

$$(10) \quad C_o = \int_{o_{s_2}}^{o_{s_1}} x \, dy - \int_{o_{s_2}}^{o_{s_1}} y \, dx$$

Podemos escribir entonces, que: $\omega_s^{(oo_{s_2})} = \omega_s^{(oo_{s_1})} + C_o$

y en general, sin subíndices:

$$(11) \quad \omega^{(oo_{s_2})} = \omega^{(oo_{s_1})} + C_o$$

Esta expresión nos permite afirmar que si mantenemos la posición del polo y modificamos el origen de CS (por ejemplo: de O_{s_1} a O_{s_2}), las CS de todos los puntos de la línea o contorno se incrementan en el mismo valor C_o .

(*) Los subíndices “ S ” u “ O_{s_1} ” han sido utilizados, en este caso, para individualizar el punto de cuya CS estamos tratando. En general, estos subíndices no son utilizados.

4.- COORDENADA SECTORIAL DE UN PUNTO CUANDO SE MODIFICA LA POSICION DEL POLO P Y SE MANTIENE EL ORIGEN O_s DE COORDENADAS SECTORIALES.

Trataremos de calcular la CS de un punto genérico S cuando practicamos un cambio de polo, por ejemplo, del origen de coordenadas cartesianas a un punto cualquiera $P(x_p, y_p)$, manteniendo invariable el origen de CS (Figura 10.1):

$\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j}$ Vector
posición del punto S .

$\bar{r}_p = x_p \bar{i} + y_p \bar{j}$ Vector
posición del polo P .

El vector posición \bar{r}_o del punto S referido ahora al polo P será:
 $\bar{r}_o = \bar{r} - \bar{r}_p$. Recordando la Ec.
(1) podemos calcular entonces la C.S. del punto S referida al nuevo polo P :

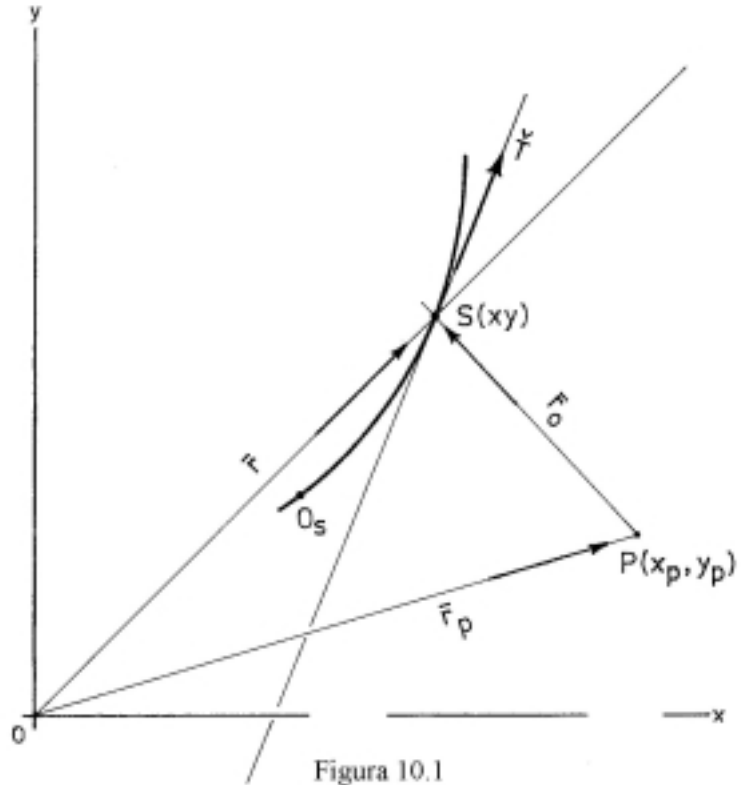


Figura 10.1

$$(12) \quad \omega^{(PO_S)} = \int_{O_S}^S \bar{\mathbf{r}}_O \times (ds \bar{\mathbf{T}}) \cdot \bar{\mathbf{e}}_z$$

En la que:

$$\bar{\mathbf{r}}_O \times (ds \bar{\mathbf{T}}) \cdot \bar{\mathbf{e}}_z = \begin{vmatrix} x-x_P & y-y_P & 0 \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} ds = (x-x_P) dy - (y-y_P) dx$$

Reemplazando y desarrollando la Ec. (12):

$$(13) \quad \begin{aligned} \omega^{(PO_S)} &= \int_{O_S}^S (x-x_P) dy - \int_{O_S}^S (y-y_P) dx = \\ &= \int_{O_S}^S x dy - \int_{O_S}^S y dx - x_P \int_{y_{O_S}}^y dy + y_P \int_{x_{O_S}}^x dx \end{aligned}$$

Recordando la Ec. (2) es: $\omega^{(OO_S)} = \int_{O_S}^S x dy - \int_{O_S}^S y dx$

que reemplazada en la Ec. (13) resulta:

$$(14) \quad \omega^{(PO_S)} = \omega^{(OO_S)} - x_P (y - y_{O_S}) + y_P (x - x_{O_S})$$

En esta expresión observamos que al cambiar el polo, por ejemplo, desde el origen de coordenadas cartesianas al punto P dejando invariable O_S , la CS de un punto $S(x, y)$ respecto del nuevo polo, varía en una magnitud que es función lineal de las coordenadas x e y del punto S y de la posición del polo P elegido.

Si hubiésemos elegido la nueva posición del polo P coincidente con el baricentro de la línea (Figura 11.1), tendríamos:

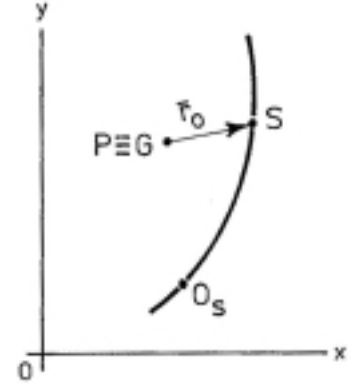


Figura 11.1

$$(15) \quad \omega^{(GO_S)} = \omega^{(OO_S)} - x_G (y - y_{O_S}) + y_G (x - x_{O_S})$$

5.- COORDENADA SECTORIAL DE UN PUNTO CUANDO SE PRODUCE SIMULTANEAMENTE UN CAMBIO DE ORIGEN SECTORIAL Y UN CAMBIO ENTRE POLOS NO COINCIDENTES CON EL ORIGEN DE COORDENADAS CARTESIANAS O .

Nos proponemos calcular la CS de un punto cuando cambiamos simultáneamente desde el polo $M(x_M, y_M)$ al polo $P(x_P, y_P)$ y desde el origen:

$O_{S_1}(x_{O_{S_1}}, y_{O_{S_1}})$ al $O_{S_2}(x_{O_{S_2}}, y_{O_{S_2}})$ (Figura 12.1).

Podemos escribir, de acuerdo con la Ec. (14), la CS del punto S con origen O_{S_2} y polo P :

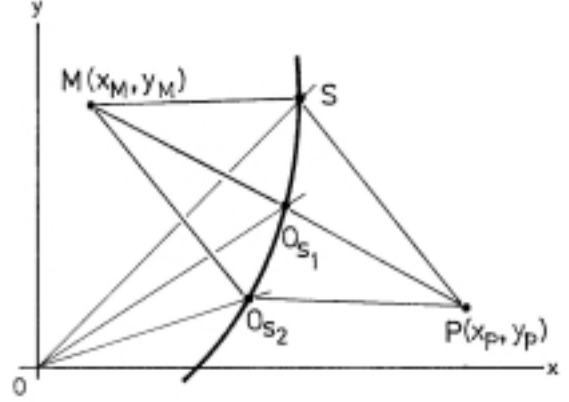


Figura 12.1

$$(16) \omega^{(PO_{S_2})} = \omega^{(OO_{S_2})} - x_P(y - y_{O_{S_2}}) + y_P(x - x_{O_{S_2}})$$

De igual modo podemos calcular la CS de S de igual origen O_{S_2} pero referida ahora al polo M :

$$(17) \omega^{(MO_{S_2})} = \omega^{(OO_{S_2})} - x_M(y - y_{O_{S_2}}) + y_M(x - x_{O_{S_2}})$$

Si restamos la Ec. (17) de la Ec. (16) y despejamos:

$$(18) \omega^{(PO_{S_2})} = \omega^{(MO_{S_2})} - (x_P - x_M)(y - y_{O_{S_2}}) + (y_P - y_M)(x - x_{O_{S_2}})$$

Para tener la expresión (18) referida también al origen O_{S_1} retomemos la Ec.(17) teniendo en cuenta la Ec.(11):

$$(19) \omega^{(MO_{S_2})} = \omega^{(OO_{S_1})} + C_O - x_M(y - y_{O_{S_2}}) + y_M(x - x_{O_{S_2}})$$

y escribiendo: $y - y_{O_{S_2}} = (y - y_{O_{S_1}})(y_{O_{S_1}} - y_{O_{S_2}})$

$$x - x_{O_{S_2}} = (x - x_{O_{S_1}})(x_{O_{S_1}} - x_{O_{S_2}})$$

nos queda la Ec.(19) escrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \omega^{(MO_{S_2})} &= \omega^{(OO_{S_1})} + C_O - x_M[(y - y_{O_{S_1}}) + (y_{O_{S_1}} - y_{O_{S_2}})] + \dots \\ &\quad \dots + y_M[(x - x_{O_{S_1}}) + (x_{O_{S_1}} - x_{O_{S_2}})] = \end{aligned}$$

$$= \omega^{(oo_{s_I})} - x_M (y - y_{o_{s_I}}) + y_M (x - x_{o_{s_I}}) - \dots \\ \dots - x_M (y_{o_{s_I}} - y_{o_{s_2}}) + y_M (x_{o_{s_I}} - x_{o_{s_2}}) + C_o$$

De acuerdo a la Ec.(14) los tres primeros términos de la expresión anterior son iguales a $\omega^{(MO_{s_I})}$, de modo que:

$$\omega^{(MO_{s_2})} = \omega^{(MO_{s_I})} - x_M (y_{o_{s_I}} - y_{o_{s_2}}) + y_M (x_{o_{s_I}} - x_{o_{s_2}}) + C_o$$

De esta forma podemos escribir la Ec.(18):

$$(20) \quad \omega^{(PO_{s_2})} = \omega^{(MO_{s_I})} - (x_P - x_M)(y - y_{o_{s_2}}) + (y_P - y_M)(x - x_{o_{s_2}}) + C_P$$

$$\text{En la que:} \quad C_P = -x_M (y_{o_{s_I}} - y_{o_{s_2}}) + y_M (x_{o_{s_I}} - x_{o_{s_2}}) + C_o$$

En la Ec.(20) observamos que al cambiar el polo (de M a P) y el origen sectorial (de O_{s_I} a O_{s_2}) la CS de un punto se altera en una magnitud que es función lineal de las coordenadas (x , y) del punto y en otra magnitud C_P que es constante e igual para todos los puntos de la línea o contorno.