

CAPITULO 2

MOMENTOS SECTORIALES DE PRIMERO Y SEGUNDO ORDEN

1.- MOMENTO ESTATICO SECTORIAL $(S_{\omega}^{(PO_s)})$.

Imaginemos la sección transversal de una barra, de espesor delgado uniforme o variable, sobre la cual indicamos la línea media de su sección. Supondremos que todos los puntos de esta línea están referidos, mediante una ecuación, a un sistema de ejes coordenados x - y (Figura .1.2).

Para esa línea media fijamos un polo arbitrario P , un origen de CS O_s y en el entorno de un punto genérico S , el elemento de área dF ($dF = e \, ds$), perteneciente a la sección.

Se define: “El Momento Estático Sectorial de un elemento de superficie dF (del entorno del punto S) respecto al polo P y al origen O_s , es igual al producto de la coordenada sectorial de dicho punto, $\omega^{(PO_s)}$, por el área del elemento de superficie dF ”:

$$dS_{\omega}^{(PO_s)} = \omega^{(PO_s)} dF$$

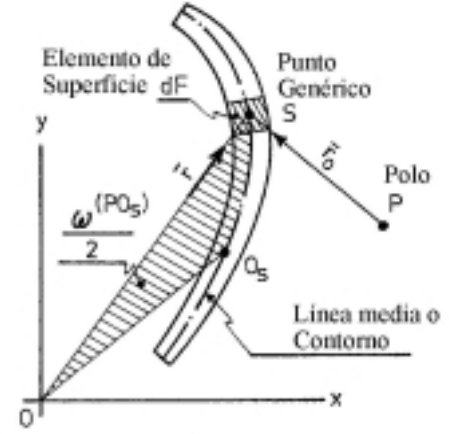


Figura 1.2

Integrando la expresión diferencial:

$$(22) \quad S_{\omega}^{(PO_s)} = \int_F \omega^{(PO_s)} dF$$

Para resolver esta integral de superficie, se debe elegir un *origen de integración*, el cual, puede ser diferente al origen sectorial O_s del sistema sectorial establecido. A veces es conveniente elegir el origen de integración, coincidente con alguno de los extremos de la línea o sección en estudio.

Para que la Ec. (22) tenga un carácter más general, la escribiremos precisando el origen sectorial elegido, en este caso, O_{s_2} :

$$(23) \quad S_{\omega}^{(PO_{s_2})} = \int_F \omega^{(PO_{s_2})} dF$$

Recordando la Ec. (20), que da la CS de un punto cuando se produce un cambio de polo y origen simultáneos, podemos sustituirla en la Ec. (23) y tendremos:

$$\begin{aligned} S_{\omega}^{(PO_{s_2})} &= \int_F \omega^{(MO_{s_1})} dF - (x_P - x_M) \int_F (y - y_{O_{s_2}}) dF + (y_P - y_M) \int_F (x - x_{O_{s_2}}) dF + \\ &+ C_P \int_F dF = \end{aligned}$$

$$= S_{\omega}^{(MO_{s_1})} - (x_P - x_M) S_x + (x_P - x_m) y_{O_{s_2}} F + (y_P - y_M) S_y - \\ K - (y_P - y_M) x_{O_{s_2}} F + C_P F$$

$$(24) \quad S_{\omega}^{(PO_{s_2})} = S_{\omega}^{(MO_{s_1})} + C_P F - (x_P - x_M) (S_x - y_{O_{s_2}} F) + (y_P - y_M) (S_y - x_{O_{s_2}} F)$$

$$\text{Recordemos que } C_P = -x_M (y_{O_{s_1}} - y_{O_{s_2}}) + y_M (x_{O_{s_1}} - x_{O_{s_2}}) + C_O$$

La Ec. (24) nos permite calcular el momento estático sectorial de una superficie, respecto de un nuevo origen (O_{s_2}) y polo P , a partir de los valores correspondientes que la misma tiene respecto a otro sistema de referencia inicial (M, O_{s_1}) .

Haremos algunas consideraciones con relación a las modificaciones que puede sufrir el momento estático sectorial de una superficie, cuando el mismo se refiere a distintos polos de diversos sistemas:

■ Por ejemplo, si en la Ec. (24) hacemos coincidir M con el origen de coordenadas cartesianas, es decir $M \equiv O$, resultará:

$$x_M = y_M = O \\ \text{y a su vez } C_P = C_O$$

de manera que la (24) se transforma en:

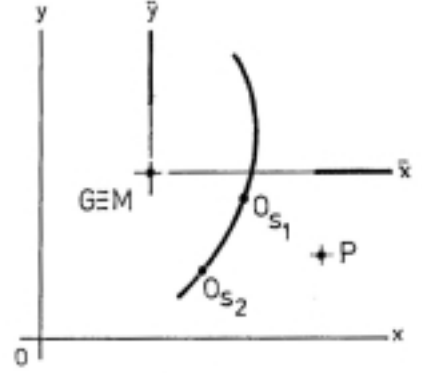


Figura 2.2

$$(25) \quad S_{\omega}^{(PO_{s_2})} = S_{\omega}^{(OO_{s_1})} + C_O F - x_P (S_x - y_{O_{s_2}} F) + y_P (S_y - x_{O_{s_2}} F)$$

■ Si ahora hacemos coincidir M con el baricentro G de la sección, es decir $M \equiv G$ (Figura 2.2), quedará:

$$(26) \quad S_{\omega}^{(PO_{s_2})} = S_{\omega}^{(GO_{s_1})} + C_P F - (x_P - x_G) (S_x - y_{O_{s_2}} F) + (y_P - y_G) (S_y - x_{O_{s_2}} F) \\ \text{con: } C_P = -x_G (y_{O_{s_1}} - y_{O_{s_2}}) + y_G (x_{O_{s_1}} - x_{O_{s_2}}) + C_O$$

■ Si, finalmente, hacemos coincidir $M \equiv O \equiv G$, (Figura 2.2), los momentos estáticos S_x y S_y referidos a los ejes baricéntricos (\bar{x}, \bar{y}) se anulan y quedará entonces:

$$(26a) \quad C_P = C_O = \int_{O_{s_2}}^{O_{s_1}} \bar{x} d\bar{y} - \int_{O_{s_2}}^{O_{s_1}} \bar{y} d\bar{x}$$

$$(27) \quad S_{\omega}^{(PO_{s_2})} = S_{\omega}^{(GO_{s_1})} + C_o F + (\bar{x}_P \bar{y}_{O_{s_2}} - \bar{y}_P \bar{x}_{O_{s_2}}) F$$

Hemos indicado las coordenadas referidas a ejes baricéntricos (es $G \equiv O$) con un guión superior.

La CS dada por el cociente:

$$\bar{\omega}_{O_i}^{(PO_{s_2})} = \frac{S_{\omega}^{(PO_{s_2})}}{F}$$

corresponde a un punto O_i perteneciente a la línea media de la sección, para el que se cumple que el momento estático sectorial S_{ω} - calculado para el polo P y dicho punto O_i tomado como origen - es nulo. A este punto podemos denominarlo, *origen sectorial de segundo orden de la línea media de la sección, respecto del polo P* . A cada polo elegido arbitrariamente (P , M , etc.) le corresponderá un origen sectorial de segundo orden, en general, distinto y para el cual se cumple que el momento estático sectorial es nulo.

2.- PROPIEDADES DEL ORIGEN SECTORIAL.

2.1.- Origen Sectorial Secundario (O_s^*)

Siendo O un origen de coordenadas cartesianas arbitrario, podemos escribir en forma general, según la Ec. (20):

$$\omega^{(PO_{s_2})} = \omega^{(MO_{s_1})} - (x_P - x_M)(y - y_{O_{s_2}}) + (y_P - y_M)(x - x_{O_{s_2}}) + C_P$$

C_P : tiene el contenido dado por la Ec. (21).

Si imaginamos que hacemos sólo cambio de origen sectorial y no de polo ($x_P = x_M$, $y_P = y_M$), la anterior nos queda, como ya hemos visto:

$$\omega^{(MO_{s_2})} = \omega^{(MO_{s_1})} + C_o$$

y de acuerdo a la Ec.(23):

$$S_{\omega}^{(MO_{s_2})} = \int_F [\omega^{(MO_{s_1})} + C_P] dF$$

que resultará igual a:

$$(28) \quad S_{\omega}^{(MO_{s_2})} = S_{\omega}^{(MO_{s_1})} + C_P F$$

Siempre es posible encontrar un origen sectorial O_s^* tal que:

$$(28a) \quad S_{\omega}^{(MO_s^*)} = S_{\omega}^{(MO_{s_1})} + C_P F = 0$$

de la cual obtenemos:

$$C_P = \frac{S_{\omega}^{(MO_{s_I})}}{F} \quad (29)$$

Las coordenadas del punto $O_s^* : x_{O_s}^*, y_{O_s}^*$ - *origen sectorial de segundo orden* - pueden obtenerse mediante un sistema de dos ecuaciones; una de ellas es la (29). Teniendo en cuenta la (21), la (29) puede describirse:

$$C_P = \frac{S_{\omega}^{(MO_{s_I})}}{F} = -x_M (y_{O_{s_I}} - y_{O_s}^*) + y_M (x_{O_{s_I}} - x_{O_s}^*) + C_{O_s^*} \quad (29a)$$

La segunda ecuación, es la ecuación algebraica de la línea media o perfil: $y = f(x)$ (29b)

Del sistema que constituyen ambas ecuaciones, podemos determinar:

$$-x_M [f(x_{O_{s_I}}) - f(x_{O_s}^*)] + f(x_M)(x_{O_{s_I}} - x_{O_s}^*) + C_{O_s^*} = C_P$$

de la cual despejamos:

$$x_{O_s}^*$$

y de la (29b)

$$y_{O_s}^* = f(x_{O_s}^*)$$

Estas coordenadas son las que corresponden al punto cuya coordenada sectorial es, como hemos visto en el artículo anterior, $\bar{\omega}^{(MO_{s_2})}$ pero referida en este caso, al polo analizado M .

2.2.-Origen Sectorial Principal (\bar{O}_s)

Si ahora hacemos coincidir M con G , al origen sectorial \bar{O}_s que satisface la condición:

$$S_{\omega}^{(G\bar{O}_s)} = S_{\omega}^{(GO_{s_I})} + C_{\bar{P}}F = 0.$$

lo llamaremos, por analogía, “*origen sectorial principal o de primer orden*” \bar{O}_s .

Si además es G origen del sistema de coordenadas cartesianas, es $C_{\bar{P}} = C_{\bar{O}}$ y nos queda:

$$(30) \quad C_{\bar{O}} = \frac{S_{\omega}^{(GO_{s_I})}}{F}$$

que junto con: $y = f(x)$ de la línea media, nos permitirán calcular $\bar{x}_{\bar{O}_s}$ e $\bar{y}_{\bar{O}_s}$ que son las coordenadas del “*origen sectorial principal*” respecto de los ejes \bar{x}, \bar{y} baricéntricos.

Con estas últimas coordenadas podemos escribir la Ec. (27) de la siguiente forma:

$$(31) \quad S_{\omega}^{(P\bar{O}_s)} = (\bar{x}_P \bar{y}_{\bar{O}_s} - \bar{y}_P \bar{x}_{\bar{O}_s}) F$$

ya que para esas condiciones es, según la (30):

$$S_{\omega}^{(GO_s)} + C_{\bar{O}} F = 0$$

De la expresión (31) es fácil deducir que $S_{\omega}^{(P\bar{O}_s)}$ será igual a cero para todos los polos P^* contenidos en una recta que pasa por $G \equiv O$ y que contiene a \bar{O}_s (Figura 3.2), es decir:

$$S_{\omega}^{(P\bar{O}_s)} = (\bar{x}_{P^*} \bar{y}_{\bar{O}_s} - \bar{y}_{P^*} \bar{x}_{\bar{O}_s}) F = 0$$

por lo tanto:
$$\bar{x}_{P^*} \bar{y}_{\bar{O}_s} - \bar{y}_{P^*} \bar{x}_{\bar{O}_s} = 0$$

de donde:
$$\bar{x}_{P^*} = \frac{\bar{x}_{\bar{O}_s}}{\bar{y}_{\bar{O}_s}} \bar{y}_{P^*}$$

Esta es la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas G baricéntrico y que contiene a \bar{O}_s . A esta recta la llamaremos, también por las analogías que veremos más adelante, “Eje sectorial principal”, a diferencia de otra recta cualquiera definida por un polo y un origen sectorial arbitrarios.

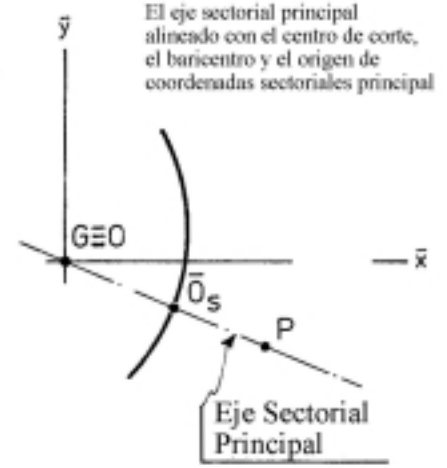


Figura 3.2

El *eje sectorial principal*, así como el *origen principal* \bar{O}_s constituyen una característica geométrica de la sección. No obstante puede ocurrir que el origen \bar{O}_s no sea único y que la Ec. (30) pueda ser satisfecha, por ejemplo, por puntos alineados pertenecientes a una rama del contorno alineada con el eje principal. En este caso particular, cualquiera de esos puntos es origen principal.

3.- MOMENTO CENTRIFUGO SECTORIAL $(I_{\omega_x}^{(PO_s)}, I_{\omega_y}^{(PO_s)})$.

Se define: “El *Momento Centrífugo Sectorial* de un elemento de superficie dF perteneciente al entorno de un punto S , respecto al polo P , al origen O_s y al eje x (ó y), es igual al producto de la CS de dicho punto $\omega^{(PO_s)}$, por la distancia y al eje x (o por la distancia x al eje y) y por el área del elemento de superficie dF ”. Es decir:

$$dI_{\omega_s}^{(PO_s)} = \omega^{(PO_s)} y dF \therefore I_{\omega_x}^{(PO_s)} = \int_F \omega^{(PO_s)} y dF$$

y respecto del eje y
$$I_{\omega_y}^{(PO_s)} = \int_F \omega^{(PO_s)} x dF$$

Desarrollaremos en primer lugar una expresión más general para $I_{\omega_x}^{(PO_s)}$.

Teniendo en cuenta la Ec. (20) escribiremos:

$$\begin{aligned}
 I_{\omega_x}^{(PO_S)} &= \int_F \omega^{(MO_{S_1})} y dF - (x_P - x_M) \int_F (y - y_{O_{S_2}}) y dF + \\
 &\quad + (y_P - y_M) \int_F (x - x_{O_{S_2}}) y dF + C_P \int_F y dF = \\
 &= I_{\omega_x}^{(MO_{S_1})} - (x_P - x_M) I_x + (y_P - y_M) I_{xy} + (x_P - x_M) y_{O_{S_2}} S_x - \\
 &\quad - (y_P - y_M) x_{O_{S_2}} S_x + C_P S_x \\
 (32) \quad I_{\omega_x}^{(PO_{S_1})} &= I_{\omega_x}^{(MO_{S_1})} + C_P S_x - (x_P - x_M) (I_x - y_{O_{S_2}} S_x) + \\
 &\quad + (y_P - y_M) I_{xy} + (y_P - y_M) (I_{xy} - x_{O_{S_2}} S_x)
 \end{aligned}$$

Recordemos que $C_P = -x_M (y_{O_{S_1}} - y_{O_S}) + y_M (x_{O_{S_1}} - x_{O_{S_2}}) + C_O$

Haremos algunas consideraciones con relación a las modificaciones que puede sufrir el momento centrífugo sectorial de una superficie, cuando el mismo se refiere a distintos polos de diversos sistemas:

■ Si en la Ec. (32) hacemos coincidir $M \equiv O$, origen del sistema de coordenadas cartesianas:

$$(33) \quad I_{\omega_x}^{(PO_{S_2})} = I_{\omega_x}^{(OO_{S_1})} + C_O S_x - x_P (I_x - y_{O_{S_2}} S_x) + y_P (I_{xy} - x_{O_{S_2}} S_x)$$

■ Haciendo ahora coincidir $M \equiv G$:

$$\begin{aligned}
 (34) \quad I_{\omega_x}^{(PO_{S_1})} &= I_{\omega_x}^{(GO_{S_1})} + C_P S_x - (x_P - x_G) (I_x - y_{O_{S_2}} S_x) + \\
 &\quad + (y_P - y_G) (I_{xy} - x_{O_{S_2}} S_x)
 \end{aligned}$$

■ Finalmente haciendo $M \equiv G \equiv O$: $x_M = y_M = 0$ $S_x = 0$:

$$(35) \quad I_{\omega_{\bar{x}}}^{(PO_{S_2})} = I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_{S_1})} - \bar{x}_P I_{\bar{x}} + \bar{y}_P I_{\bar{xy}}$$

El guión superior en \bar{x} y en \bar{y} indican que son ejes baricéntricos ortogonales.

■ Escribamos ahora:

$$\begin{aligned}
 I_{\omega_x}^{(OO_{S_2})} &= \int_F \omega^{(OO_{S_2})} y dF = \\
 &= \int_F \omega^{(OO_{S_1})} y dF + C_O \int_F y dF
 \end{aligned}$$

$$I_{\omega_x}^{(oo_{s_2})} = I_{\omega_x}^{(oo_{s_1})} + C_o S_x$$

Si el eje x es baricéntrico y es $G \equiv O$ resulta $S_{\bar{x}} = 0$ y la anterior queda:

$$I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_{s_2})} = I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{s_1})}$$

ecuación que nos permite afirmar que el valor del momento centrífugo sectorial, respecto de un polo coincidente con el baricentro, no se modifica al cambiar el origen sectorial O_s . Por lo tanto, tomando en cuenta esta conclusión en la Ec. (35) vemos que $I_{\omega_{\bar{x}}}^{(PO_{s_2})}$ tampoco se modificará al cambiar el origen de CS y puede entonces la Ec. (35) escribirse en función de un origen sectorial cualquiera, siempre que, como se ha dicho, esté referida a un sistema de ejes baricéntrico:

$$(36) \quad I_{\omega_{\bar{x}}}^{(PO_{s_2})} = I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_s)} - \bar{x}_P I_{\bar{x}} + \bar{y}_P I_{\bar{xy}}$$

La Ec. (36) puede expresarse también en función de los ejes principales de inercia:

$$(37) \quad I_{\omega_{\xi}}^{(PO_s)} = I_{\omega_{\xi}}^{(GO_s)} - \xi_P I_{\xi}$$

Repetiremos el procedimiento para la determinación de $I_{\omega_y}^{(PO_s)}$.

$$\begin{aligned} I_{\omega_y}^{(PO_{s_2})} &= \int_F \omega^{(MO_{s_1})} x dF - (x_P - x_M) \int_F (y - y_{O_{s_2}}) x dF + \\ &\quad + (y_P - y_G) \int_F (x - x_{O_{s_2}}) y dF + C_P \int_F x dF = \\ &= I_{\omega_y}^{(MO_{s_1})} + C_P S_y - (x_P - x_M) I_{xy} + (y_P - y_M) I_y + (x_P - x_M) y_{O_{s_2}} S_y - \\ &\quad - (y_P - y_M) x_{O_{s_2}} S_y \\ (38) \quad I_{\omega_y}^{(PO_{s_2})} &= I_{\omega_y}^{(MO_{s_1})} + C_P S_y - (x_P - x_M) (I_{xy} - y_{O_{s_2}} S_y) + (y_P - y_M) (I_y - x_{O_{s_2}} S_y) \end{aligned}$$

■ Si en la Ec. (38) hacemos coincidir $M \equiv G \equiv O$ quedará:

$$(39) \quad I_{\omega_{\bar{y}}}^{(PO_{s_2})} = I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{s_1})} - \bar{x}_P I_{\bar{xy}} + \bar{y}_P I_{\bar{y}}$$

como $I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{s_1})} = I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{s_2})} = \dots$ resultará también $I_{\omega_{\bar{y}}}^{(PO_{s_1})} = I_{\omega_{\bar{y}}}^{(PO_{s_2})} = \dots$

La Ec. (39) podemos escribirla con independencia del origen de CS ya que su ubicación no influirá en los resultados:

$$(40) \quad I_{\omega_{\bar{y}}}^{(PO_s)} = I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_s)} - \bar{x}_P I_{\bar{xy}} + \bar{y}_P I_{\bar{y}}$$

Esta ecuación expresada en función de los ejes principales de inercia queda:

$$(41) \quad I_{\omega_{\eta}}^{(PO_s)} = I_{\omega_{\eta}}^{(GO_s)} + \eta_p I_{\eta}$$

3.1.- POLO SECTORIAL PRINCIPAL.

Podemos calcular ahora las coordenadas de un polo \bar{P} característico y único de la sección que llamaremos “*polo sectorial principal*”, para el cual se cumple:

$$I_{\omega_{\xi}}^{(\bar{P}O_s)} = I_{\omega_{\eta}}^{(\bar{P}O_s)} = 0$$

Es decir, los momentos centrífugos sectoriales respecto a \bar{P} serán nulos. De aquí, utilizando la Ec. (37) y la (41) se obtiene que las coordenadas cartesianas del punto \bar{P} , referidas al sistema de ejes principales de la sección, son iguales respectivamente a:

$$(42) \quad \xi_{\bar{P}} = \frac{I_{\omega_{\xi}}^{(GO_s)}}{I_{\xi}} \quad (43) \quad \eta_{\bar{P}} = \frac{I_{\omega_{\eta}}^{(GO_s)}}{I_{\eta}}$$

Si expresamos la misma condición pero utilizando las Ec. (36) y (39) debe cumplirse también:

$$I_{\omega_{\bar{x}}}^{(\bar{P}O_s)} = I_{\omega_{\bar{y}}}^{(\bar{P}O_s)} = 0$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_s)} - \bar{x}_{\bar{P}} I_{\bar{x}} + \bar{y}_{\bar{P}} I_{\bar{x}\bar{y}} &= 0 \\ I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_s)} - \bar{x}_{\bar{P}} I_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{y}_{\bar{P}} I_{\bar{y}} &= 0 \end{aligned}$$

las cuales constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$(44) \quad \bar{x}_{\bar{P}} = \frac{I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_s)} I_{\bar{y}} - I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_s)} I_{\bar{x}}}{I_{\bar{x}} I_{\bar{y}} - I_{\bar{x}\bar{y}}^2}$$

$$(45) \quad \bar{y}_{\bar{P}} = \frac{I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_s)} I_{\bar{x}\bar{y}} - I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_s)} I_{\bar{x}}}{I_{\bar{x}} I_{\bar{y}} - I_{\bar{x}\bar{y}}^2}$$

$\bar{x}_{\bar{P}}, \bar{y}_{\bar{P}}$:son las coordenadas del polo principal \bar{P} referidas a un sistema de ejes baricéntricos.

3.2.- GIRO DEL SISTEMA DE EJES CARTESIANOS BARICENTRICOS.

Trataremos de determinar la variación de $I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_s)}$ e $I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_s)}$ cuando giramos los ejes baricéntricos. Para un giro α (Figura 4.2) tendremos:

$$\xi = \bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha \quad \eta = \bar{y} \cos \alpha - \bar{x} \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} I_{\omega_{\eta}}^{(GO_s)} &= \int_F \omega^{(GO_s)} \xi^2 dF = \int_F \omega^{(GO_s)} (\bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha)^2 dF = \\ &= \cos^2 \alpha \int_F \omega^{(GO_s)} \bar{x}^2 dF + \sin^2 \alpha \int_F \omega^{(GO_s)} \bar{y}^2 dF + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_F \omega^{(GO_s)} \bar{x} \bar{y} dF \end{aligned}$$

$$(46) \quad I_{\omega_{\eta}}^{(GO_s)} = I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_s)} \cos^2 \alpha + I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_s)} \sin^2 \alpha + 2 I_{\omega_{\bar{x}\bar{y}}}^{(GO_s)} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$I_{\omega_{\xi}}^{(GO_s)} = \int_F \omega^{(GO_s)} \eta^2 dF = \int_F \omega^{(GO_s)} (\bar{y} \cos \alpha - \bar{x} \sin \alpha)^2 dF$$

$$(47) \quad I_{\omega_{\xi}}^{(GO_s)} = I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_s)} \cos^2 \alpha + I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_s)} \sin^2 \alpha - 2 I_{\omega_{\bar{x}\bar{y}}}^{(GO_s)} \sin \alpha \cos \alpha$$

Remplazando las Ec. (46) y (47) en las (42) y (43), podemos calcular de otra manera las coordenadas del polo principal de la sección, referidas a los ejes principales de inercia:

$$(48) \quad \xi_P = \frac{I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_s)} \cos \alpha - I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_s)} \sin \alpha}{I_{\xi}}$$

$$(49) \quad \eta_P = - \frac{I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_s)} \cos \alpha - I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_s)} \sin \alpha}{I_{\eta}}$$

En las que, por tratarse de los ejes principales de inercia, es: $\tan 2\alpha = \frac{2 I_{\omega_{\bar{x}\bar{y}}}^{(GO_s)}}{I_{\bar{y}} - I_{\bar{x}}}$

La ventaja de utilizar las expresiones (48) y (49) es que el cálculo de $I_{\omega_{\xi}}^{(GO_s)}$ e $I_{\omega_{\eta}}^{(GO_s)}$, que deberíamos utilizar en las ecuaciones (42) y (43),

puede resultar algo complicado, no es así en cambio, el cálculo de $I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_s)}$ e $I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_s)}$.

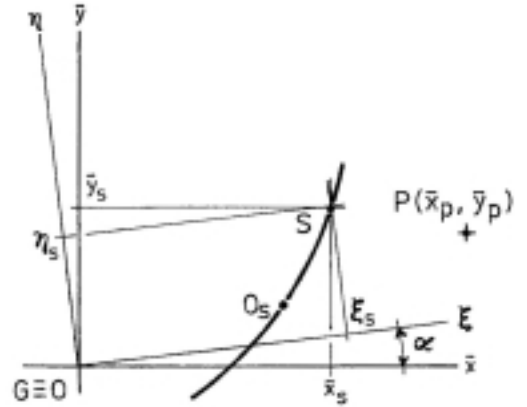


Figura 4.2

3.3.- TRASLACION DEL SISTEMA DE EJES CARTESIANOS.

Se determinará la variación de $I_{\omega_x}^{(PO_s)}$ e $I_{\omega_y}^{(PO_s)}$ cuando se modifica la posición del origen de coordenadas cartesianas en el plano. (por ejemplo de O a G) (Figura 5.2).

$$y = \bar{y} + y_G$$

$$x = \bar{x} + x_G$$

El momento centrífugo sectorial respecto del eje x , escrito en forma general es:

$$I_{\omega_x}^{(PO_S)} = \int_F \omega^{(PO_S)} y dF = \int_F \omega^{(PO_S)} (\bar{y} + y_G) dF = y_G S_{\omega_x}^{(PO_S)} + I_{\omega_{\bar{x}}}^{(PO_S)}$$

de aquí:

$$I_{\omega_{\bar{x}}}^{(PO_S)} = I_{\omega_x}^{(PO_S)} - y_G S_{\omega}^{(PO_S)}$$

De la misma manera:

$$I_{\omega_{\bar{y}}}^{(PO_S)} = I_{\omega_y}^{(PO_S)} - x_G S_{\omega}^{(PO_S)}$$

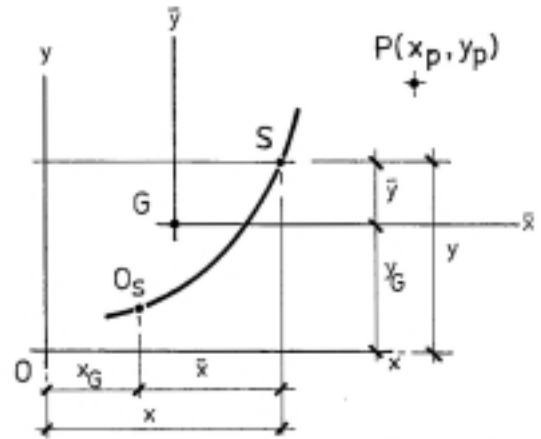


Figura 5.2