

EJERCICIO Nro. 11

Para el mismo contorno en estudio y como verificación de las expresiones analíticas deducidas, determinaremos la ubicación del polo principal \bar{P} de la sección.

Aplicaremos las expresiones (44) y (45), o sea:

$$(44) \quad \bar{x}_P = \frac{I_{\omega_x}^{(GO_s)} I_{\bar{y}} - I_{\omega_y}^{(GO_s)} I_{\bar{xy}}}{I_{\bar{x}} I_{\bar{y}} - I_{\bar{xy}}^2} \quad (45) \quad \bar{y}_P = \frac{I_{\omega_x}^{(GO_s)} I_{\bar{xy}} - I_{\omega_y}^{(GO_s)} I_{\bar{x}}}{I_{\bar{x}} I_{\bar{y}} - I_{\bar{xy}}^2}$$

En éstas debemos calcular:

$$I_{\bar{x}} = I_x - y_G^2 F = \frac{52}{3} - 1,2857^2 \cdot 7 = 5,7619 \cdot a^3$$

$$I_{\bar{y}} = I_y - x_G^2 F = \frac{42}{3} - 1,2143^2 \cdot 7 = 3,6785 \cdot a^3$$

$$I_{\bar{xy}} = I_{xy} - x_G y_G F = \frac{17}{2} - 1,2857 \cdot 1,2143 \cdot 7 = -2,4286 \cdot a^3$$

$$I_{\omega_x}^{(GO_s)} = I_{\omega_x}^{(GO_s)} - y_G S_{\omega_x}^{(GO_s)} = 9,3334 - 1,2857 \cdot 1 = 8,0477 \cdot a^4$$

$$I_{\omega_y}^{(GO_s)} = I_{\omega_y}^{(GO_s)} - x_G S_{\omega_y}^{(GO_s)} = 1,6904 - 1,2143 \cdot 1 = -2,9047 \cdot a^4$$

$$\bar{x}_P = \frac{8,0477 \cdot 3,6785 - (-2,9047) \cdot (-2,4286)}{5,7619 \cdot 3,6785 - (-2,4286)^2} = 1,4741 \cdot a$$

$$\bar{y}_P = \frac{8,0477 \cdot (-2,4286) - (-2,9047) \cdot 5,7619}{5,7619 \cdot 3,6785 - (-2,4286)^2} = -0,1836 \cdot a$$

Calcularemos ahora las coordenadas referidas a los ejes principales de inercia:

$$\xi_P = \frac{I_{\omega_\xi}^{(GO_{s_I})}}{I_\xi}$$

$$\eta_P = -\frac{I_{\omega_\eta}^{(GO_{s_I})}}{I_\eta}$$

$$I_{\xi,\eta} = \frac{I}{2} \left[(I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}}) \pm \sqrt{(I_{\bar{x}} - I_{\bar{y}})^2 + 4 I_{\bar{xy}}^2} \right]$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2 I_{\bar{xy}}}{I_{\bar{y}} - I_{\bar{x}}} \quad \alpha_1 = 33,3920 \quad \text{o} \quad 123,3920$$

$$I_{\xi,\eta} = \frac{I}{2} \left[(5,7619 + 3,6785) \pm \sqrt{(5,7619 - 3,6785)^2 + 4 (-2,4286)^2} \right]$$

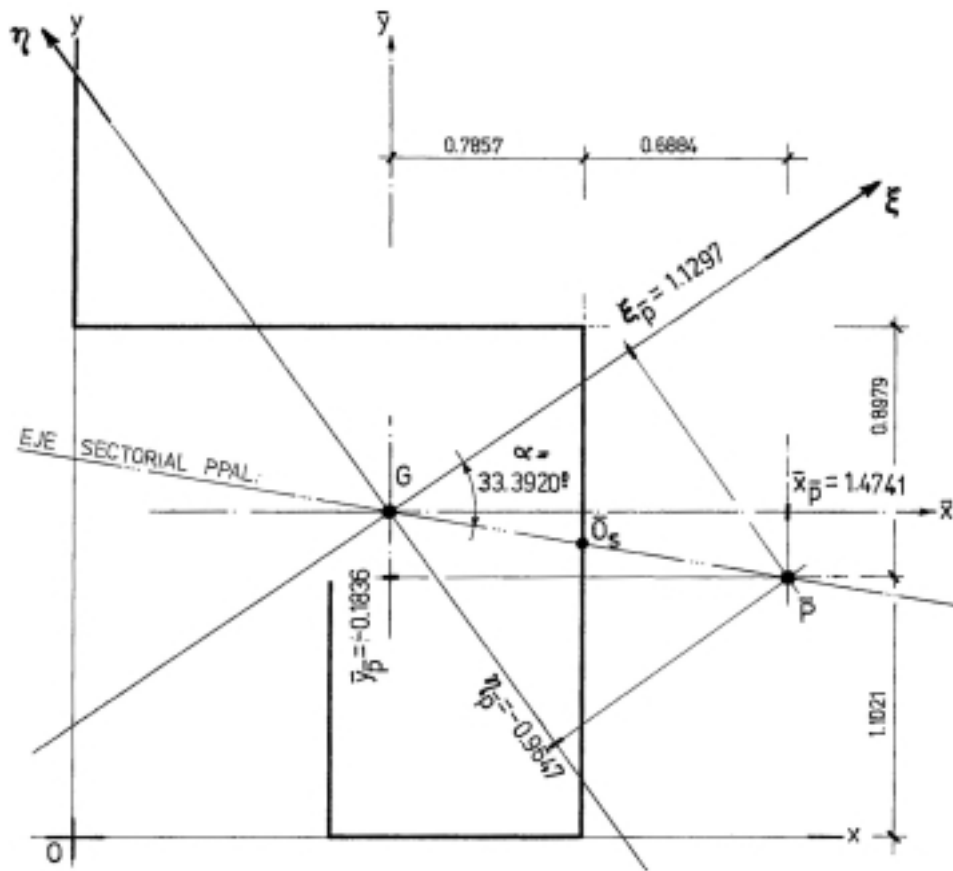
$$I_{\xi} = 7,3628 \cdot a^3$$

$$I_{\eta} = 2,0776 \cdot a^3$$

De aquí aplicando las Ec. (48) y (49):

$$(48) \xi_{\bar{P}} = \frac{I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_s)} \cos \alpha - I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_s)} \operatorname{sen} \alpha}{I_{\xi}}$$

$$(49) \eta_{\bar{P}} = \frac{I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_s)} \cos \alpha - I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_s)} \operatorname{sen} \alpha}{I_{\eta}}$$



Ejercicio 11
Figura 11

Reemplazando valores: $\operatorname{sen} \alpha = 0,5504$, $\cos \alpha = 0,8349$

$$\xi_{\bar{P}} = \frac{8,0477 \cdot 0,8349 - (-2,9047) \cdot 0,5504}{7,3628} = 1,1297 \cdot a$$

$$\eta_{\bar{P}} = \frac{(-2,9047) \cdot 0,8349 + 8,0477 \cdot 0,5504}{2,0776} = -0,9647 \cdot a$$

Completaremos el ejercicio calculando el momento de inercia sectorial respecto del polo principal \bar{P} , para ello aplicaremos la Ec. (56):

$$I_{\omega}^{(\bar{P}O_s)} = I_{\omega}^{(GO_{s_I})} - C_{\bar{O}}^2 F + \bar{x}_P^2 I_{\bar{x}} + \bar{y}_P^2 I_{\bar{y}} - 2 \bar{x}_P I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_{s_I})} + 2 \bar{y}_P I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{s_I})} - 2 \bar{x}_P \bar{y}_P I_{\bar{xy}}$$

El cálculo de $I_{\omega}^{(GO_{s_I})}$ lo haremos por integración del diagrama de $\omega^{(GO_{s_I})}$ del ejercicio Nro. 8:

$$I_{\omega}^{(GO_{s_I})} = \int_F \omega^{(GO_{s_I})^2} dF$$

$$\frac{1}{3} (2,2143)^2 1 = 1,6344$$

$$\frac{1}{3} (2,2857)^2 1 = 1,7415$$

$$\frac{1}{3} 1^2 1 = 0,3333$$

$$\frac{1}{3} (2,0714)^2 1 = 1,4302$$

$$\frac{2}{6} 2,2143 \cdot 1 \cdot 1 = 0,7381$$

$$\frac{2}{6} 2,2857 \cdot 2,0714 \cdot 1 = 1,5782$$

$$\frac{1}{3} (2,2143)^2 2 = 3,2687$$

$$\frac{1}{3} (2,0714)^2 1 = 1,4302$$

$$\frac{1}{3} (0,7857)^2 2 = 0,4115$$

$$\frac{1}{3} (0,7858)^2 1 = 0,2058$$

$$\frac{2}{6} 2,2143 \cdot 0,7857 \cdot 2 = 1,1598$$

$$\frac{2}{6} 2,0714 \cdot 0,7857 \cdot 1 = 0,5425$$

$$\frac{2}{3} (0,7857)^2 1 = 0,4115$$

$$I_{\omega}^{(GO_{s_I})} = 14,8859 \cdot a^5$$

$$C_{\bar{O}} = \frac{1}{7} a^2 \text{ (del ejercicio Nro. 9)}$$

$$I_{\omega}^{(\bar{P}O_s)} = 14,8859 - \left(-\frac{1}{7} \right)^2 7 + 1,4741^2 \cdot 5,7619 + (0,1836)^2 \cdot 3,6785 - 2 \cdot 1,4741 \cdot 8,0477 + 2(-0,1836)(-2,9047) - 2 \cdot 1,4741(-0,1836)(-2,4286) = 3,4133 \cdot a^5$$

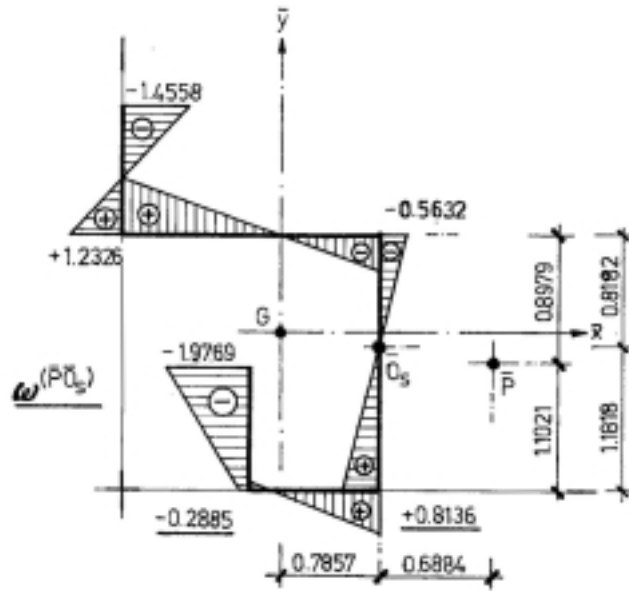
Verificaremos este valor integrando el diagrama $\omega^{(\overline{PO}_s)}$, o sea:

$$I_{\omega}^{(\overline{PO}_s)} = \int_F \omega^{(\overline{PO}_s)^2} dF$$

Realizando la integración del diagrama $\omega^{(\overline{PO}_s)}$ en la forma conocida, obtenemos:

$$I_{\omega}^{(\overline{PO}_s)} = 3,4143 \cdot a^5$$

Valor que coincide con el calculado más arriba.



Ejercicio 11
Figura 11.2