

## CAPITULO 4

### PROPIEDADES SECTORIALES DE SECCIONES SENCILLAS

#### 1.- PROPIEDADES DE SECCIONES SIMPLES

Analizaremos a continuación algunos casos particulares de secciones planas de barras de pared delgada, para las cuales, su peculiaridad proviene de la distribución en su plano de las ramas que la componen, esto es: sección de simetría simple, puntual, doble, ramas concurrentes a un punto, etc.

##### 1.1.- Secciones con simetría simple.

Ejemplos de este tipo son los perfiles *T*, doble *T* de alas desiguales, *U*, etc. ( Figura 1.4 ).

Sabemos que en estos casos, el baricentro de la sección se encuentra sobre su eje de simetría, el cual constituye uno de sus ejes principales de inercia; este eje, junto con otro perpendicular que pasa por *G*, constituyen los ejes principales de inercia baricéntricos, para los cuales es  $I_{xy} = 0$ .

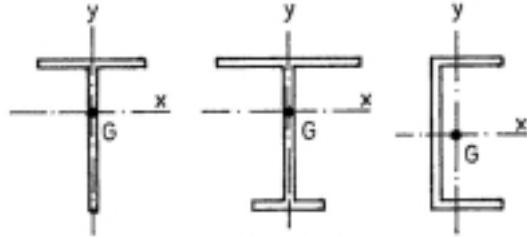


Figura 1.4

Nos proponemos calcular para cualquiera de esas secciones los momentos centrífugos sectoriales, con respecto a un origen arbitrario  $O_s$  y polo *P* coincidente con el baricentro *G* y que, como sabemos, son iguales a:

$$I_{\omega_x}^{(GO_s)} = \int_{O_s} \omega^{(GO_s)} y dF \quad I_{\omega_y}^{(GO_s)} = \int_{O_s} \omega^{(GO_s)} x dF$$

De acuerdo a las conclusiones obtenidas en la página 16, el momento centrífugo sectorial con respecto al baricentro tomado como polo, no modifica su valor al cambiar el origen de coordenada sectorial  $O_s$ .

Teniendo en cuenta esta condición tomaremos, para sencillez de nuestro análisis, un origen sectorial ubicado sobre el eje de simetría de la sección, por ejemplo el  $O_s$ : observamos que, según la Figura 2.4, a cada elemento de superficie *dF* ubicado a una abscisa *x* y ordenada *y* le corresponderá su simétrico de igual ordenada *y* y abscisa *-x*. Las coordenadas sectoriales de ambos puntos serán a su vez:  $\omega_{s_1}^{(GO_s)} = -\omega_{s_2}^{(GO_s)}$ , de manera tal que siempre a cada producto  $(\omega_{s_1} y dF)$ , le corresponderá otro igual y opuesto  $(\omega_{s_2} y dF)$ .

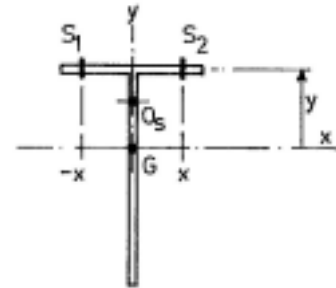


Figura 2.4

Si extendemos ahora la integral a toda la línea media del perfil resultará entonces que:

$$I_{\omega_x}^{(PO_s)} = \int_{O_s} \omega^{(GO_s)} y dF = 0$$

Si recordamos, por otra parte, las Ec. (42) y (43) las coordenadas del polo principal son:

$$y_{\bar{P}} = \frac{I_{\omega_y}^{(PO_s)}}{I_y} \quad x_{\bar{P}} = \frac{I_{\omega_x}^{(PO_s)}}{I_x} = 0$$

Resulta entonces que el polo principal  $\bar{P}$ , por ser  $x_{\bar{P}} = 0$ , está ubicado sobre el eje de simetría de la sección. El origen sectorial principal  $O_s$  estará alineado, como sabemos, con  $\bar{P}$  y con  $G$  sobre el *eje sectorial principal*, es decir,  $\bar{O}_s$  yace también sobre el eje de simetría y en este caso particular, esa condición es satisfecha por cualquier punto perteneciente a la rama vertical de la sección indicada.

De este sencillo análisis podemos extraer las siguientes conclusiones, válidas para secciones de simetría simple:

- El momento centrífugo sectorial respecto del baricentro  $G$  (tomado como polo) y al eje perpendicular al de simetría, es nulo.
- El polo principal  $\bar{P}$  está ubicado sobre el eje de simetría.
- El origen sectorial principal  $\bar{O}_s$  también se ubica sobre el eje de simetría y su posición puede elegirse arbitrariamente sobre un punto que pertenezca al mismo y a la sección.

## 1.2.- Doble simetría

Mediante un razonamiento similar al anterior y aplicado para ambos ejes principales de inercia obtendremos  $I_{\omega_x}^{(GO_s)} = I_{\omega_y}^{(GO_s)} = 0$  y por lo tanto resulta:  $x_{\bar{P}} = y_{\bar{P}} = 0$ , la que equivale a decir que, el polo principal  $\bar{P}$  coincide con el baricentro de la sección (Figura 3.4).

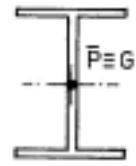


Figura 3.4

## 1.3.- Simetría puntual

Consideremos para nuestro análisis una sección transversal tipo **Z** (Figura 4.4) y ubiquemos sobre su baricentro (centro de simetría) y en forma coincidente, un polo  $P$  y el origen sectorial  $O_s$ . Con un razonamiento similar al de las secciones con simetría simple y con ayuda de la Figura 4.4 podemos observar que, para esta sección, también se cumple que el polo principal  $\bar{P}$  coincide con su baricentro.

Es decir, que para cada par de puntos  $S_1$  y  $S_2$  ubicados simétricamente respecto del baricentro siempre tendremos:

$$\text{para } S_1 \quad dI_{\omega_x}^{(PO_s)} = \omega_{S_1}^{(GO_s)} y dF \quad dI_{\omega_y}^{(PO_s)} = -\omega_{S_1}^{(GO_s)} x dF$$

y para  $S_2$  
$$dI_{\omega_x}^{(PO_s)} = -\omega_{S_1}^{(GO_s)} y dF \quad dI_{\omega_y}^{(PO_s)} = \omega_{S_1}^{(GO_s)} x dF$$

Si se integran ambas diferenciales sobre todo el contorno de la figura resultará evidentemente:

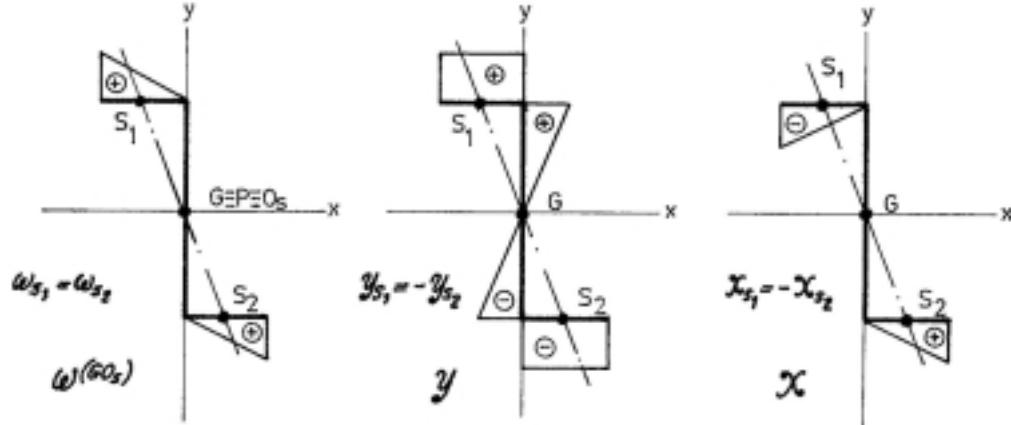


Figura 4.4

$$I_{\omega_x}^{(PO_s)} = 0$$

$$I_{\omega_y}^{(PO_s)} = 0$$

y de aquí resulta  $x_{\bar{P}} = y_{\bar{P}} = 0$ .

#### 1.4.- Ramas concurrentes a un punto

Secciones de este tipo son las que se ilustran en la Figura 5.4 .

Es decir, son secciones en las que las líneas medias (contornos) de las ramas que las constituyen, concurren a un punto único de intersección  $P$ .

En nuestros razonamientos anteriores hemos demostrado que las coordenadas del polo principal  $\bar{P}$  son las coordenadas de un punto que hace mínimo el momento de inercia sectorial de una sección respecto al mismo [ver Ec. (58), (59) y (60)].

Si recordamos además la definición de momento de inercia sectorial, expresada por:

$$I_{\omega}^{(PO_s)} = \int_F \omega^{(PO_s)^2} dF$$

y suponemos ubicado al polo en el punto  $P$  de intersección antes indicado, éste será el polo principal de la sección. Esto es sencillo de demostrar: si adoptamos este punto como polo, para cualquier origen sectorial  $O_s$ , se cumple que los diagramas de coordenadas sectoriales son nulos para todas

las ramas concurrentes, es decir,  $\omega^{(PO_s)} = 0$  para todos sus puntos, por lo tanto la integral

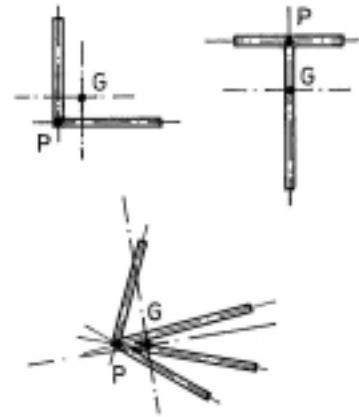


Figura 5.4

indicada más arriba, extendida a toda el área de la sección, será nula. Se satisface, de esta manera, la condición de que el momento de inercia sectorial sea el mínimo (igual a cero en este caso), por lo tanto, el punto elegido como polo es entonces, el polo principal de la sección.

Es decir, el polo principal  $\bar{P}$  de secciones compuestas de ramas concurrentes a un punto, es coincidente con dicho punto de intersección.

### 1.5.- Secciones compuestas

Para determinar el módulo de alabeo de una sección compuesta, debemos aplicar las expresiones relativas a los cambios de polo para la determinación de las propiedades sectoriales de una sección, tal como lo hemos analizado en el *Capítulo 3*.

En todo este procedimiento debe sustentarse una hipótesis fundamental, válida para las posteriores aplicaciones y es que las secciones que constituyen la sección compuesta, están contenidas en un mismo plano rígido que mantiene fijas sus distancias relativas.

Caso 1) Supongamos una sección compuesta, constituida por dos perfiles con simetría central (por ejemplo: 2 IPN).

Llamaremos  $a$  la separación entre ejes  $y_I$ - $y_I$  paralelos baricéntricos. Por simetría el polo principal  $\bar{P}$  de la sección compuesta estará ubicado sobre el eje  $y$ - $y$  libre del conjunto y alineado con los polos principales  $\bar{P}_I$  de los perfiles simples, que coinciden con sus respectivos baricentros  $G_I$ .

Se puede aplicar en este caso la expresión:

$$(56) \quad \begin{aligned} I_{\omega}^{(\bar{P}O_S)} = & I_{\omega}^{(GO_{S_I})} - C_{\bar{O}}^2 F + \bar{x}_{\bar{P}}^2 I_{\bar{x}} + \bar{y}_{\bar{P}}^2 I_{\bar{y}} - 2 \bar{x}_{\bar{P}} I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_{S_I})} + \\ & + 2 \bar{y}_{\bar{P}} I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{S_I})} - 2 \bar{x}_{\bar{P}} \bar{y}_{\bar{P}} I_{\bar{x}\bar{y}} \end{aligned}$$

Por las razones comentadas, es:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{\bar{P}} &= 0 \\ \bar{x}_{\bar{P}} &= \frac{a}{2} \\ I_{\bar{x}\bar{y}_I} &= 0 \\ I_{\omega_{x_I}}^{(GO_{S_I})} &= I_{\omega_{y_I}}^{(GO_{S_I})} = 0 \end{aligned}$$

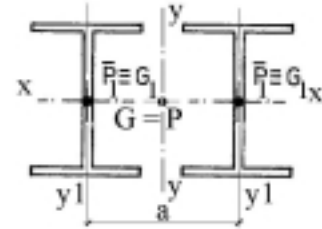


Figura 6.4

La (56) queda:

$$I_{\omega}^{(\bar{P}O_S)} = I_{\omega_I}^{(G_I O_{S_I})} - C_{\bar{O}}^2 F_I + \bar{x}_{\bar{P}}^2 I_{\bar{x}_I} \quad \text{para un solo perfil.}$$

y en la que:  $I_{\omega_I}^{(GO_{sI})} - C_{\bar{O}}^2 F_I = C_{M_I}$  es el módulo de alabeo de un perfil simple.

Para la sección compuesta resulta:

$$I_{\omega}^{(\bar{P}\bar{O}_s)} = 2 \left( C_{M_I} + \left( \frac{a}{2} \right)^2 I_{\bar{x}_I} \right)$$

Caso 2) Supongamos una sección compuesta, constituida por dos perfiles **L** dispuestos en **T** ( $\nabla$   $\Gamma$ ), con una distancia  $s$  de separación entre las caras externas de las alas verticales .

En el caso de perfiles **L**, tal como se ha visto en el punto 1.4, el polo principal  $\bar{P}_I$  de cada uno de ellos está ubicado en el vértice de las líneas medias de las alas. Por simetría, el Polo Principal  $\bar{P}$  de la sección compuesta estará ubicado sobre el eje **y-y** libre del conjunto, lo mismo que su Origen Principal  $\bar{O}_s$  . La posición de  $\bar{P}$  sobre el eje **y-y** la determinaremos aplicando las expresiones deducidas, en cambio,  $\bar{O}_s$  puede ser por definición, cualquier punto de la recta que une  $\bar{G}$  con  $\bar{O}_s$  .

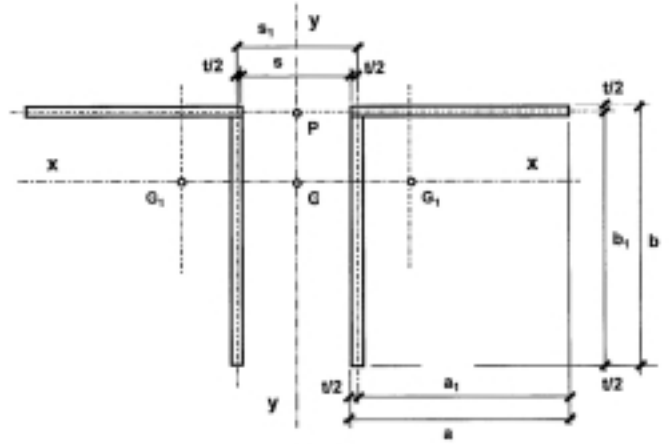
En primer lugar determinaremos el Momento Sectorial de Segundo Orden  $I_{\omega_y}$  para un polo  $P$  cualquiera, aplicado sobre el eje de simetría y alineado con

$\bar{G}$  y con  $\bar{O}_s$  . Elegimos en este caso, por sencillez, el punto de intersección del eje **y-y**

con la línea media de las alas superiores, de esta manera, además de poder aplicar la expresión (41), la cantidad de diagramas que debemos integrar, se reducen sensiblemente (las CS resultan nulas en las alas horizontales). Así, por integración, obtenemos:

$$I_{\omega_y}^{(P\bar{O}_s)} = -\frac{s_I^2}{4} \cdot b_I^2 \cdot t$$

En esta expresión,  $s_I$  es la distancia entre las líneas medias de las alas verticales (separación  $s_I = s - t$ , en la cual  $t$  es el espesor constante de las alas).  $a_I$  y  $b_I$  son las longitudes de cada una de las ramas del angular (lo que hemos llamado inicialmente *contorno* o línea media de la sección)



Calculamos ahora, el Momento de Inercia  $I_y$  respecto del eje de simetría, mediante la integración de los diagramas de coordenadas  $x$ :

$$I_y = \frac{I}{2} \cdot a_1 \cdot t \cdot s_1^2 + a_1^2 \cdot t \cdot s_1 + \frac{2}{3} \cdot a_1^3 \cdot t + \frac{I}{2} \cdot b_1 \cdot t \cdot s_1^2$$

Ahora aplicamos la (57) y despejando  $I_{\omega_y}^{(G\bar{O}_s)}$  calculamos su valor:

$$I_{\omega_y}^{(G\bar{O}_s)} = I_{\omega_y}^{(P\bar{O}_s)} - y_P \cdot I_y$$

Podemos así calcular la coordenada del Polo Principal  $\bar{P}$ , aplicando la (59):

$$y_o = -\frac{I_{\omega_y}^{(G\bar{O}_s)}}{I_y}$$

El Momento de Inercia Sectorial Principal  $I_{\omega}^{(\bar{P}\bar{O})}$ , está dado por la (60), para lo cual hemos determinado en los pasos anteriores, todos los términos que la integran:

$$I_{\omega}^{(\bar{P}\bar{O}_s)} = I_{\omega}^{(G\bar{O}_s)} + y_o^2 \cdot I_y + 2 \cdot y_o \cdot I_{\omega_y}^{(G\bar{O}_s)}$$

$$I_{\omega}^{(\bar{P}\bar{O}_s)} = C_M$$

Se debe recordar, que el valor de  $C_M$  puede calcularse integrando el diagrama de CS, trazado para el Polo Principal  $\bar{P}$  cuya coordenada  $y_o$  hemos determinado.

Siguiendo el mismo procedimiento, podemos determinar el Momento de Inercia Sectorial Principal, de una sección constituida por dos angulares enfrentados con las alas opuestas, como los de una columna armada con ángulos en las esquinas (Γ Γ).

Siempre es posible compactar un poco las expresiones que resultan de las integraciones y darles una forma más operativa o apropiada para la determinación de las características (ver OC página 670), por ejemplo:

$$I_y = \frac{I}{2} \cdot a_1 \cdot t \cdot s_1^2 + a_1^2 \cdot t \cdot s_1 + \frac{2}{3} \cdot a_1^3 \cdot t + \frac{I}{2} \cdot b_1 \cdot t \cdot s_1^2$$

$$I_y = 2 \cdot \left( I_{y1} + F_1 \cdot \left( \frac{a + s_1}{2} \right)^2 + F_2 \cdot \left( \frac{s_1}{2} \right)^2 \right)$$

En la que:  $F_1 = a_1 \cdot t$

$$F_2 = b_1 \cdot t$$

$$I_{y1} = \frac{t \cdot a_1^3}{12}$$

## 2.- PROCEDIMIENTO PARA LA DETERMINACION DEL MOMENTO DE INERCIA SECTORIAL DE UNA SECCION

Con el objeto de aplicar con sencillez y en forma simplificada las expresiones deducidas, es recomendable adoptar las siguientes etapas de trabajo:

- Determinar el baricentro de la sección y ubicar sobre el mismo un sistema de ejes ortogonales  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  orientado, en lo posible, en dirección paralela a las ramas rectas, si las hubiera, de la sección.
- Trazar los diagramas de las “funciones coordenadas”,  $\bar{y} = f(\bar{x})$  y  $\bar{x} = f(\bar{y})$ , de la línea media cada tramo o rama de la sección, respecto de los ejes adoptados.
- Calcular, respecto de los ejes  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  así dispuestos, los momentos:  $I_{\bar{x}}, I_{\bar{y}}$  e  $I_{\bar{x}\bar{y}}$ ; esto se logra fácilmente mediante la integración de los diagramas anteriores, indicados en b) incluyendo en la integración, los espesores correspondientes a cada rama de la sección (la integración se realiza mediante las mismas tablas de integración de diagramas que se utilizan en el Método de las Fuerzas para la determinación de efectos generalizados).
- Adoptar un origen sectorial arbitrario  $O_s$  (no necesariamente el principal) y trazar el diagrama de coordenadas  $\omega^{(GO_s)}$  correspondiente, es decir, con el baricentro  $G$  adoptado como polo.
- Calcular, a partir de ese diagrama de coordenadas sectoriales y de los diagramas:  $\bar{y} = f(\bar{x})$  y  $\bar{x} = f(\bar{y})$ , las características sectoriales:  $I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_s)}, I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_s)}$ .
- Con las características geométricas y sectoriales halladas calcular las coordenadas del polo principal  $\bar{x}_P$  e  $\bar{y}_P$  [mediante aplicación de las Ec. (42) y (43) ó (44) y (45)].
- Mediante las Ec. (56) ó (57) calculamos el momento de inercia sectorial principal  $I_{\omega}^{(\bar{P}O_s)}$ , haciendo en ambas  $P = \bar{P}$ .

$$I_{\omega}^{(\bar{P}O_s)} = I_{\omega}^{(GO_{sI})} - C_{\bar{O}}^2 F + \bar{x}_P^2 I_{\bar{x}} + \bar{y}_P^2 I_{\bar{y}} - 2 \bar{x}_P I_{\omega_{\bar{x}}}^{(GO_{sI})} + \\ + 2 \bar{y}_P I_{\omega_{\bar{y}}}^{(GO_{sI})} - 2 \bar{x}_P \bar{y}_P I_{\bar{x}\bar{y}} \quad (56-1)$$

$$I_{\omega}^{(\bar{P}O_s)} = I_{\omega}^{(GO_{sI})} - C_{\bar{O}}^2 F + \xi_P^2 I_{\xi} + \eta_P^2 I_{\eta} - 2 \xi_P I_{\omega_{\xi}}^{(GO_{sI})} + \\ + 2 \eta_P I_{\omega_{\eta}}^{(GO_{sI})} \quad (57-1)$$

h) -. Podemos hacer la verificación del valor de  $I_{\omega}^{(\overline{PO}_s)}$  hallado, mediante la integración del diagrama de coordenadas sectoriales  $\omega^{(\overline{PO}_s)}$  que tracemos para el polo  $\overline{P}$  y el origen principal aplicando la definición (para esto recordemos, como dato, que el origen principal  $\overline{O}_s$  estará alineado con  $\overline{P}$  y con  $\overline{G}$ , sobre el eje sectorial principal):

$$I_{\omega}^{(\overline{PO}_s)} = \int_F \omega^{(\overline{PO}_s)^2} dF$$

i) -. La solución simbólica de las integrales, como la indicada más arriba, permite establecer fórmulas relativamente sencillas para determinar, en algunos casos, el módulo de alabeo  $C_M$  de secciones típicas. (Ver O.C. página 670, Di 7.521). Se debe tener siempre presente, que el módulo de alabeo de una sección es igual al momento de inercia sectorial de la sección, calculado respecto a su polo principal.