CÁLCULO I - REVISÃO

TÓPICO: VALOR ABSOLUTO

PROF: EDSON NEMER

Definição: O valor absoluto de a, denotado por $|a|$, é definido como:

① $|a| = a$, se $a \geq 0$

ex: ⓘ $a = 5 \Rightarrow |5| = 5$ ⓘⓘ $a = 32 \Rightarrow |32| = 32$

② $|a| = -a$, se $a < 0$

EX: ⓘ $a = -3 \Rightarrow |-3| = -(-3) = 3$ ⓘⓘ $a = -64 \Rightarrow |-64| = -(-64) = 64$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Geometricamente, o valor absoluto de a, também chamado módulo de a, representa a distância entre a e 0. Escreve-se então $|a| = \sqrt{a^2}$.

Propriedades:

(i) $|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a$, onde $a > 0$.

(ii) $|x| > a \Longleftrightarrow x > a$ ou $x < -a$, onde $a > 0$.

(iii) Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(iv) Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, então $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Exemplos de aplicação: Encontre os números reais que satisfaçam as seguintes desigualdades.

(a) $|5x-3| = 7$

Solução:

Esta equação é verdadeira quando $5x-3=7$ ou $5x-3=-7$

Logo, temos que:

(i) $5x-3=7 \therefore 5x=7+3 \therefore 5x=10 \therefore x=\frac{10}{5} \therefore x=2$

(ii) $5x-3=-7 \therefore 5x=-7+3 \therefore 5x=-4 \therefore x=-\frac{4}{5}$

Portanto, as duas soluções da equação dada são:

Resp: $x=2$ e $x=-4/5$.

(b) $|7x-1| = |2x+5|$

Solução: Esta equação será satisfeita se:

(i) $7x-1 = 2x+5 \therefore 7x-2x=5+1 \therefore 5x=6 \therefore x=6/5$

(ii) $7x-1=-(2x+5) \therefore 7x-1=-2x-5 \therefore 7x+2x=-5+1 \therefore 9x=-4 \therefore x=-4/9$

Resp: A solução final é $x=6/5$ e $x=-4/9$

(c) $|9x+7| = -7$

Solução: Esta equação não tem solução pois o valor absoluto de um número nunca pode ser negativo.

= " = " =

(d) $|7x-2| < 4$

Solução: Pela propriedade (i), temos:

$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$, onde $a > 0$.

Logo, temos que: $-4 < 7x-2 < 4 \overset{(+2)}{\Rightarrow} -4+2 < 7x-2+2 < 4+2 \therefore$

$-2 < 7x < 6 \overset{(\div 7)}{\Rightarrow} \frac{-2}{7} < \frac{7x}{7} < \frac{6}{7} \therefore -\frac{2}{7} < x < \frac{6}{7}$

Resp: $\{x \mid -2/7 < x < 6/7\}$ ou $]-2/7, 6/7[$ ou $x \notin [-2/7, 6/7]$

= " = " =

(e) $\left|\frac{7-2x}{4+x}\right| \leq 2$, $x \neq -4$

Solução: Pela propriedade (iv), temos: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ com $b \neq 0$.

Logo, temos que:

$\left|\frac{7-2x}{4+x}\right| \leq 2 \Rightarrow \frac{|7-2x|}{|4+x|} \leq 2 \therefore |7-2x| \leq 2|4+x|$

Elevando ambos os lados da desigualdade ao quadrado, temos:

$(7-2x)^2 \leq [2(4+x)]^2 \therefore (7-2x)^2 \leq 2^2(4+x)^2 \therefore 49-28x+4x^2 \leq 4(16+8x+x^2) \therefore$

$49-28x+4x^2 \leq 64+32x+4x^2 \therefore 4x^2-4x^2-28x-32x+49-64 \leq 0 \therefore$

$-60x-15 \leq 0 \therefore -60x \leq 15 \overset{(x-1)}{\Rightarrow} 60x \geq -15 \therefore x \geq -\frac{15}{60} \therefore x \geq -1/4$

Resp: $\{x \mid x \geq -1/4\}$ ou $[-1/4, +\infty[$ ou $x \notin]-\infty, -1/4[$.

= " = " =

f) $\left|\dfrac{3-2x}{2+x}\right| \leq 4 \quad , x \neq -2$

Solução: Pela propriedade (iv), temos:

$$\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| \leq 4 \Rightarrow \frac{|3-2x|}{|2+x|} \leq 4 \therefore |3-2x| \leq 4|2+x|$$

Elevando ambos os lados da desigualdade ao quadrado, temos:

$$(3-2x)^2 \leq [4(2+x)]^2 \therefore (3-2x)^2 \leq 4^2(2+x)^2 \therefore 9-12x+4x^2 \leq 16(4+4x+x^2) \therefore$$

$$9-12x+4x^2 \leq 64+64x+16x^2 \therefore 4x^2-16x^2-12x-64x+9-64 \leq 0 \therefore$$

$$-12x^2-76x-55 \leq 0 \xRightarrow{(x-1)} 12x^2+76x+55 \geq 0 \quad \text{(I)}$$

Para encontrar os valores de x que satisfaçam a desigualdade acima, precisamos calcular as raízes da equação $12x^2+76x+55=0$.

Logo, temos:

$$12x^2+76x+55=0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-76 \pm \sqrt{76^2-4(12)(55)}}{2(12)} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-76 \pm \sqrt{5776-2640}}{24} = \frac{-76 \pm \sqrt{3136}}{24} = \frac{-76 \pm 56}{24}$$

$$x_1 = \frac{-132}{24} \therefore \boxed{x_1 = -\frac{11}{2}}$$

$$x_2 = -\frac{20}{24} \therefore \boxed{x_2 = -\frac{5}{6}}$$

Logo, podemos escrever que:

$$12x^2+76x+55 = (x+5/6)(x+11/2) \quad \text{(II)}$$

E podemos substituir (II) em (I), obtendo:

$$12x^2+76x+55 \geq 0 \Rightarrow (x+5/6)(x+11/2) \geq 0$$

A desigualdade anterior será satisfeita quando ambos os fatores tiverem o mesmo sinal. Logo, temos que:

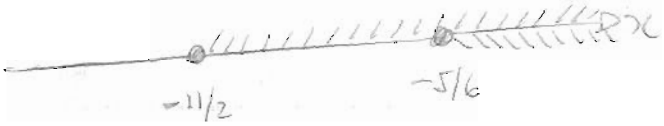
<u>caso 1</u>: $(x+5/6)\geq 0$ e $(x+11/2)\geq 0$

Logo: (i) $x+\frac{5}{6}\geq 0 \therefore x\geq -5/6$

(ii) $x+\frac{11}{2}\geq 0 \therefore x\geq -11/2$

E temos que a solução para o caso 1 é dada por:

$\{x \mid x\geq -\frac{5}{6}\} \cap \{x \mid x\geq -\frac{11}{2}\} = \{x \mid x\geq -\frac{5}{6}\}$ ou $[-\frac{5}{6}, +\infty[$



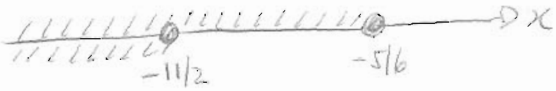
<u>caso 2</u>: $(x+5/6)\leq 0$ e $(x+11/2)\leq 0$

Logo: (i) $x+\frac{5}{6}\leq 0 \therefore x\leq -5/6$

(ii) $x+\frac{11}{2}\leq 0 \therefore x\leq -11/2$

E temos que a solução para o caso 2 é dada por:

$\{x \mid x\leq -\frac{5}{6}\} \cap \{x \mid x\leq -\frac{11}{2}\} = \{x \mid x\leq -\frac{11}{2}\}$ ou $]-\infty, -11/2]$



A resposta final será a união das soluções do caso 1 e do caso 2.

Logo, temos que:

Resp: $\{x \mid x\leq -\frac{11}{2}\} \cup \{x \mid x\geq -\frac{5}{6}\} = \{x \mid x\leq -\frac{11}{2}$ ou $x\geq -\frac{5}{6}\}$ ou $]-\infty, -\frac{11}{2}] \cup [-\frac{5}{6}, +\infty[$.

(g) $|6-5x| \geq 8$

Solução: Pela propriedade (ii), temos que:

$|x| > a \iff x > a$ ou $x < -a$, onde $a > 0$

Logo, temos que:

$|6-5x| \geq 8 \iff 6-5x \geq 8$ ou $6-5x \leq -8$

(i) $6-5x \geq 8 \therefore -5x \geq 8-6 \therefore -5x \geq 2 \overset{(\times -1)}{\Rightarrow} 5x \leq -2 \therefore x \leq -\frac{2}{5}$

(ii) $6-5x \leq -8 \therefore -5x \leq -8-6 \therefore -5x \leq -14 \overset{(\times -1)}{\Rightarrow} 5x \geq 14 \therefore x \geq 14/5$

A solução final será dada pela união das soluções acima:

Resp: $\{x \mid x \leq -2/5 \cup x \geq 14/5\}$ ou $]-\infty, -2/5] \cup [14/5, +\infty[$ ou

$x \notin]-2/5, 14/5[$