

CAPITULO 1

COORDENADA SECTORIAL

1.- DEFINICION

Definimos como “*coordenada sectorial*” $\omega^{(pos)}$ de un punto genérico $S(x,y)$, perteneciente a una línea C plana, recta o curva, al doble del área barrida por el vector posición \vec{r} que girando alrededor de su extremo origen - al cual denominaremos “*polo*” $P(x_P, y_P)$ - describe con su otro extremo y a partir de un “*origen sectorial*” O_S arbitrario, la trayectoria de la línea C hasta alcanzar el punto S .

El polo P puede pertenecer o no a la línea o contorno, en cambio el punto O_S , “*Origen de las Coordenadas Sectoriales*”, debe estar ubicado, por definición, sobre la misma línea C (Figura 1.1). No obstante, como veremos, en secciones compuestas, el origen sectorial puede considerarse ubicado sobre el eje de simetría del conjunto o sobre la prolongación virtual, de ramas simétricas (ver Casos 1 y 2, página 29).

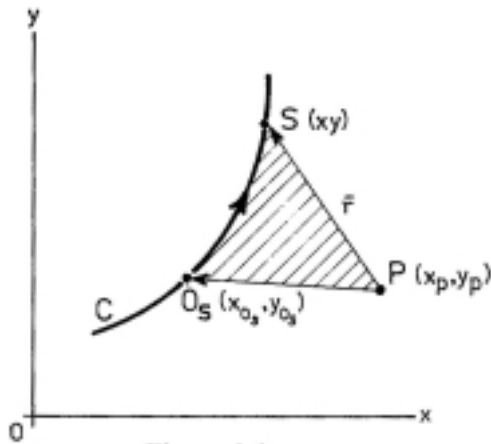


Figura 1.1

Según se ilustra en la Figura 1.1 y de acuerdo a la definición expresada más arriba, la coordenada sectorial $\omega^{(pos)}$ del punto $S(x,y)$, referida al polo $P(x_P, y_P)$ y con origen sectorial $O_S(x_{O_S}, y_{O_S})$, es el doble del área rayada indicada en dicha figura.

Como el tema que analizamos es de aplicación, en general, al estudio de barras de pared delgada de sección abierta, la línea denominada C ,

sobre la cual se aplica el concepto de coordenada sectorial, es la que resulta de la intersección o traza de la superficie media del espesor de la barra, con el plano de una sección transversal, perpendicular al eje de la barra (Figura 2.1).

El espesor $e_{(s)}$ puede ser constante o variable, en forma continua o no, a lo largo de la sección.

2.- COORDENADA SECTORIAL DE UN PUNTO CON ORIGEN O_S ARBITRARIO Y POLO P COINCIDENTE CON EL ORIGEN O DE UN SISTEMA DE EJES CARTESIANOS x, y TAMBIEN ARBITRARIO.

Para calcular la coordenada sectorial de un punto S perteneciente a una curva cualquiera utilizaremos las propiedades del producto vectorial mixto, referido a la terna derecha (Figura 3.1).

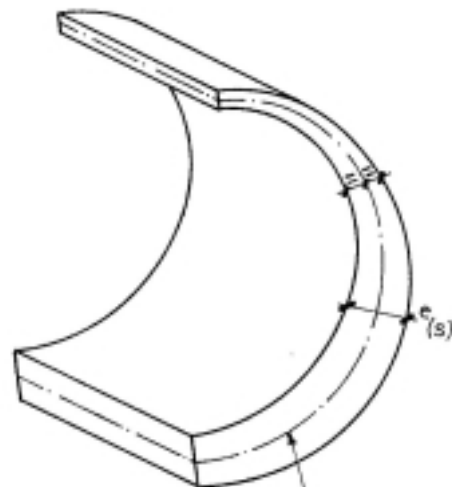


Figura 2.1

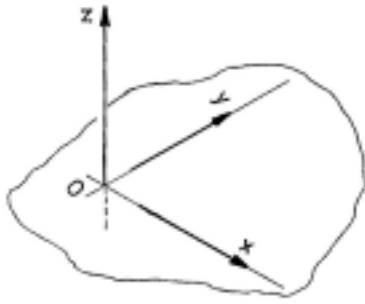


Figura 3.1

respecto del polo O .

$$\bar{T} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \bar{i} + \frac{dy}{ds} \bar{j}$$

es el versor tangente a la curva o contorno.

ds : es elemento diferencial de curva.

$\bar{e}_z = \bar{k}$ es un versor de la dirección z .

Haremos una figura de análisis aclaratoria (Figura 5.1):

El producto vectorial $\bar{r} \times (ds \bar{T})$ multiplicado escalarmente por \bar{e}_z puede interpretarse como el área rayada encerrada por el paralelogramo y que coincide por definición con $d\omega^{(o)}$.

Para el sentido particular elegido de los vectores \bar{r} y \bar{T} el signo de $d\omega^{(o)}$ resulta positivo; esto nos permite afirmar que cuando \bar{r} gira en sentido antihorario el área barrida resultará positiva. Por otra parte, la ordenada representativa de la coordenada sectorial quedará orientada en la dirección del eje z . En los casos representados, la ordenada correspondiente será perpendicular al plano x, y es decir, perpendicular a la página.

Definimos como elemento diferencial de coordenada sectorial $d\omega^{(o)}$ de polo O y a partir del punto genérico S (Figura 4.1) al producto vectorial mixto:

$$(1) \quad d\omega^{(o)} = \bar{r} \times (ds \bar{T}) \bar{e}_z$$

En la que:

$\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j}$ es el vector posición del punto S

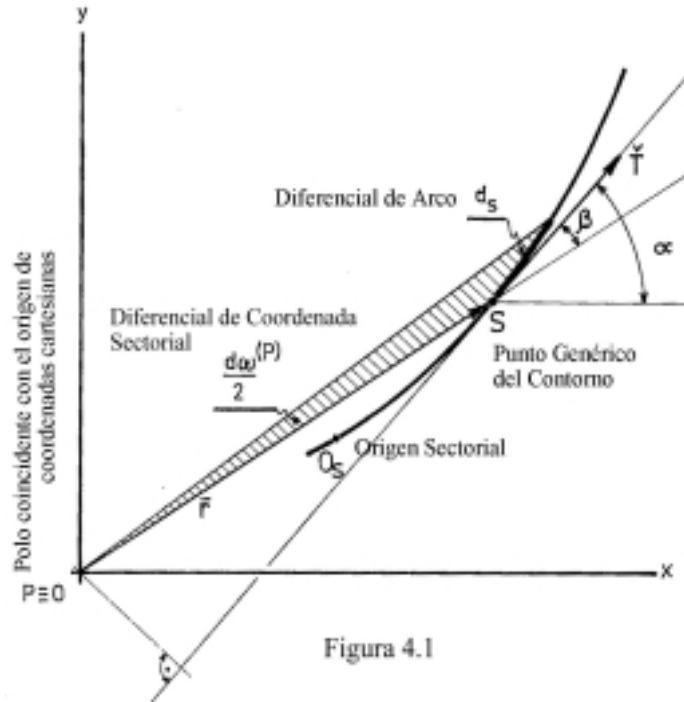


Figura 4.1

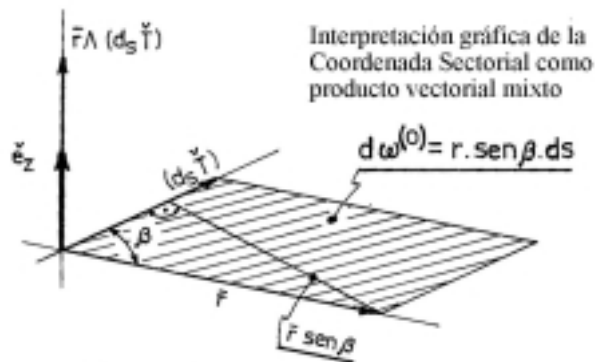


Figura 5.1

Para calcular la CS (en adelante coordenada sectorial) del punto S integraremos la Ec. (1) entre el origen O_S fijado arbitrariamente y el punto S , es decir:

$$(1a) \quad \omega^{(oo_S)} = \int_{O_S}^S \bar{r} \times (ds \bar{T}) \cdot \bar{e}_z \quad (*)$$

(*) $\omega^{(oo_S)}$: el primer superíndice indica el polo y el segundo, el origen de coordenadas sectoriales.

Desarrollando el producto mixto:

$$\bar{r} \times (ds \bar{T}) \cdot \bar{e}_z = \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} ds = x dy - y dx$$

de donde la Ec. (1a) queda: (2) $\omega^{(oo_S)} = \int_{O_S}^S x dy - \int_{O_S}^S y dx$

Esta integral puede ser resuelta poniendo, indistintamente, x en función de y ó y en función de x ó ambas, x e y , en función de un parámetro cualquiera t . De esta manera tendríamos:

<p>si: $y = f(x)$</p> <p>$dy = f'(x) dx$</p> <p>entonces:</p> <p>(3)</p> $\omega^{(oo_S)} = \int_{x_{O_S}}^{x_S} [x f'(x) - f(x)] dx$	<p>si: $x = f(y)$</p> <p>$dx = f'(y) dy$</p> <p>de donde:</p> <p>(4)</p> $\omega^{(oo_S)} = \int_{y_{O_S}}^{y_S} [f(y) - y f'(y)] dy$
---	---

En función de un parámetro t , sería:

$$x = f_1(t) \quad dx = f'_1(t) dt$$

$$y = f_2(t) \quad dy = f'_2(t) dt$$

entonces:

$$(5) \quad \omega^{(oo_S)} = \int_{t_{O_S}}^{t_S} [f_1(t) f'_2(t) - f_2(t) f'_1(t)] dt$$

Si se trata de funciones constantes como ocurre en muchos casos, es decir, paralelas a los ejes coordenados (Figura 6.1), las expresiones quedan, por ejemplo:

$$(a) \quad \begin{aligned} x &= f(y) = a \\ \text{con } f'(y) &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando la Ec. (4):

$$\omega^{(oo_s)} = \int_{y_{o_s}}^y a dy = a (y - y_{o_s}) \therefore$$

$$(6) \quad \omega^{(oo_s)} = x_{o_s} (y - y_{o_s})$$

Este valor (6) representa la coordenada sectorial del punto S respecto del polo O y del origen sectorial O_s .

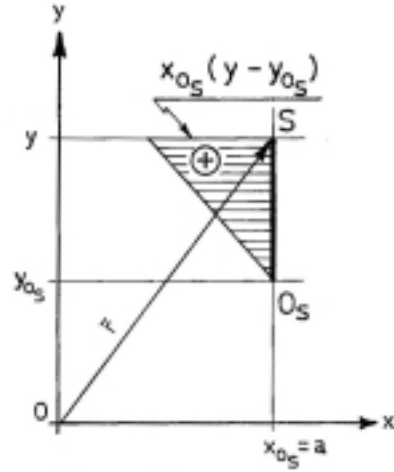


Figura 6.1

$$(b) \quad \begin{aligned} y &= f(x) = b \\ \text{con } f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando la Ec. (3):

$$\omega^{(oo_s)} = - \int_{x_{o_s}}^x b dx = -b (x - x_{o_s})$$

$$(7) \quad \omega^{(oo_s)} = -y_{o_s} (x - x_{o_s})$$

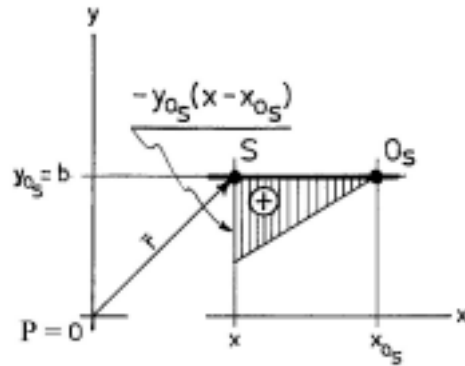


Figura 7.1

Para ambos casos, Ec. (6) y (7) se ha representado gráficamente la ley de variación de $\omega^{(oo_s)}$ en las Figuras 6.1 y 7.1.

c) Si se tratara de una figura de varios lados o elementos paralelos a los ejes coordenados podemos calcular la CS de cada punto aplicando las expresiones siguientes, recurrentes de las anteriores:

$$(8) \quad \omega_i^{(pos)} = \omega_{i-1}^{(pos)} + x_{i-1} (y_i - y_{i-1})$$

si el lado es vertical, o:

$$(9) \quad \omega_i^{(pos)} = \omega_{i-1}^{(pos)} - y_{i-1} (x_i - x_{i-1})$$

si el lado es horizontal.

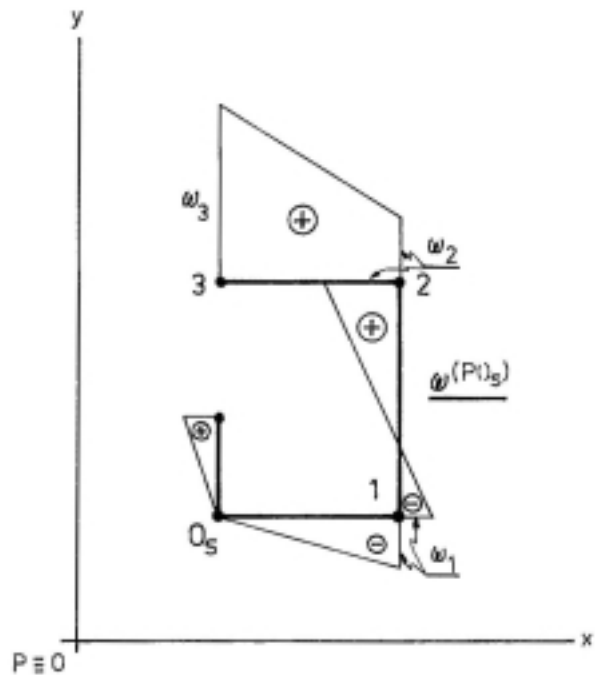


Figura 8.1

Las Ec. (8) y (9) son entonces una extensión de las Ec. (6) y (7) y nos permiten calcular la coordenada sectorial $\omega_i^{(pos)}$ de un punto (i) acumulando en el extremo u origen $(i-1)$ del tramo de sección al que pertenece, la $\omega_{i-1}^{(pos)}$ que fuera determinada para el elemento contiguo anterior y sumándole a la misma, la variación de coordenada sectorial que se produce entre $(i-1)$ e (i) .

3.- COORDENADA SECTORIAL DE UN PUNTO CUANDO SE MODIFICA LA UBICACION DEL ORIGEN DE COORDENADAS SECTORIALES O_s .

Nos proponemos a continuación calcular la coordenada sectorial de un punto S cuando se modifica la ubicación del origen CS dejando inalterada la posición del polo.

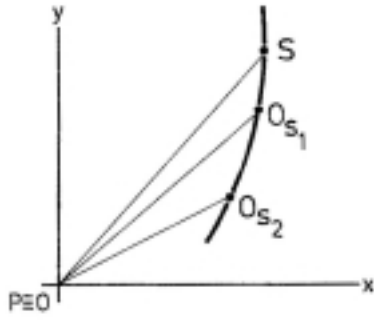


Figura 9.1

De acuerdo a la Figura 9.1, podemos decir que la coordenada sectorial del punto S , con origen sectorial O_{s1} , es proporcional al área del sector $O_{s1}\hat{O}S$. También, podemos observar que la coordenada sectorial del mismo punto, pero con origen O_{s2} , es proporcional al área del sector $O_{s2}\hat{O}S$. De la misma forma, la CS del punto O_{s1} , tomando como origen O_{s2} , es proporcional al área $O_{s2}\hat{O}O_{s1}$. Es decir:

$$O_{s2}\hat{O}S = O_{s2}\hat{O}O_{s1} + O_{s1}\hat{O}S$$

de modo que, dada la equivalencia entre áreas y CS, podemos escribir:

$$(*) \quad \omega_S^{(oo_{s2})} = \omega_{O_{s1}}^{(oo_{s2})} + \omega_S^{(oo_{s1})}$$

de acuerdo a la Ec.(2) la CS del punto S con origen O_{s1} es:

$$\omega_S^{(oo_{s1})} = \int_{O_{s1}}^S x dy - \int_{O_{s1}}^S y dx$$

y la CS del punto S con origen O_{s2} es:

$$\omega_{O_{s1}}^{(oo_{s2})} = \int_{O_{s2}}^{O_{s1}} x dy - \int_{O_{s2}}^{O_{s1}} y dx$$

Esta última integral, por estar acotada entre dos límites definidos, diremos que es igual a C_O , es decir: