}$$

en las que l es la longitud de pandeo de la barra.

De la resolución de la ecuación 3' se obtiene la carga crítica de pandeo por torsión pura $P_{k\theta}$:

$$P_{k\theta} = \frac{A}{I_{\bar{P}}} \left(GJ + EI_\omega^{(\bar{P}, \bar{O}_s)} \frac{\pi^2}{l^2} \right)$$

en el caso que el módulo de alabeo sea nulo (barras de perfiles doble ángulos y perfiles T), resulta:

$$P_{k\theta} = \frac{AGJ}{I_P^{\bar{P}}} \text{ y la tensión crítica valdrá:}$$

$$F_{crz} = \frac{GJ}{A\bar{r}_o^2} \quad \text{con la nomenclatura de la LRFD (ver E3-1 de la AISC)}$$

4.2) Caso de simetría simple (Eje de simetría y-y)

$$x_{\bar{P}} = 0 \text{ (Perfiles } U, \text{ Perfiles } I \text{ de alas desiguales, etc.)}$$

Las ecuaciones 1, 2 y 3 se reducen a un sistema de tres ecuaciones, una de ellas independiente:

$$(1'') \quad EI_x \cdot \frac{d^4 v}{dz^4} + P \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} = 0$$

$$(2'') \quad EI_y \cdot \frac{d^4 u}{dz^4} + P \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} - P \cdot y_{\bar{P}} \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0$$

$$(3'') \quad EI_{\omega}^{(\bar{P}, \bar{O}_s)} \cdot \frac{d^4 \phi}{dz^4} - \left(GJ - \frac{P}{A} \cdot I_P^{\bar{P}} \right) \frac{d^2 \phi}{dz^2} + P \cdot y_{\bar{P}} \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$$

De la ecuación independiente 1'' obtenemos la carga crítica de pandeo por flexión alrededor del eje x:

$$P_{kx} = \pi^2 \cdot \frac{EI_x}{l^2}$$

Mediante la resolución del sistema constituido por las dos ecuaciones diferenciales restantes 2'' y 3'', obtenemos la ecuación característica:

$$(P_{ky} - P) \left[EI_{\omega} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} + GJ - \frac{P}{A} I_P^{\bar{P}} \right] - (P \cdot y_{\bar{P}})^2 = 0$$

la cual puede escribirse en la forma:

$$\frac{I_P^{\bar{P}}}{A} (P_{ky} - P) \cdot (P_{k\theta} - P) - (P \cdot y_{\bar{P}})^2 = 0$$

esta ecuación es de segundo grado en P y tiene dos soluciones, la menor raíz positiva será la carga crítica de pandeo por *flexo-torsión*. Escribiremos la solución de esta ecuación con la nomenclatura de la LRFD y en función de tensiones críticas (no de las cargas críticas):

$$F_{crz} = \frac{P_{k\theta}}{A} = \frac{GJ}{A \cdot \bar{r}_o^2}$$

$$F_{cry} = \frac{P_{ky}}{A}$$

$$\bar{r}_o^2 = \frac{I_o}{A} = \frac{I_P^{\bar{P}}}{A}$$

$$y_o = y_{\bar{P}}$$

$$F_{crtt} = \frac{P}{A}$$

finalmente resulta:
$$F_{crtt} = \left(\frac{F_{cry} + F_{crz}}{2H} \right) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot F_{cry} \cdot F_{crz} \cdot H}{(F_{cry} + F_{crz})^2}} \right] \text{ (ver E3-1 LRFD)}$$

siendo
$$H = 1 - \frac{y_o^2}{\bar{r}_o^2}$$

4.3) Caso de secciones asimétricas

Nos queda el sistema de tres ecuaciones diferenciales original, con tres incógnitas u , v y ϕ :

$$(1^{IV}) \quad EI_x \cdot \frac{d^4 v}{dz^4} + P \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} + P \cdot x_{\bar{P}} \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0$$

$$(2^{IV}) \quad EI_y \cdot \frac{d^4 u}{dz^4} + P \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} - P \cdot y_{\bar{P}} \cdot \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0$$

$$(3^{IV}) \quad EI_{\omega}^{(\bar{P}, \bar{O}_s)} \cdot \frac{d^4 \phi}{dz^4} - \left(GJ - \frac{P}{A} \cdot I_{\bar{P}} \right) \frac{d^2 \phi}{dz^2} + P \cdot y_{\bar{P}} \frac{d^2 u}{dz^2} - P \cdot x_{\bar{P}} \frac{d^2 v}{dz^2} = 0$$

La resolución de este sistema de ecuaciones diferenciales nos lleva la siguiente ecuación característica cúbica, escrita con la nomenclatura de la LRFD:

$$(F_e - F_{ex}) \cdot (F_e - F_{ey}) \cdot (F_e - F_{ez}) - F_e^2 \cdot (F_e - F_{ey}) \cdot \left(\frac{x_o}{r_o} \right)^2 - F_e^2 \cdot (F_e - F_{ex}) \cdot \left(\frac{y_o}{r_o} \right)^2 = 0$$

Todos los valores de las tensiones críticas aquí incluidos (F_e , F_{ex} , F_{ey} y F_{ez}) son tensiones críticas ideales.

De esta ecuación obtendremos tres raíces, la menor de ellas positiva es el valor de la tensión crítica F_e ideal de pandeo por flexo-torsión.

Para poder mantener el procedimiento de cálculo de la resistencia nominal de una columna, propuesto en el Capítulo E de la LRFD, es necesario transformar esta tensión ideal F_e obtenida, en una tensión crítica "experimental" como la propuesta por Bjorhovde para lo cual, en lugar de tomar

$$\lambda_c = \frac{k \cdot l}{r \cdot \pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} = \sqrt{\frac{F_y}{F_{cri}}}$$

se reemplaza la tensión crítica ideal de pandeo por flexión F_{cri} del denominador por la tensión crítica ideal F_e de pandeo por flexo-torsión:

$$\lambda_e = \sqrt{\frac{F_y}{F_e}}$$

luego se aplica el mismo procedimiento que el indicado en el Capítulo E - Artículo E2 - Ecuaciones E2-1, E2-2 y E2-3 o bien el Apéndice E.

CÁLCULO DE LA RESISTENCIA A COMPRESIÓN DE UNA BARRA SEGÚN LA ESPECIFICACION LRFD (CAPITULO E)

Describiremos a continuación el procedimiento de cálculo de columnas comprimidas siguiendo los requerimientos del Capítulo E de las Especificaciones LRFD. Es conveniente la lectura detallada de las páginas introductorias, complementada con la lectura de las referencias bibliográficas para poder aplicar criteriosamente el procedimiento que se desarrolla a continuación.

1) Cálculo de la Resistencia a Pandeo por Flexión de Barras Comprimidas

1.1) Para $\lambda \leq \lambda_r$

Para el cálculo de la resistencia a la compresión de barras que tienen en todos sus elementos componentes (alas y alma), una relación de ancho a espesor $\lambda \leq \lambda_r$ (según Tabla B 5.1 pág. 6.32 – LFRD), las Especificaciones proponen:

- Factor de resistencia ϕ_c $\phi_c = 0,85$
- Resistencia nominal P_n $P_n = A_g \cdot F_{cr}$

En la que

$$F_{cr} = 0,658^{\lambda_c^2} \cdot F_y \quad \text{para } \lambda_c \leq 1,5$$

y

$$F_{cr} = \left(\frac{0,877}{\lambda_c^2} \right) \cdot F_y \quad \text{para } \lambda_c > 1,5$$

en donde: $\lambda_c = \frac{k \cdot l}{\pi \cdot r} \sqrt{\frac{F_y}{E}}$

y cuya nomenclatura ha sido explicada en páginas anteriores.

1.2) Para $\lambda > \lambda_r$

En el caso en que $\lambda > \lambda_r$ las expresiones anteriores toman la forma:

$$F_{cr} = Q(0,658^{Q\lambda_c^2}) \cdot F_y \quad \text{para } \lambda_c \cdot \sqrt{Q} \leq 1,5$$

y

$$F_{cr} = \left(\frac{0,877}{\lambda_c^2} \right) \cdot F_y \quad \text{para } \lambda_c \cdot \sqrt{Q} > 1,5$$

El factor Q tiene en cuenta las condiciones de rigidización del componente de la sección considerado y su ancho efectivo b_e .

Sobre este tema volveremos más adelante cuando consideremos el Apéndice B. "Requerimientos de Cálculo" de las Especificaciones.

2) Cálculo de la Resistencia de Pandeo por Flexo-Torsión de Barras Comprimidas

2.1) Para $\lambda \leq \lambda_r$

La Especificación provee el procedimiento para determinar la resistencia nominal de barras cuyas secciones tienen un solo eje de simetría como en el caso de secciones de ángulos dobles y secciones T cuyos elementos componentes (alas y alma) tienen una relación de ancho a espesor $\lambda \leq \lambda_r$. En este caso la resistencia de cálculo está dada por:

$$\begin{aligned} &\phi_c \cdot P_n \\ &\phi_c = 0,85 \\ &P_n = A_g \cdot F_{crtt} \end{aligned}$$

donde:

$$F_{crit} = \left(\frac{F_{cry} + F_{crz}}{2H} \right) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot F_{cry} \cdot F_{crz} \cdot H}{(F_{cry} + F_{crz})^2}} \right]$$

en la cual: $F_{crz} = \frac{G \cdot J}{A \cdot \bar{r}_o^2}$ es la tensión crítica de pandeo por torsión pura de la sección.

\bar{r}_o : es el radio de giro polar alrededor del centro de corte.

$$H = 1 - \left(\frac{\bar{x}_o^2 + \bar{y}_o^2}{\bar{r}_o^2} \right)$$

x_o, y_o : son las coordenadas del centro de corte respecto del baricentro.

$x_o = 0$ para barras de ángulos dobles y secciones T (el eje y-y es el eje de simetría)

F_{cry} : es la tensión crítica de pandeo por flexión alrededor del eje de simetría y-y determinada de acuerdo al punto 1.1) para:

$$\lambda_c = \frac{k \cdot l}{\pi \cdot r_y} \sqrt{\frac{F_y}{E}}$$

2.2) Para $\lambda > \lambda_r$

En este caso la Especificación prevee la consideración de un ancho efectivo de acuerdo al Artículo B5.3 para la determinación de F_{cry} que debe ser aplicada en la expresión anterior.

2.3) Para el caso de columnas con secciones de simetría simple o asimétricas, columnas doblemente simétricas de sección cruciforme o secciones armadas de paredes muy delgadas, la Especificación establece la determinación de los estados límites de pandeo por flexo-torsión o por torsión, de acuerdo al Apéndice E3.

3) Barras de secciones armadas con perfiles y placas en contacto continuo.

3.1.) En los extremos de barras comprimidas de secciones armadas apoyadas en placas base o superficies laminadas, todos los componentes en contacto deben unirse entre sí mediante soldaduras continuas cuya longitud no será menor que el mayor ancho de la barra (Figura 5.16) o bien con bulones. En este último caso, los bulones deben estar espaciados a una distancia no mayor que 4 diámetros y extenderse sobre una distancia igual a 1,5 veces el mayor ancho del miembro armado (Figura 5.16).

3.2.) La Especificación requiere que entre las uniones extremas (mencionadas en 3.1) el espaciamiento entre soldaduras discontinuas, bulones o remaches, debe ser el adecuado para transferir los esfuerzos calculados.

Si un componente de la sección armada comprimida consiste en una placa exterior a los perfiles, la separación máxima S entre cordones de soldadura intermitentes o entre bulones ubicados sobre todas las líneas de gramil de cada sección, no debe exceder el producto del espesor de la chapa exterior más delgada multiplicada por

$\frac{337}{\sqrt{F_y}}$ ni los 300 mm, es decir:

$$s \leq t \cdot \frac{337}{\sqrt{F_y}} \leq 300 \text{ mm}$$

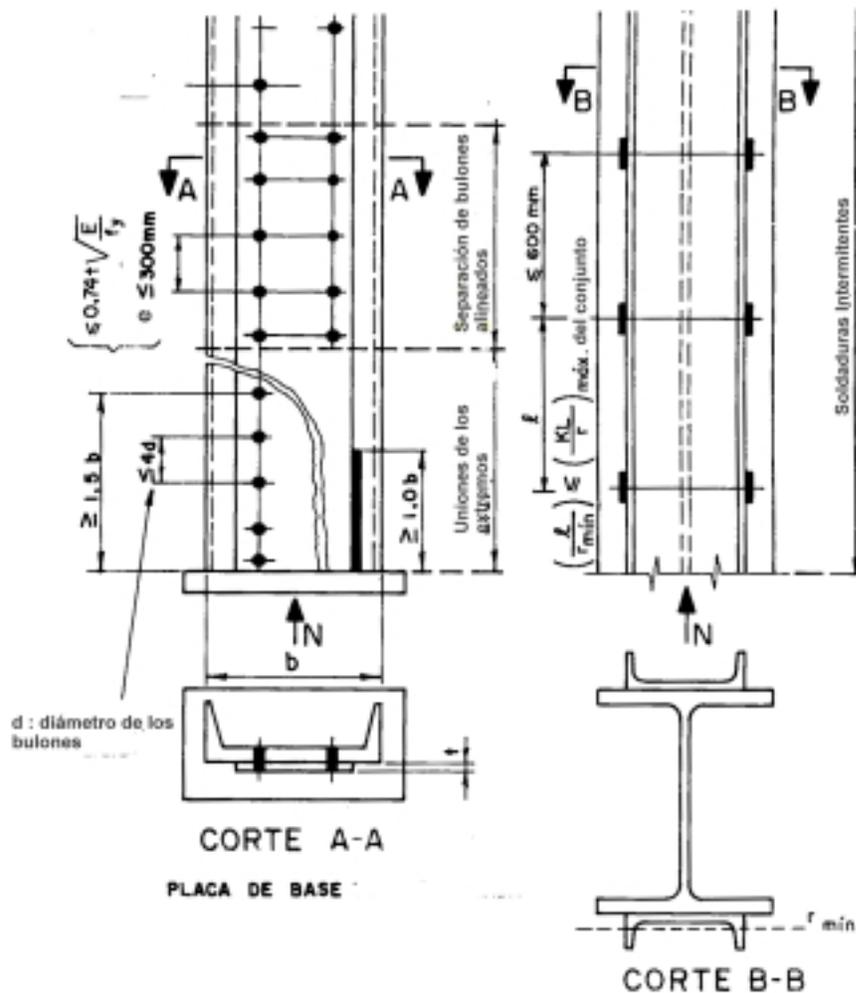


Figura 5.16

Cuando los bulones son dispuestos en tresbolillo el espaciamiento máximo sobre cada línea de gramil no debe exceder el producto del espesor de la chapa exterior más delgada multiplicada por $\frac{504}{\sqrt{F_y}}$ ni los 450 mm, es decir:

$$s \leq t \cdot \frac{504}{\sqrt{F_y}} \leq 450 \text{ mm}$$

t : es el menor espesor de las chapas exteriores.

Para las limitaciones del espaciamiento longitudinal de bulones que unen elementos en contacto continuo consistentes en una chapa y un perfil o dos chapas, ver Artículo J3.5.

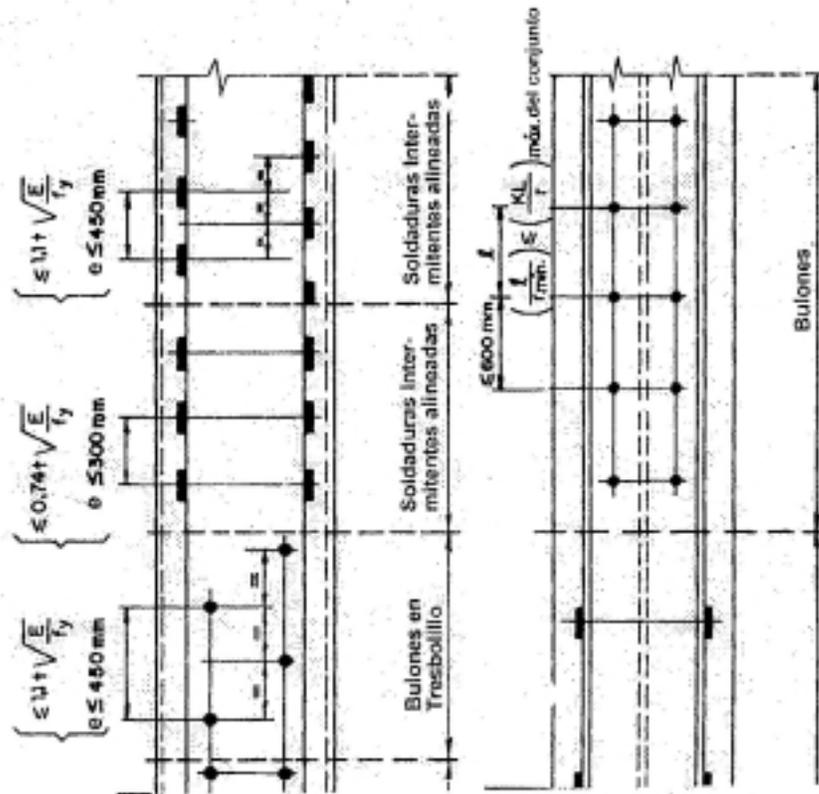


Figura 5.17

4) **Barras de secciones armadas con perfiles separados o en contacto eventual.**

4.1.) a) Los componentes individuales de miembros comprimidos compuestos de dos o más perfiles deben ser unidos uno al otro, en intervalos de longitud a , de manera que la esbeltez efectiva $\frac{k \cdot a}{r_i}$ de cada perfil componente, entre los puntos de vinculación, no debe exceder las trescuartas partes de la esbeltez determinante para el cálculo del miembro armado. Para el cálculo de la esbeltez de cada componente debe ser utilizado el radio de giro mínimo r_i de cada uno de ellos.

$$\frac{a}{r_i \text{ mín}} \leq \frac{3}{4} \left(\frac{kL}{r} \right)_{\text{máx}} \text{ del Conjunto Armado}$$

b) Las uniones de los extremos deben estar soldadas o bien, realizadas con bulones antideslizantes con superficies de contacto limpias de escamas de laminación o arenadas y terminación superficial Clase A.

4.2.) Según las Especificaciones la determinación de la resistencia de cálculo de columnas compuestas, armadas por dos o más perfiles, debe realizarse mediante los procedimientos indicados en el Artículo E2 y el Artículo E3 sujetos a las siguientes modificaciones. Si el modo de pandeo involucra deformaciones relativas que producen esfuerzos de corte en los elementos de unión de los perfiles individuales,

$\frac{kL}{r}$ debe ser reemplazado por $\left(\frac{kL}{r} \right)_m$ determinada como se indica:

- a) Con elementos de vinculación intermedios unidos con bulones ajustados en la condición de apretado inicial ("snug-tight"):

$$\frac{k.l}{r} = \left(\frac{k.l}{r}\right)_m = \sqrt{\left(\frac{k.l}{r}\right)_o^2 + \left(\frac{a}{r_i}\right)^2}$$

- b) Con elementos de vinculación intermedia soldados o unidos con bulones antideslizantes:

$$\left(\frac{kl}{r}\right)_m = \sqrt{\left(\frac{kl}{r}\right)_o^2 + 0.82 \cdot \frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{a}{r_{ib}}\right)^2}$$

$$\left(\frac{k.l}{r}\right)_o$$

= la esbeltez de la columna compuesta actuando como unidad.

$$\left(\frac{k.l}{r}\right)_m$$

= esbeltez modificada de la columna compuesta.

$$\frac{a}{r_i}$$

= la esbeltez máxima de un perfil individual.

$$\frac{a}{r_{ib}}$$

= la esbeltez de un perfil respecto de su eje baricéntrico paralelo al eje de pandeo.

a

= distancia entre elementos de unión.

r_i

= radio de giro mínimo de un perfil individual.

r_{ib}

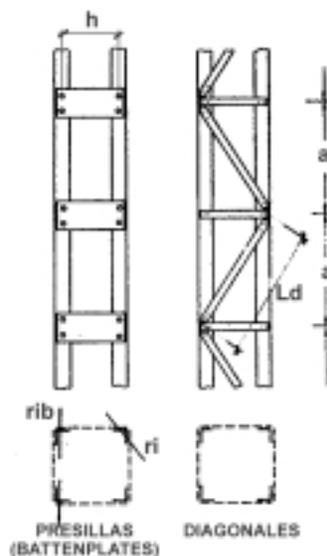
= radio de giro de un perfil componente con respecto a su eje baricéntrico paralelo al eje de pandeo baricéntrico de la columna compuesta.

α

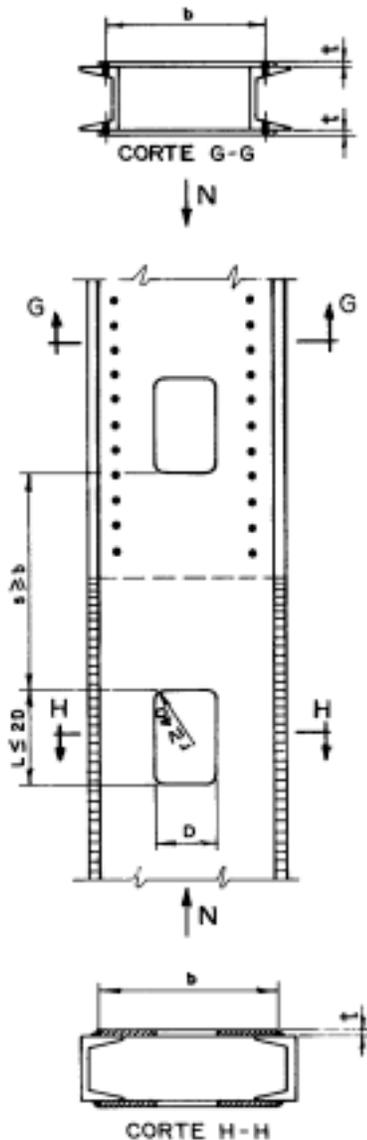
= separación relativa entre los componentes = $h / 2r_{ib}$

h

= la distancia entre los baricentros de los perfiles individuales en dirección perpendicular al eje de pandeo de la columna compuesta.



- 4.3.) La Especificación prevé el caso de columnas armadas con chapas continuas perforadas, con agujeros de acceso espaciados en la longitud de la columna. Para que estas chapas contribuyan a la resistencia de la columna deben cumplir con los siguientes requisitos:



- 1) El borde volado $(b-D)/2$ de la chapa perforada debe cumplir con B 5.1., es decir:

$$\frac{b-D}{2t} \leq 0.45 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$$

- 2) La longitud del agujero (en dirección del esfuerzo) no debe exceder en dos veces su ancho: $\frac{L}{2D} \leq 2$.

- 3) La distancia s entre dos agujeros contiguos en dirección del esfuerzo no debe ser menor que la distancia transversal entre líneas de gramiles o cordones soldaduras más próximos.

- 4) La periferia de los agujeros debe tener en todos sus puntos, un radio mínimo de: $r \geq 40 \text{ mm}$.

- 4.4.) Como una alternativa de las columnas armadas con chapas o platabandas perforadas la Especificación permite, en el caso de columnas armadas con diagonales, la utilización de presillas ("tie plates" o "batten plates") ubicadas en los extremos y en puntos intermedios - si el diagonalizado es interrumpido - sujetas a las siguientes condiciones de diseño:

- 1) Las presillas o placas de unión se ubicarán tan cerca de los extremos como sea posible.
- 2) Las placas de unión en los extremos tendrán una longitud L no menor que la distancia h entre líneas de gramiles o cordones de soldaduras que las unen a los parantes.

- 3) Las placas de unión intermedias tendrán una longitud L_1 no menor que $L/2$.
- 4) El espesor de las placas no será menor a $1/50$ de la distancia entre líneas de gramiles o cordones de soldaduras.
- 5) En uniones atornilladas la separación entre tornillos en la dirección del esfuerzo no será mayor a 6 diámetros.
- 6) Las placas de unión se vincularán a cada perfil con no menos de tres bulones en cada uno de sus bordes.
- 7) En uniones soldadas, la longitud de los cordones en la dirección del esfuerzo en cada borde de las placas de unión será al menos $1/3$ de la longitud de la placa.

4.5. Las columnas armadas con diagonales (planos, ángulos, perfiles U) deben cumplir según esta Especificación, las siguientes condiciones de diseño:

- 1) La esbeltez efectiva de un miembro individual, entre sus puntos de vinculación con las diagonales, debe ser menor que la esbeltez determinante de la columna considerada como un todo, o sea:

$$\frac{a}{r_i} \leq \frac{3}{4} \left(\frac{k.L}{r} \right)_{m_x \text{ ó } y}$$

- 2) Las diagonales deben ser dimensionadas para soportar un esfuerzo de corte perpendicular al eje de la columna igual a:

$$V = \frac{2}{100} P_u$$

(P_u : resistencia de cálculo de la columna)

- 3) La longitud de pandeo de las diagonales simples comprimidas puede ser tomada como la distancia L_D entre las uniones soldadas o abulonadas de sus extremos que las vinculan a los parantes. En el caso de diagonales dobles puede tomarse el 70% de esa longitud.

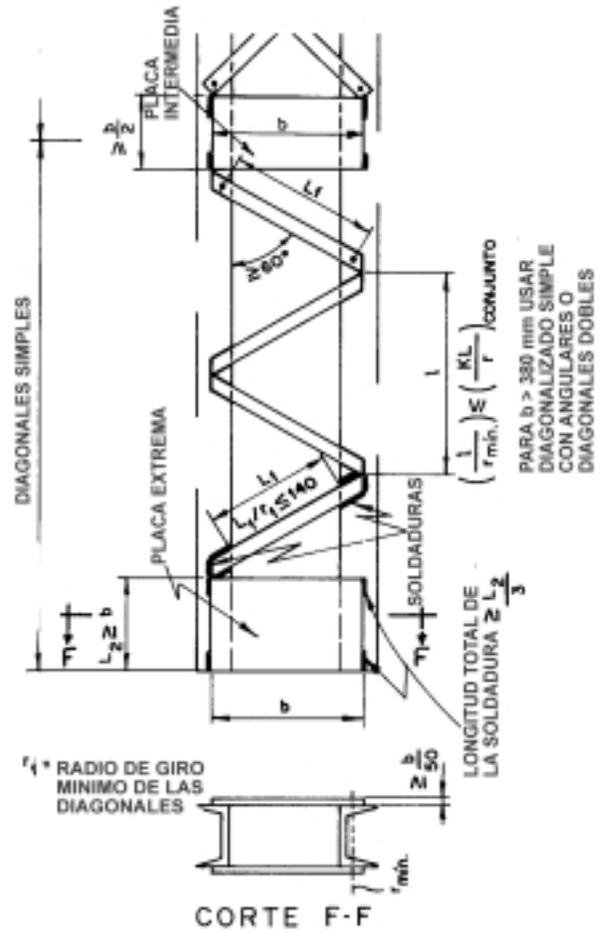
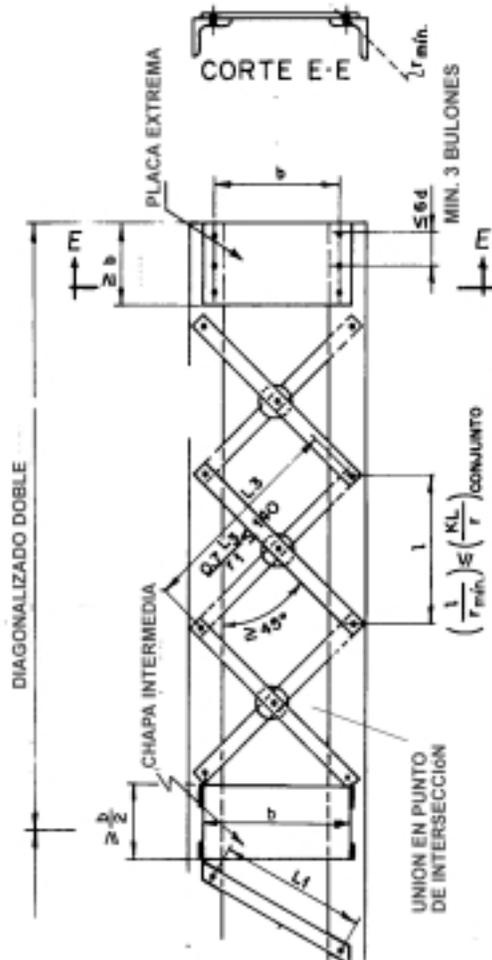
- 4) La esbeltez de las diagonales debe ser:

Para diagonales simples: $\frac{L_D}{r_D} \leq 140$

Para diagonales dobles: $\frac{0.7L_D}{r_D} \leq 200$ (unión)

- 5) El diagonalizado doble debe estar unido en el punto de intersección de las barras.
- 6) La inclinación de las diagonales simples respecto del eje longitudinal de la columna no debe ser, preferiblemente, menor de 60° . En el caso de diagonales dobles no debe ser menor a 45° .

- 7) Las columnas con diagonales llevarán placas de unión en sus extremos de acuerdo a los requerimientos del punto 4.6/ 1 y 2.
- 8) Cuando la distancia entre los cordones de soldaduras o de las líneas de bulones ubicados en las alas de los ntes es mayor de 38 cm, el diagonalizado debe ser doble o ejecutado con perfiles angulares.



Comentarios adicionales sobre la aplicación de los contenidos de la Especificación LRFD relativas al CAPITULO E.

Existen muchas herramientas de carácter teórico utilizadas en los procedimientos establecidos en las Normas DIN 4114 y CIRSOC 302, que son perfectamente aplicables en el contexto de la Especificación LRFD en estudio. Mencionaremos a continuación algunos de esos procedimientos, para lo cual haremos referencia a los artículos de la DIN 4114:

- 1) Son aplicables todos los artículos que se refieren a la determinación de la longitud de pandeo equivalente de las barras:

Artículos 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4.

Artículos 11, 12 y 13.

Artículos Di. 6.1, Di. 6.2, Di. 6.3, Di. 6.4

Artículos Di. 7.6, Di. 7.7. Barras de inercia variable y Barras con carga axial variable.

Artículo Di. 7.8 excluyendo o reemplazando adecuadamente el concepto de "Módulo de Pandeo" allí incluido.

Artículos Di. 12, Di. 13, Di. 14 excluyendo o reemplazando adecuadamente en todos ellos el concepto de coeficiente ω de pandeo.

- 2) Podemos aplicar las expresiones y conceptos contenidos en los Artículos 8.32, 8.33 y 8.34.

Esfuerzo en las diagonales:
$$D = \frac{Q}{z \cdot \text{sen } \alpha}$$

En la que:

$Q = V$ Esfuerzo de corte de segundo orden

z : número de planos de diagonalizados

α : inclinación de la diagonal respecto del eje de la columna.

Esfuerzo de corte en las presillas:
$$T = \frac{m \cdot Q \cdot s}{2 e} \quad \text{Para } m=2,3 \text{ y } 4$$

En la que:

$Q = V$ Esfuerzo de corte de segundo orden

s : distancia entre presillas.

e : distancia entre los baricentros de los perfiles simples.

m : número de secciones simples que constituyen la sección compuesta de la columna.

- 3) También es posible utilizar todos los elementos relativos al Pandeo por Flexo-Torsión. Por ejemplo:

Para la determinación de C_M , γ_M , J_D , etc. se pueden aplicar todas las fórmulas allí incluidas.

Son válidos todos los conceptos que se analizan en el Artículo Di. 7.5 y por lo tanto las consecuencias relativas a la ubicación del centro de corte de una sección.

Es de hacer notar, que las definiciones que se refieren a las esbelteces de flexo-torsión λ_{Vt} con carga centrada o excéntrica, tienen el mismo origen que las expresiones tales como:

$$F_{crit} = \left(\frac{F_{cry} + F_{crz}}{2H} \right) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot F_{cry} \cdot F_{crz} \cdot H}{(F_{cry} + F_{crz})^2}} \right]$$

adoptadas por la LRFD, nada más que en las ecuaciones contenidas en la DIN 4114, los valores críticos de las cargas o de las tensiones, están definidos en función de los esbelteces ideales λ_{Vi} . El procedimiento fué así originariamente diseñado en la DIN 4114, para hacer extensivo el método ω , incluido en dicha norma para casos simples de pandeo por flexión, a los casos más complejos como el de pandeo por flexo-torsión.