

CAPITULO 3

MOMENTO DE INERCIA SECTORIAL O MODULO DE ALABEO DE UNA SECCION

1.- MOMENTO DE INERCIA SECTORIAL $I_{\omega}^{(PO_s)}$.

Se define: “El Momento de Inercia Sectorial de un elemento de superficie dF perteneciente al entorno de un punto S , respecto del polo P y al origen O_S , es igual al producto del cuadrado de la CS de dicho punto $\omega^{(PO_s)}$ por el área del elemento de superficie dF ”. Es decir:

$$dI_{\omega}^{(PO_s)} = \omega^{(PO_s)^2} dF$$

$$\text{e integrando: (50) } I_{\omega}^{(PO_s)} = \int_F \omega^{(PO_s)^2} dF$$

Haremos algunas consideraciones en relación a las modificaciones que puede sufrir el momento de inercia sectorial de una superficie, cuando el mismo se refiere a distintos polos de diversos sistemas de referencia:

■ Daremos a la Ec. (50) un carácter más general:

$$(51) \quad I_{\omega}^{(PO_{S_2})} = \int_F \omega^{(PO_{S_2})^2} dF$$

Transcribiremos la Ec. (20):

$$\omega^{(PO_{S_2})} = \omega^{(MO_{S_1})} - (x_P - x_M)(y - y_{O_{S_2}}) + (y_P - y_M)(x - x_{O_{S_2}}) + C_P$$

Elevando al cuadrado tendremos:

$$\begin{aligned} \omega^{(PO_{S_2})^2} &= \omega^{(MO_{S_1})^2} + [(x_P - x_M)(y - y_{O_{S_2}})]^2 + [(y_P - y_M)(x - x_{O_{S_2}})]^2 + C_P^2 - \\ &- 2\omega^{(MO_{S_1})}(x_P - x_M)(y - y_{O_{S_2}}) + 2\omega^{(MO_{S_1})}(y_P - y_M)(x - x_{O_{S_2}}) + \\ &+ 2\omega^{(MO_{S_1})}C_P - 2(x_P - x_M)(y - y_{O_{S_2}})(y_P - y_M)(x - x_{O_{S_2}}) - \\ &- 2(x_P - x_M)(y - y_{O_{S_2}})C_P + 2(y_P - y_M)(x - x_{O_{S_2}})C_P \end{aligned}$$

Desarrollando los términos contenidos en la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
 1) & [(x_P - x_M)(y - y_{O_{S_2}})]^2 = (x_P - x_M)(y^2 + y_{O_{S_2}}^2 - 2yy_{O_{S_2}}) \\
 2) & [(y_P - y_M)(x - x_{O_{S_2}})]^2 = (y_P - y_M)(x^2 + x_{O_{S_2}}^2 - 2xx_{O_{S_2}}) \\
 3) & -2\omega^{(MO_{S_1})}(x_P - x_M)(y - y_{O_{S_2}}) = -2(x_P - x_M)[y\omega^{(MO_{S_1})} - y_{O_{S_2}}\omega^{(MO_{S_1})}] \\
 4) & +2\omega^{(MO_{S_1})}(y_P - y_M)(x - x_{O_{S_2}}) = +2(y_P - y_M)[x\omega^{(MO_{S_1})} - x_{O_{S_2}}\omega^{(MO_{S_1})}] \\
 5) & -2(x_P - x_M)(y - y_{O_{S_2}})(y_P - y_M)(x - x_{O_{S_2}}) = \\
 & = -2(x_P - x_M)(y_P - y_M)[yx - y_{O_{S_2}}x - x_{O_{S_2}}y + x_{O_{S_2}}y]
 \end{aligned}$$

Reemplazando los términos desarrollados, en la Ec. (51) e integrando:

$$\begin{aligned}
 I_{\omega}^{(PO_{S_1})} &= I_{\omega}^{(MO_{S_1})} + (x_P - x_M)^2 [I_x + y_{O_{S_2}}^2 F - 2y_{O_{S_2}}S_x] + \\
 &+ (y_P - y_M)^2 [I_y + x_{O_{S_2}}^2 F - 2x_{O_{S_2}}S_y] - 2(x_P - x_M) \dots \\
 &\dots [I_{\omega}^{(MO_{S_1})} - y_{O_{S_2}}S_{\omega}^{(MO_{S_1})}] + 2(y_P - y_M)[I_{\omega}^{(MO_{S_1})} - x_{O_{S_2}}S_{\omega}^{(MO_{S_1})}] - \\
 &- 2(x_P - x_M)(y_P - y_M)[I_{xy} - x_{O_{S_2}}S_x - y_{O_{S_2}}S_y + x_{O_{S_2}}y_{O_{S_2}}F] + \\
 &+ C_P^2 F + 2C_P S_{\omega}^{(MO_{S_1})} - 2(x_P - x_M)C_P[S_x - y_{O_{S_2}}F] + \\
 &+ 2(y_P - y_M)C_P[S_y - x_{O_{S_2}}F]
 \end{aligned}$$

Agrupando los términos obtenemos la Ec. (52):

$$\begin{aligned}
 I_{\omega}^{(PO_{S_2})} &= I_{\omega}^{(MO_{S_1})} + C_P^2 F + 2C_P S_{\omega}^{(MO_{S_1})} + (x_P - x_M)^2 [I_x + y_{O_{S_2}}^2 F - 2y_{O_{S_2}}S_x] + \\
 &+ (y_P - y_M)^2 [I_y + x_{O_{S_2}}^2 F - 2x_{O_{S_2}}S_y] - \\
 &- 2(x_P - x_M)[I_{\omega}^{(MO_{S_1})} + C_P S_x - y_{O_{S_2}}S_{\omega}^{(MO_{S_1})} - C_P y_{O_{S_2}}F] + \\
 &+ 2(y_P - y_M)[I_{\omega}^{(MO_{S_1})} + C_P S_y - x_{O_{S_2}}S_{\omega}^{(MO_{S_1})} - C_P x_{O_{S_2}}F] - \\
 &- 2(x_P - x_M)(y_P - y_M)[I_{xy} - x_{O_{S_2}}S_x - y_{O_{S_2}}S_y + x_{O_{S_2}}y_{O_{S_2}}F]
 \end{aligned}$$

Haremos algunas consideraciones en relación a las modificaciones que puede sufrir el momento de inercia sectorial de una superficie, cuando el mismo se refiere a distintos polos de diversos sistemas:

■ Si en la Ec. (52) hacemos coincidir $M \equiv G \equiv O$ es

$$\begin{aligned}
 x_M &= y_M = 0 \\
 C_P &= C_O
 \end{aligned}$$

$$Sx = Sy = 0$$

$$\begin{aligned}
 I_{\omega}^{(MO_{S_I})} = & I_{\omega}^{(GO_{S_I})} + C_o F + 2 C_o I_{\omega}^{(GO_{S_I})} + \bar{x}_P^2 (I_{\bar{x}} \bar{y}_{O_{S_2}}^2 F) + \bar{y}_P^2 (I_{\bar{y}} \bar{x}_{O_{S_2}}^2 F) - \\
 & - 2 \bar{x}_P [I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_{S_I})} - \bar{y}_{O_{S_2}}^2 S_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_o \bar{y}_{O_{S_2}} F] + \\
 (53) \quad & + 2 \bar{y}_P [I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{S_I})} - \bar{x}_{O_{S_2}}^2 S_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_o \bar{x}_{O_{S_2}} F] - 2 \bar{x}_P \bar{y}_P \dots \\
 & \dots [I_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{x}_{O_{S_2}} \bar{y}_{O_{S_2}} F]
 \end{aligned}$$

■ Adoptemos ahora como origen de coordenadas sectoriales, al punto $O_{S_2} = \bar{O}_S$ o sea el *origen sectorial principal* y recordando las Ec. (28a) y (30), tendremos:

$$S_{\omega}^{(o\bar{O}_S)} = S_{\omega}^{(oo_s)} + C_o F = 0$$

en nuestro caso por ser $G \equiv O$ queda:

$$S_{\omega}^{(G\bar{O}_S)} = S_{\omega}^{(GO_{S_I})} + C_{\bar{O}} F = 0$$

es decir:

$$S_{\omega}^{(GO_{S_I})} = -C_{\bar{O}} F \quad \text{y} \quad C_{\bar{O}} S_{\omega}^{(GO_{S_I})} = -C_{\bar{O}}^2 F$$

De esta manera, la Ec. (53) se simplifica:

$$\begin{aligned}
 I_{\omega}^{(P\bar{O}_S)} = & I_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_{\bar{O}}^2 F + \bar{x}_P^2 (I_{\bar{x}} + \bar{y}_{O_{S_2}}^2 F) + \bar{y}_P^2 (I_{\bar{y}} + \bar{x}_{O_{S_2}}^2 F) - \\
 & - 2 \bar{x}_P I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_{S_I})} + 2 \bar{y}_P I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{S_I})} - 2 \bar{x}_P \bar{y}_P (I_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{x}_{\bar{O}_S} \bar{y}_{\bar{O}_S} F)
 \end{aligned}$$

Como ya hemos visto en la página 16 es indistinto calcular $I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_{S_I})}$ ó $I_{\omega_{\bar{x}}}^{(G\bar{O}_S)}$ ($I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{S_I})}$ ó $I_{\omega_{\bar{y}}}^{(G\bar{O}_S)}$) dado que son iguales.

La expresión anterior la agruparemos en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 I_{\omega}^{(P\bar{O}_S)} = & I_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_{\bar{O}}^2 F + \bar{x}_P^2 I_{\bar{x}} + \bar{y}_P^2 I_{\bar{y}} - 2 \bar{x}_P I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_{S_I})} + 2 \bar{y}_P I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{S_I})} - \\
 & - 2 \bar{x}_P \bar{y}_P I_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{x}_P^2 \bar{y}_{\bar{O}_S}^2 F + \bar{y}_P^2 \bar{x}_{\bar{O}_S}^2 F - 2 \bar{x}_P \bar{y}_P \bar{x}_{\bar{O}_S} \bar{y}_{\bar{O}_S} F \\
 (54) \quad I_{\omega}^{(P\bar{O}_S)} = & I_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_{\bar{O}}^2 F + \bar{x}_P^2 I_{\bar{x}} + \bar{y}_P^2 I_{\bar{y}} - 2 \bar{x}_P I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_{S_I})} + 2 \bar{y}_P I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{S_I})} - \\
 & - 2 \bar{x}_P \bar{y}_P I_{\bar{x}\bar{y}} + (\bar{x}_P \bar{y}_{\bar{O}_S} - \bar{y}_P \bar{x}_{\bar{O}_S})^2 F
 \end{aligned}$$

El último término de la expresión anterior representa según la Ec. (31):

$$(\bar{x}_P \bar{y}_{\bar{O}_S} - \bar{y}_P \bar{x}_{\bar{O}_S})^2 F = S_{\omega}^{(P\bar{O}_S)} (\bar{x}_P \bar{y}_{\bar{O}_S} - \bar{y}_P \bar{x}_{\bar{O}_S})$$

o sea la Ec. (54) queda expresada:

$$(55) \quad I_{\omega}^{(P\bar{O}_S)} = I_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_{\bar{O}}^2 F + \bar{x}_P^2 I_{\bar{x}} + \bar{y}_P^2 I_{\bar{y}} - 2 \bar{x}_P I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_{S_I})} + 2 \bar{y}_P I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{S_I})} - 2 \bar{x}_P \bar{y}_P I_{\bar{x}\bar{y}} + (\bar{x}_P \bar{y}_{\bar{O}_S} - \bar{y}_P \bar{x}_{\bar{O}_S}) S_{\omega}^{(P\bar{O}_S)}$$

Con el objeto de obtener valores mínimos de $I_{\omega}^{(P\bar{O}_S)}$ adoptaremos en primer lugar, un polo P ubicado sobre el eje sectorial principal, esta condición implica, teniendo en cuenta la Ec. (31), una primera simplificación:

$$S_{\omega}^{(P\bar{O}_S)} (\bar{x}_P \bar{y}_{\bar{O}_S} - \bar{y}_P \bar{x}_{\bar{O}_S}) = 0$$

Entonces la Ec. (55) queda reducida a:

$$(56) \quad I_{\omega}^{(P\bar{O}_S)} = I_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_{\bar{O}}^2 F + \bar{x}_P^2 I_{\bar{x}} + \bar{y}_P^2 I_{\bar{y}} - 2 \bar{x}_P I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_{S_I})} + 2 \bar{y}_P I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{S_I})} - 2 \bar{x}_P \bar{y}_P I_{\bar{x}\bar{y}}$$

Esta ecuación puede ser expresada, por simplicidad, en función de los ejes principales de inercia:

$$(57) \quad I_{\omega}^{(P\bar{O}_S)} = I_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_{\bar{O}}^2 F + \xi_P^2 I_{\xi} + \eta_P^2 I_{\eta} - 2 \xi_P I_{\omega_{\xi}}^{(GO_{S_I})} + 2 \eta_P I_{\omega_{\eta}}^{(GO_{S_I})}$$

Para obtener los valores límites de $I_{\omega}^{(P\bar{O}_S)}$ derivaremos la Ec. (57) respecto a ξ_P y η_P :

$$\frac{\delta I_{\omega}^{(P\bar{O}_S)}}{\delta \xi_P} = 2 \xi_P I_{\xi} - 2 I_{\omega_{\xi}}^{(GO_{S_I})} = 0 \quad \therefore \xi_{\bar{P}} = \frac{I_{\omega_{\xi}}^{(GO_{S_I})}}{I_{\xi}} \quad (58)$$

$$\frac{\delta I_{\omega}^{(P\bar{O}_S)}}{\delta \eta_P} = 2 \eta_P I_{\eta} + 2 I_{\omega_{\eta}}^{(GO_{S_I})} = 0 \quad \therefore \eta_{\bar{P}} = -\frac{I_{\omega_{\eta}}^{(GO_{S_I})}}{I_{\eta}} \quad (59)$$

Como las derivadas segundas de $I_{\omega}^{(P\bar{O}_S)}$ respecto de ξ_P y η_P son positivas, las coordenadas $\xi_{\bar{P}}$ y $\eta_{\bar{P}}$ obtenidas corresponden a un polo que hace mínimo el valor de $I_{\omega}^{(P\bar{O}_S)}$. Por otra parte, es fácil comprender que los puntos P^* impropios del plano determinan valores máximos de $I_{\omega}^{(P^*\bar{O}_S)}$. Comparando la (58) y (59) con las Ec. (42) y (43), podemos observar que los valores hallados son coincidentes con las coordenadas del polo principal \bar{P} .

De esta manera, el momento de inercia sectorial mínimo, respecto del polo principal \bar{P} y origen principal \bar{O}_S , puede expresarse:

$$(60) \quad \text{mín } I_{\omega}^{(\bar{P}\bar{O}_S)} = I_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_{\bar{O}}^2 F + \xi_{\bar{P}}^2 I_{\xi} + \eta_{\bar{P}}^2 I_{\eta} - 2 \xi_{\bar{P}} I_{\omega_{\xi}}^{(GO_{S_I})} + 2 \eta_{\bar{P}} I_{\omega_{\eta}}^{(GO_{S_I})}$$

En esta expresión es:

$\left[I_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_{\bar{O}}^2 F \right]$: el momento de inercia sectorial tomando como polo el baricentro $G(G \equiv O)$ y el origen principal \bar{O}_S . Como se vé este valor está calculado a partir de otro origen sectorial O_{S_I} cualquiera, al que se le aplica la transformación de cambio de origen (del O_{S_I} al \bar{O}_S). El valor de este paréntesis, coincide con el módulo de alabeo C_S de una sección con simetría central y en general está tabulado.

$I_{\omega_{\xi}}^{(GO_{S_I})}, I_{\omega_{\eta}}^{(GO_{S_I})}$: momentos centrífugos sectoriales respecto de los ejes ξ y η , del polo $G \equiv O$ y de un origen O_{S_I} arbitrario. Hemos visto que los cambios de origen no afectan no afectan estos valores.

$\xi_{\bar{P}}, \eta_{\bar{P}}$: coordenadas cartesianas respecto de los ejes principales de inercia del polo principal \bar{P} .

I_{ξ}, I_{η} : momentos de inercia principales baricéntricos de la sección.

Los momentos centrífugos $I_{\omega_{\xi}}^{(GO_{S_I})}$ e $I_{\omega_{\eta}}^{(GO_{S_I})}$ pueden calcularse a partir de $I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_{S_I})}$ e $I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{S_I})}$ mediante las expresiones (46) y (47) de giro de los ejes baricéntricos \bar{x} e \bar{y} .

Teniendo en cuenta las Ec. (58) y (59) la Ec. (60) puede transformarse en:

$$\begin{aligned} I_{\omega}^{(\bar{P}\bar{O}_S)} = I_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_{\bar{O}}^2 F + \xi_{\bar{P}} \frac{I_{\omega_{\xi}}^{(GO_{S_I})}}{I_{\xi}} + \eta_{\bar{P}} \left[-\frac{I_{\omega_{\eta}}^{(GO_{S_I})}}{I_{\eta}} \right] I_{\eta} - \\ - 2 \xi_{\bar{P}} I_{\omega_{\xi}}^{(GO_{S_I})} + 2 \eta_{\bar{P}} I_{\omega_{\eta}}^{(GO_{S_I})} \end{aligned}$$

de donde:

$$(61) \quad I_{\omega}^{(\bar{P}\bar{O}_S)} = I_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_{\bar{O}}^2 F - \xi_{\bar{P}} I_{\omega_{\xi}}^{(GO_{S_I})} + \eta_{\bar{P}} I_{\omega_{\eta}}^{(GO_{S_I})} \quad \text{o bien:}$$

$$I_{\omega}^{(\bar{P}\bar{O}_S)} = I_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_{\bar{O}}^2 F + \xi_{\bar{P}}^2 I_{\xi} + \eta_{\bar{P}}^2 I_{\eta} - 2 \xi_{\bar{P}}^2 I_{\xi} - 2 \eta_{\bar{P}}^2 I_{\eta}$$

$$(62) \quad I_{\omega}^{(\bar{P}\bar{O}_S)} = I_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_{\bar{O}}^2 F - \xi_{\bar{P}}^2 I_{\xi} - \eta_{\bar{P}}^2 I_{\eta}$$

Por la condición establecida al pasar de la Ec. (55) a la (56) y teniendo en cuenta las Ec. (58) y (59) podemos afirmar que el baricentro \mathbf{G} de la sección, su origen principal $\bar{\mathbf{P}}$ y su polo principal $\bar{\mathbf{O}}_S$ están contenidos sobre una misma recta que es, como ya dijimos, el *eje sectorial principal*.

Las (61) y (62) están escritas también en el manual “*El acero en la construcción*”, Página 1087, Edit. Reverté-1972, con otros símbolos pero de idéntico significado:

$$(61.a) \quad C_M = C_{min} = C_S + R_x x_M - R_y y_M \quad \text{o bien}$$

$$(62.a) \quad C_M = C_{min} = C_S - x_M^2 J_x - y_M^2 J_y$$

El momento de inercia sectorial es llamado también, en la literatura técnica, *módulo de alabeo de la sección*. Según la nomenclatura alemana se lo indica con la sigla C_M y en los textos americanos se lo identifica con las letras C_W .