

CAPITULO 5

ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS CON LAS COORDENADAS SECTORIALES

5.1) TEOREMA GENERALIZADO DE JOURAVSKI

Consideremos a continuación una barra de sección abierta y de pared delgada, sometida a una sollicitación de flexión simple. Imaginemos por simplicidad, que la sección está referida a su sistema de ejes principales baricéntricos x e y .



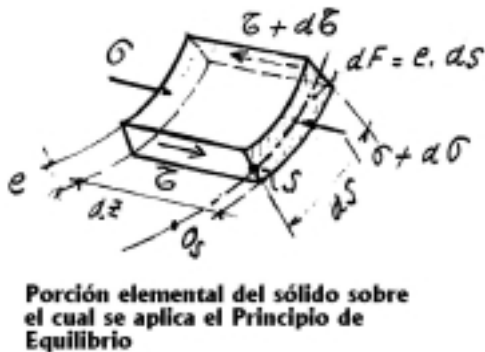
Nos proponemos a continuación, determinar la ley de distribución de tensiones tangenciales originadas por el esfuerzo de corte de la sección y establecer las ecuaciones de equivalencia correspondientes, para la verificación de sus valores máximos.

Según la Teoría de Flexión de las vigas, basadas en las hipótesis de Navier-Bernoulli y la ley de Hooke, la distribución de las tensiones normales en el plano de la sección originadas por los momentos flexores M_x y M_y , orientados según los ejes principales de la sección, está dada por:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x \quad (1)$$

En la que J_x y J_y son los momentos de inercia de la sección respecto de los ejes principales de la misma y x e y , son las distancias del punto de la sección que se analiza, respecto del sistema de referencia que se adoptó.

Si aplicamos el *Principio de Equilibrio* a una porción aislada de la barra, se puede establecer:



a) Ecuación de proyección en la dirección del eje z :

$$\sum Z = 0 \quad (2)$$

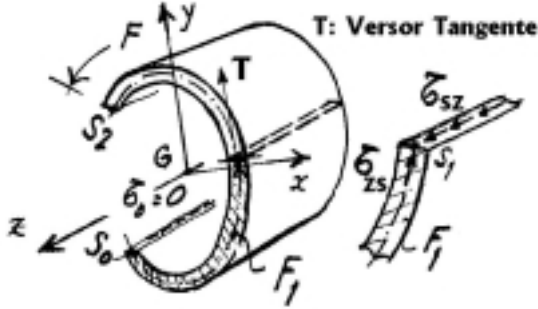
b) Escribimos la (2) en función de las fuerzas elementales que actúan sobre las caras de dos secciones separadas dz :

$$e \cdot dz \cdot d\tau + d\sigma \cdot dF = 0 \quad (3)$$

c) El producto que despejamos a continuación - $e \cdot d\tau$ - nos dará el valor por unidad de ancho o espesor e , de la tensión tangencial de dirección paralela a la tangente a la línea de contorno en el punto considerado:

$$e \cdot d\tau = -\frac{d\sigma}{dz} \cdot dF \quad (4)$$

Por otra parte, por el Teorema de Cauchy existirá en un plano longitudinal de la barra - cuya traza con el plano de la sección, es perpendicular a la tangente al contorno en ese punto - una tensión tangencial de igual intensidad que converge o se aleja de dicha traza según el sentido - convergente o divergente - de la tensión tangencial contenida en el plano de la sección.



Si derivamos la Ec. (1) respecto de z, obtenemos:

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{dM_x}{dz} \cdot \frac{y}{J_x} + \frac{dM_y}{dz} \cdot \frac{x}{J_y} \quad (5)$$

y por la relación que existe entre los esfuerzos característicos, podemos escribir:

$$\frac{d\sigma}{dz} = Q_y \cdot \frac{y}{J_x} + Q_x \cdot \frac{x}{J_y} \quad (6)$$

Reemplazamos esta expresión en la (4) e integramos:

$$e \cdot \tau = -\frac{Q_y}{J_x} \cdot \int_{F_I} y \cdot dF - \frac{Q_x}{J_y} \cdot \int_{F_I} x \cdot dF \quad (7)$$

de aquí obtenemos el valor medio de τ supuesto distribuido uniformemente en el ancho e del espesor de la viga:

$$\tau = -\frac{1}{e} \cdot \left(\frac{Q_y}{J_x} \cdot S_x^{F_I} + \frac{Q_x}{J_y} \cdot S_y^{F_I} \right) \quad (8)$$

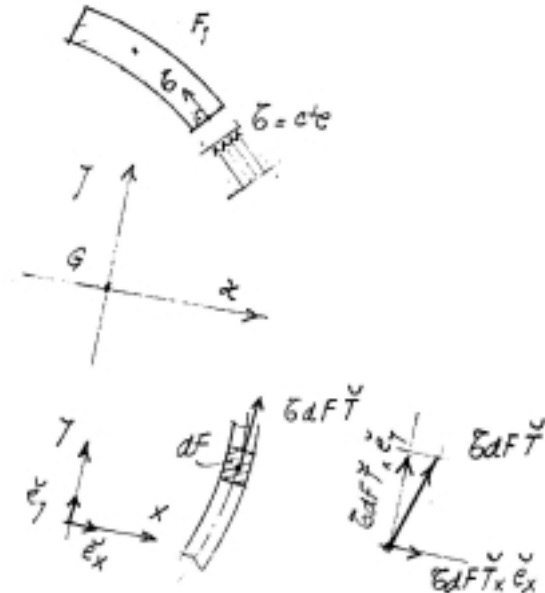
Esta expresión se conoce como **Teorema Generalizado de Jourawsky** y en ella $S_x^{F_I}$ y $S_y^{F_I}$ constituyen los momentos estáticos de la parte que suponemos que *resbala* (F_I), respecto de los ejes x e y baricéntricos, respectivamente.

La obtención de esta expresión presume que la distribución de tensiones tangenciales, como dijimos, es perpendicular a la traza del plano de resbalamiento con el plano de la sección y distribuida uniformemente en la longitud de esa traza de longitud e .

5.2) ECUACIONES DE EQUIVALENCIA PARA LAS TENSIONES TANGENCIALES - CENTRO DE CORTE O TORSIÓN

Primera y Segunda Condiciones de equivalencia.

Nos proponemos establecer a continuación, las condiciones de equivalencia entre la distribución de tensiones internas que fue obtenida, con los esfuerzos característicos Q_x y Q_y .



Para ello, proyectaremos las fuerzas elementales τdF (de dirección tangente al contorno de la sección) en la dirección de los ejes principales x e y , así podremos escribir las condiciones de equilibrio o equivalencia entre las tensiones tangenciales y los esfuerzos de corte:

Primera ecuación de equivalencia:

$$Q_{xe} = - \int_F (\tau \cdot dF) \cdot T \times e_x \quad (9)$$

Segunda ecuación de equivalencia:

$$Q_{ye} = - \int_F (\tau \cdot dF) \cdot T \times e_y \quad (10)$$

Resolveremos la Ec. (9) recordando que:

$$T = \frac{dx}{ds} \cdot i + \frac{dy}{ds} \cdot j$$

$$e_x = 1 \cdot i + 0 \cdot j$$

Reemplazando obtendremos:

$$Q_{xe} = - \int_F \frac{dx}{ds} \cdot \tau \cdot dF$$

$$Q_{xe} = - \int_F \frac{dx}{ds} \cdot \tau \cdot e \cdot ds$$

de aquí:

$$Q_{xe} = - \int_F e \cdot \tau \cdot dx$$

reemplazando el valor de τ dado por la (7), escribimos:

$$Q_{xe} = - \int_F e \cdot \frac{1}{e} \cdot \left[\frac{Q_y}{J_x} \cdot \int_{F_1} y \cdot dF + \frac{Q_x}{J_y} \cdot \int_{F_1} x \cdot dF \right] \cdot dx$$

sacando fuera de la integral los valores independientes:

$$Q_{xe} = - \frac{Q_y}{J_x} \int_F \int_{F_1} y \cdot dF \cdot dx + \frac{Q_x}{J_y} \int_F \int_{F_1} x \cdot dF \cdot dx \quad (11)$$

Integrando por partes:

$$u_1 = \int_F y \cdot dF = S_x^{(F)} \quad , \quad dv_1 = dx$$

$$du_1 = y \cdot dF \quad , \quad v_1 = x$$

Coordenadas Sectoriales – Capítulo 5

$$u_2 = \int_F x \cdot dF = S_y^{(F)} \quad , \quad dv_2 = dx$$

$$du_2 = x \cdot dF \quad , \quad v_2 = x$$

La Ec. (11) quedará:

$$Q_{xe} = -\frac{Q_y}{J_x} \left[S_x^F \cdot x - \int_F x \cdot y \cdot dF \right] - \frac{Q_x}{J_y} \left[S_y^F \cdot x - \int_F x \cdot x \cdot dF \right]$$

en esta expresión por ser x e y los ejes principales, resulta, para las integrales extendidas a toda la superficie F :

$$S_x^F = 0$$

$$S_y^F = 0$$

$$\int_F x \cdot y \cdot dF = 0$$

$$\int_F x^2 \cdot dF = J_x$$

Por lo tanto:

$$Q_{xe} = -\frac{Q_x}{J_x} \cdot (-J_x)$$

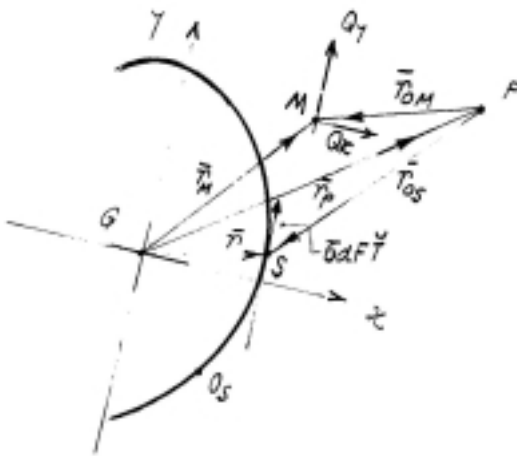
$$Q_{xe} = Q_x$$

Esta igualdad nos indica que la distribución de tensiones tangenciales satisface la condición de equivalencia con el esfuerzo característico Q_x .

Procediendo de la misma manera, obtendríamos la *segunda condición de equivalencia*:

$$Q_{ye} = Q_y$$

Tercera Condición de Equivalencia



Planteemos ahora la tercera condición de equivalencia, en la que establecemos que el momento de los esfuerzos característicos Q_x y Q_y respecto de un punto P cualquiera del plano de la sección, debe ser igual a la sumatoria de los momentos elementales de las fuerzas τdF respecto del mismo punto.

Tomemos momento de Q – esfuerzo característico de corte de la sección, de componentes Q_x y Q_y – respecto de un punto arbitrario P :

$$\bar{M}_Q^{(P)} = \bar{r}_{oM} \wedge \bar{Q} \times e_z$$

Coordenadas Sectoriales – Capítulo 5

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}}_{oM} &= \bar{\mathbf{r}}_M - \bar{\mathbf{r}}_P \\ \bar{\mathbf{r}}_{oM} &= (x_M - x_P) \cdot \mathbf{i} + (y_M - y_P) \cdot \mathbf{j} \\ \bar{\mathbf{Q}} &= Q_x \cdot \mathbf{i} + Q_y \cdot \mathbf{j}\end{aligned}$$

desarrollando el producto vectorial mixto para la terna derecha, se obtiene:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}_P &= \begin{vmatrix} x_M - x_P & y_M - y_P & 0 \\ Q_x & Q_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \bar{\mathbf{M}}_P &= (x_M - x_P) \cdot Q_y - (y_M - y_P) \cdot Q_x\end{aligned}\tag{12}$$

Este momento calculado $\bar{\mathbf{M}}_P$ deberá ser igualado al momento de las fuerzas elementales interiores debidas a $\boldsymbol{\tau}$, respecto del mismo punto P :

$$d\mathbf{M}_{\boldsymbol{\tau}}^{(P)} = \bar{\mathbf{r}}_{oS} \wedge \boldsymbol{\tau} \cdot dF \cdot \mathbf{T} \times \mathbf{e}_z$$

en la que:

$$\begin{aligned}dF &= e \cdot ds \\ \bar{\mathbf{r}}_{oS} &= \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_P \\ \bar{\mathbf{r}}_{oS} &= (x - x_P) \cdot \mathbf{i} + (y - y_P) \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{T} &= \frac{dx}{ds} \cdot \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \cdot \mathbf{j}\end{aligned}$$

integrando la ecuación diferencial resulta:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}_{\boldsymbol{\tau}}^{(P)} &= \int_F \begin{vmatrix} x_M - x_P & y_M - y_P & 0 \\ Q_x & Q_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e} \cdot ds \\ \bar{\mathbf{M}}_{\boldsymbol{\tau}}^{(P)} &= \int_F [(x - x_P) \cdot dy - (y - y_P) \cdot dx] \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}\end{aligned}\tag{13}$$

Recordemos que el término encerrado entre corchetes de la integral anterior representa:

$$d\omega^{(P)}$$

es decir, es la diferencial de la Coordenada Sectorial respecto del punto P tomado como polo, en el entorno del punto S .

Reemplazando en la Ec. (13) el valor de $\boldsymbol{\tau}$ dado por la Ec. (7) tendremos:

Coordenadas Sectoriales – Capítulo 5

$$M_{\tau}^{(P)} = - \int_F e \cdot \frac{I}{e} \cdot \left[\frac{Q_y}{J_x} \cdot \int_{F_I} y \cdot dF + \frac{Q_x}{J_y} \cdot \int_{F_I} x \cdot dF \right] \cdot d\omega$$

sacando fuera de la integral los valores independientes:

$$M_{\tau}^{(P)} = - \frac{Q_y}{J_x} \int_F \int_{F_I} y \cdot dF \cdot d\omega - \frac{Q_x}{J_y} \int_F \int_{F_I} x \cdot dF \cdot d\omega \quad (14)$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_F y \cdot dF = S_x^{(F)} \quad , \quad dv_1 = d\omega \\ du_1 &= y \cdot dF \quad , \quad v_1 = \omega^{(PO_s)} \\ u_2 &= \int_F x \cdot dF = S_y^{(F)} \quad , \quad dv_2 = d\omega \\ du_2 &= x \cdot dF \quad , \quad v_2 = \omega^{(PO_s)} \end{aligned}$$

La Ec. (14) quedará:

$$M_{\tau}^{(P)} = - \frac{Q_y}{J_x} \left[S_x^F \cdot \omega^{(PO_s)} - \int_F \omega^{(PO_s)} \cdot y \cdot dF \right] - \frac{Q_x}{J_y} \left[S_y^F \cdot \omega^{(PO_s)} - \int_F \omega^{(PO_s)} \cdot x \cdot dF \right]$$

en esta expresión por ser x e y los ejes principales, resulta, para las integrales extendidas a toda la superficie F :

$$\begin{aligned} S_x^F &= 0 \\ S_y^F &= 0 \end{aligned}$$

$$M_{\tau}^{(P)} = \frac{Q_y}{J_x} \cdot \int_F \omega^{(PO_s)} \cdot y \cdot dF + \frac{Q_x}{J_y} \cdot \int_F \omega^{(PO_s)} \cdot x \cdot dF \quad (15)$$

En esta expresión ambas integrales representan respectivamente los momentos centrífugos sectoriales respecto de los ejes x e y y del polo o centro de momentos P , es decir:

$$\begin{aligned} I_{\omega_x}^{(PO_s)} &= \int_F \omega^{(PO_s)} \cdot y \cdot dF \\ I_{\omega_y}^{(PO_s)} &= \int_F \omega^{(PO_s)} \cdot x \cdot dF \end{aligned}$$

Ambos momentos centrífugos pueden ser escritos, por comodidad, en función del baricentro G tomado como polo (Ver páginas 16 y 17 de “Coordenadas Sectoriales”):

$$\begin{aligned} I_{\omega_x}^{(PO_s)} &= I_{\omega_x}^{(GO_s)} - x_P \cdot J_x \\ I_{\omega_y}^{(PO_s)} &= I_{\omega_y}^{(GO_s)} + y_P \cdot J_y \end{aligned}$$

Reemplazando en la Ec. (15):

$$M_{\tau}^{(P)} = \frac{Q_y}{J_x} \cdot I_{\omega x}^{(GO_s)} + \frac{Q_x}{J_y} \cdot I_{\omega y}^{(GO_s)} - Q_y \cdot x_P + Q_x \cdot y_P \quad (16)$$

Igualando la Ec. (16) que representa el momento de las fuerzas interiores respecto a P con la Ec. (12) que representa el momento del esfuerzo característico Q respecto del mismo punto P :

$$\frac{Q_y}{J_x} \cdot I_{\omega x}^{(GO_s)} + \frac{Q_x}{J_y} \cdot I_{\omega y}^{(GO_s)} - Q_y \cdot x_P + Q_x \cdot y_P = (x_M - x_P) \cdot Q_y - (y_M - y_P) \cdot Q_x$$

simplificando se tendrá:

$$Q_y \cdot \frac{I_{\omega x}^{(GO_s)}}{J_x} + Q_x \cdot \frac{I_{\omega y}^{(GO_s)}}{J_y} = Q_y \cdot x_M - Q_x \cdot y_M \quad (17)$$

Si recordamos ahora el significado de los coeficientes de Q_x y Q_y ubicados en el primer miembro (Ver página 17 de “Coordenadas Sectoriales”):

$$\frac{I_{\omega x}^{(GO_s)}}{J_x} = x_{\bar{P}}$$

$$\frac{I_{\omega y}^{(GO_s)}}{J_y} = -y_{\bar{P}}$$

La Ec. (17) se puede interpretar diciendo que: la condición de equivalencia expresada en términos de momentos, sólo es satisfecha si:

$$x_M = x_{\bar{P}}$$

$$y_M = y_{\bar{P}}$$

Esto significa que la condición de equivalencia se satisface únicamente si la recta de acción del esfuerzo de corte contenido en el plano de la sección, pasa por el Polo Principal \bar{P} o lo que es equivalente, por el “Centro de Corte M ” o por el “Centro Natural de Torsión” (como se lo denomina en algunos textos alemanes) de la sección.

En lo sucesivo, para calcular el Momento Torsor actuante en una sección, debemos tomar momento de las fuerzas, ubicadas a la derecha o a la izquierda de la sección, respecto de su Centro de Corte o Polo Principal y no respecto de su baricentro – como erróneamente se suele hacer - a menos que ambos coincidan, lo cual ocurre únicamente en secciones con simetría central.