

CAPÍTULO 1-INTRODUÇÃO

Um **sistema dinâmico** é aquele cujo estado evolui ou muda com o tempo t . A evolução é governada por um conjunto de regras (não necessariamente equações) que especifica o estado do sistema para valores discretos ou para valores contínuos de t . Uma **evolução de tempo discreto** é usualmente descrita por um sistema de equações algébricas, enquanto a **evolução de tempo contínuo** é usualmente descrita por um sistema de equações diferenciais.

O comportamento assintótico de um sistema dinâmico com $t \rightarrow \infty$ é chamado **regime permanente** do sistema. Frequentemente, este regime permanente corresponde a um conjunto limitado, o qual pode ter uma solução estática ou uma solução dinâmica. O comportamento do sistema dinâmico anterior ao regime permanente é chamado de **regime transiente**, e a solução correspondente do sistema dinâmico é chamada de **solução transiente**.

A solução de um sistema pode ser constante ou variar com o tempo. **Ponto fixo**, **solução de equilíbrio** e **solução estacionária** são outros nomes para soluções constantes, enquanto **solução dinâmica** é outro nome para soluções variando com o tempo. Nas Seções 1 e 2, explicaremos a noção de um sistema dinâmico. Na Seção 3, discutiremos conjuntos atratores e nas Seções 4 e 5, examinaremos o conceito de estabilidade de atratores.

1.1 SISTEMAS DE TEMPO-DISCRETO

Uma evolução de tempo discreto é governada por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \quad (1.1)$$

onde \mathbf{x} é um vetor de dimensão finita. Os x_k e x_{k+1} representam os estados do sistema nos instantes de tempo discreto t_k e t_{k+1} , x_k e x_{k+1} respectivamente. Seja n a dimensão finita do vetor que representa o estado. Então, necessitamos de n números reais para especificar o estado do sistema. Formalmente, o vetor de estado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e o tempo $t \in \mathbb{R}$, onde o símbolo \mathbb{R}^n refere-se a um **espaço Euclidiano** n -dimensional, o qual é o espaço nos reais equipado com a **norma Euclidiana**

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \quad (1.2)$$

onde os x_i são componentes escalares de \mathbf{x} . Se os valores discretos do tempo correspondem a inteiros ao invés de números reais, dizemos que $t \in \mathbb{Z}$, onde \mathbb{Z} é o conjunto de números inteiros. Percebemos que a evolução de um sistema dinâmico pode, também ser estudada em outros espaços, tais como: cilíndrico, toroidal e espaços esféricos. Nestes casos uma ou mais variáveis são coordenadas angulares. Todavia, de acordo com os conceitos de topologia, localmente esses espaços tem a estrutura de um espaço Euclidiano.

A equação (1.1) é uma **transformação** ou uma **aplicação** que transforma o estado atual do sistema para outro estado subsequente. Na literatura, as palavras **mapa aplicação função** e **função de iteração** são frequentemente usadas com o mesmo sentido. Neste texto, até certo ponto, as palavras **conjunto** e **espaço** serão usadas com o mesmo sentido.

Formalmente uma aplicação \mathbf{F} de pontos de uma região M para pontos de outra região N é representada por $\mathbf{F}:M \rightarrow N$. Destacamos que M e N estão contidos em \mathbb{R}^n , isto é, $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^n$, onde o símbolo \subset é denominado **operador subconjunto** e significa **inclusão**.

A aplicação \mathbf{F} é dita uma aplicação sobrejetiva de M em N se para todo $\mathbf{y} \in N$ existe no mínimo um ponto $\mathbf{x} \in M$ que é levado a \mathbf{y} por \mathbf{F} . Além disso, \mathbf{F} é dita ser injetiva (ou biunívoca) se não existem dois pontos em M com a mesma aplicação em N . Uma aplicação que é injetiva e sobrejetiva é **inversível**, isto é, onde dado \mathbf{x}_{k+1} , podemos resolver (1.1) para determinar unicamente \mathbf{x}_k . Denotando a inversa de \mathbf{F} em (1.1) por \mathbf{F}^{-1} , temos

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_{k+1})$$

A aplicação \mathbf{F}^{-1} é também sobrejetiva e injetiva. Uma aplicação \mathbf{F} que não é inversível é chamada uma aplicação não-inversível.

Quando cada componente escalar de \mathbf{F} é r vezes continuamente diferenciável com relação as componentes escalares de \mathbf{x} , diz-se que \mathbf{F} é uma função C^r . Quando cada componente escalar de \mathbf{F} é contínua com relação as componentes escalares de \mathbf{x} , diz-se que \mathbf{F} é uma função C^0 . Para $r \geq 1$, a aplicação \mathbf{F} é chamada é uma **aplicação diferenciável**. A aplicação \mathbf{F} é chamada de **homeomorfismo** se ela é inversível e ambos \mathbf{F} e \mathbf{F}^{-1} são contínuas, ou seja, \mathbf{F} é C^0 . Se ambos \mathbf{F} e \mathbf{F}^{-1} são funções C^r onde $r \geq 1$, então chamaremos a aplicação C^r de **difeomorfismo**.

Uma **órbita** de uma **aplicação inversível** iniciada em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ é constituída de pontos discretos

$$\{\dots, \mathbf{F}^{-m}(\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{F}^{-2}(\mathbf{x}_0), \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0, \mathbf{F}(\mathbf{x}_0), \mathbf{F}^2(\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{F}^m(\mathbf{x}_0), \dots\}$$

onde $m \in \mathbb{Z}^+$ e \mathbb{Z}^+ é o conjunto de todos os inteiros positivos. Quando $k > 0$, \mathbf{F}^k significa a k -ésima aplicação sucessiva da aplicação \mathbf{F} . Similarmente quando $k < 0$, \mathbf{F}^k significa a k -ésima aplicação sucessiva da aplicação \mathbf{F}^{-1} . Uma órbita de uma **aplicação não-inversível** iniciada em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ é constituída de pontos discretos

$$\{\mathbf{x}_0, \mathbf{F}(\mathbf{x}_0), \mathbf{F}^2(\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{F}^m(\mathbf{x}_0), \dots\}$$

Aplicações sucessivas de \mathbf{F} são também chamadas de iterações positivas da aplicação correspondente.

Com referência a (1.1), percebemos que \mathbf{F} também é chamado um **operador de evolução**. Às vezes, quando desejamos estudar a evolução, mudamos ou controlamos um certo conjunto de parâmetros \mathbf{M} . Para indicar isto explicitamente, escrevemos a aplicação como

$$\mathbf{x}_{k+l} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k; \mathbf{M}) \tag{1.3}$$

onde \mathbf{M} é o vetor de parâmetros de controle.

Exemplo 1.1. Vamos considerar a aplicação uni-dimensional.

$$x_{k+1} = 4\alpha x_k(1-x_k) \quad (1.4)$$

onde $0 \leq x_k \leq 1$ e $0 < \alpha \leq 1$. Para $\alpha = 0.50$, a órbita da aplicação iniciada em $x_0 = 0.25$ é

$$\{0.25, 0.375, 0.46875, \dots\}$$

A equação (1.4) é a famosa **aplicação logística**, a qual tem sido tema de muitos estudos. Esta aplicação é uma aplicação não-inversível porque ela não é injetiva. Na verdade, esta aplicação é uma aplicação bijetiva porque ela aplica os dois pontos x e $(1-x)$ no mesmo ponto $4\alpha x(1-x)$. Além disso, (1.4) é um exemplo de aplicação diferenciável.

Exemplo 1.2. Consideremos a **aplicação de Hénon** (Hénon,1976).

$$x_{k+1} = 1 + y_k - \alpha x_k^2 \quad (1.5)$$

$$y_{k+1} = \beta x_k \quad (1.6)$$

onde α e β são parâmetros escalares. Quando $\beta = 0$, (1.5) e (1.6) reduz-se a uma aplicação unidimensional

$$x_{k+1} = 1 - \alpha x_k^2$$

a qual é não inversível. Ela é chamada de aplicação quadrática. Todavia, quando $\beta \neq 0$, a aplicação (1.5) e (1.6) é inversível. A inversa é

$$x_k = \frac{1}{\beta} y_k + 1$$

$$y_k = x_{k+1} - 1 + \frac{\alpha}{\beta^2} y_{k+1}^2$$

Observamos que $\{x_k \ y_k\}^T$ determina unicamente $\{x_{k+1} \ y_{k+1}\}^T$ e vice-versa. Além disso, porque ambos \mathbf{F} e \mathbf{F}^{-1} são diferenciáveis, a aplicação de Hénon é um difeomorfismo quando $\beta \neq 0$. Para $\alpha = 0.2$ e $\beta = 0.3$ a órbita da aplicação iniciada em

$$\begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

é

$$\left\{ \dots, \begin{Bmatrix} -3.33 \\ 1.22 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0.0 \\ -1.0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.3 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1.17 \\ 0.24 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0.97 \\ 0.35 \end{Bmatrix}, \dots \right\}$$

Na figura 1.1 mostramos alguns dos pontos discretos que constituem a órbita de (x_0, y_0) .

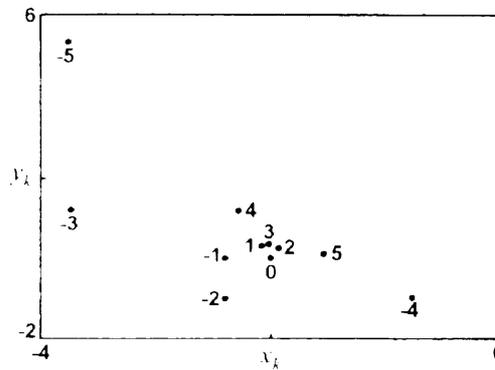


Figura 1.1: Alguns pontos discretos que compõem a órbita iniciada em (1,0) da Aplicação de Hénon com $\alpha = 0.2$ e $\beta = 0.3$. O índice k associado a cada ponto também é mostrado.

A dinâmica de muitas aplicações apresentam propriedades semelhantes à dinâmica da aplicação logística e de Hénon.

2 SISTEMA DE TEMPO CONTÍNUO

Para sistemas de tempo contínuo, a evolução é governada por um sistema de equações diferenciais. Esse sistema pode ser autônomo, ou não autônomo

2.1 Sistemas Não-Autônomos.

No caso de sistemas não-autônomos, as equações são da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \tag{2.1}$$

onde \mathbf{x} é de dimensão finita, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, e \mathbf{F} é explicitamente dependente de t . O vetor \mathbf{F} é frequentemente chamado de **campo vetorial**, o vetor \mathbf{x} é chamado de **vetor configuração** porquê descreve a posição do sistema, e o espaço \mathbb{R}^n no qual \mathbf{x} evolui é chamado de espaço configuração. Um espaço configuração é chamado de **espaço fase** quando uma metade dos estados são deslocamentos e a outra metade são velocidades. O espaço $(n + 1)$ -dimensional $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$, onde a dimensão adicional correspondente a t , é frequentemente referido como um **espaço configuração estendido**. Em (2.1), se \mathbf{F} é uma função não linear de \mathbf{x} , então \mathbf{F} é chamado de **campo vetorial não linear**.

Seja a configuração inicial do sistema \mathbf{x}_0 no instante t_0 , e seja I representando um intervalo de tempo que inclui t_0 . Então pode-se pensar de uma solução de (2.1) como uma aplicação dos diferentes pontos de I em diferentes pontos no espaço configuração n -dimensional \mathbb{R}^n . Um gráfico da solução de (2.1) no espaço configuração estendido é conhecido como uma **curva integral**. Sobre uma curva integral, o vetor função \mathbf{F} especifica o vetor tangente (vetor velocidade) em todo ponto (\mathbf{x}, t) . Uma interpretação geométrica de um **campo vetorial** é um conjunto de vetores tangentes nas diferentes curvas integrais.

Em geral, uma projeção da solução $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ de (2.1) sobre o espaço configuração n -dimensional é chamada de **trajetória** ou **órbita** do sistema através dos pontos $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Em outras palavras, a solução poderá ser pensada como um ponto que se move ao longo da trajetória, ocupando diferentes posições nos diferentes instantes, como a trajetória de um

planeta que se move através do espaço. Usaremos o símbolo $\gamma(\mathbf{x}_0)$ ou G para denotar uma órbita. A órbita obtida para tempos $t \geq 0$ passando através do ponto \mathbf{x}_0 em $t = 0$ é chamada uma **órbita positiva** e é denotada por $\gamma^+(\mathbf{x}_0)$; a órbita obtida para tempos $t \leq 0$ é chamada uma **órbita negativa** e é denotada por $\gamma^-(\mathbf{x}_0)$.

Também, $G = \gamma^+(\mathbf{x}_0) \cup \gamma^-(\mathbf{x}_0)$, onde o símbolo \cup simboliza operador.

Exemplo 1.3 Para ilustração, consideremos o seguinte oscilador linear periodicamente forçado:

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = F \cos(\Omega t)$$

Sendo $x = x_1$ e $\dot{x} = x_2$, expressemos esta equação de segunda ordem como um sistema de duas equações de primeira ordem em termos das variáveis de configuração x_1 e x_2 . O resultado é

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2.2}$$

$$\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - 2\mu x_2 + F \cos(\Omega t) \tag{2.3}$$

Para $\omega^2 = 8$, $\mu = 2$, $F = 10$, e $\Omega = 2$ a solução de (1.2.2) e (1.2.3) é

$$x_1 = e^{-2t} [a \cos(2t) + b \sin(2t)] + 0.5 \cos(2t) + \sin(2t)$$

$$x_2 = -2e^{-2t} [(a-b) \cos(2t) + (a+b) \sin(2t)] - \sin(2t) + 2\cos(2t)$$

onde as constantes a e b são determinadas pela condição inicial (x_{10}, x_{20}) . Percebemos que quando $t \rightarrow \infty$, o termo exponencial declina-se para zero. Portanto, o regime permanente não depende da condição inicial.

Na figura 2.1a, mostramos a curva integral iniciada em $(x_{10}, x_{20}, t_0) = (1, 0, 0)$ no espaço (x_1, x_2, t) para $0 \leq t \leq 10$. As setas na curva indicam a direção da evolução para tempos positivos. O vetor tangente também é mostrado em duas diferentes posições na curva integral. Deve-se notar que as intersecções aparentes na Figura 2.1a são consequências do ângulo de projeção que foi escolhido. Na Figura 2.1b mostramos uma projeção da curva integral sobre o espaço bi-dimensional (x_1, x_2) . Esta projeção é uma órbita positiva de $(x_{10}, x_{20}) = (1, 0)$.

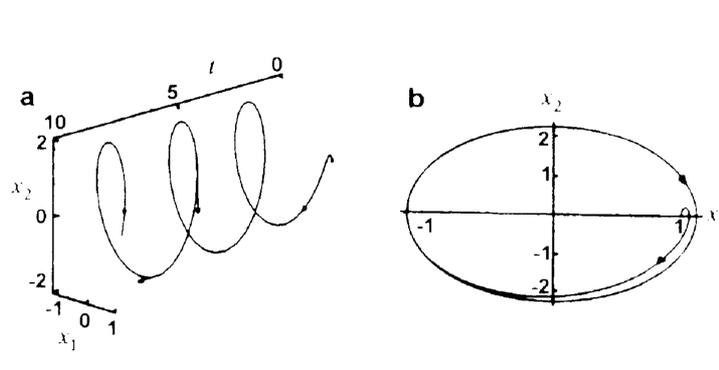


Figura 2.1: Solução de (1.2) e (2.3) iniciada de (1.0) em t para $\omega^2 = 8$, $\mu = 2$, $F = 10$ e $\Omega = 2$: (a) curva integral e (b) órbita positiva.

Lembrando que além do espaços configuração Euclidianos existem outros espaços, tais como: espaços cilíndricos, toróidais e esféricos. Na figura 2.2a, mostramos um **espaço cilíndrico**. Um movimento desenvolvido neste espaço é descrito por duas coordenadas cartesianas e uma coordenada angular θ . Uma das coordenadas cartesianas é definida ao longo dos eixos do cilindro, enquanto a outra é definida ao longo do raio de sua secção transversal. Este espaço cilíndrico é representado por $\mathbb{R}^2 \times S^1$. A variável θ que pertence ao espaço S é tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi$; formalmente, $\theta \in [(0, \pi)]$. Um **espaço toróidal** é mostrado na Figura 1.2b. Especificamente, chamamos este objeto de **dois-torus**, e um sistema dinâmico envolvido neste espaço é descrito por duas coordenadas angulares θ_1 e θ_2 . Representamos este espaço por $S^1 \times S^1$. Necessitar-se ia de n coordenadas angulares para descrever o movimento desenvolvido em n -torus. Um **espaço esférico** é mostrado na Figura 2.2c. Necessitamos de duas coordenadas angulares para descrever o movimento envolvido na superfície esférica.

Localmente uma superfície cilíndrica, toróidal ou esférica (Figura 2.2) tem a aparência de uma superfície plana e pode ser tratada como um espaço Euclidiano bi-dimensional. Superfícies lisas e contínuas, tais como aquelas mostradas na Figura 2.2, são chamadas **variedades**. Variedades podem ser pensadas como superfícies generalizadas.

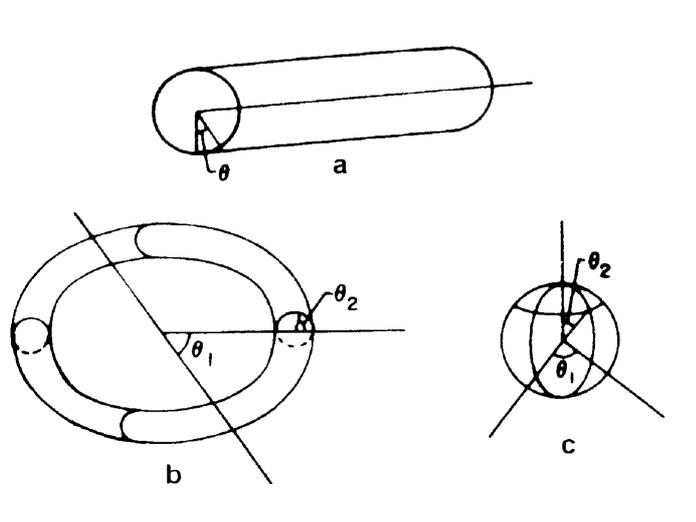


Figura 2.2: Solução de (2.2) e (2.3) iniciado em (1,0) quando $t=0$ para $\omega^2 = 8$, $\mu = 2$, $F = 10$, e $\Omega = 2$: (a) curva integral e (b) órbita positiva.

Em um espaço bi-dimensional, um objeto suave, tal como um círculo, é exemplo de uma variedade. Localmente, o círculo pode ser aproximado por uma linha tangente. Similarmente, regiões locais de superfícies toróidal e esférica podem ser aproximadas por planos tangentes. Uma superfície plana também é uma variedade.

A equação (2.1), também é referida como uma **equação de evolução**. Seja a evolução de um sistema descrito por esta equação e controlado por um conjunto de parâmetros \mathbf{M} . Para explicitar esta dependência de parâmetros, descrevemos a evolução por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t; \mathbf{M}) \tag{2.4}$$

onde \mathbf{M} é o vetor dos parâmetros de controle. Formalmente, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^m$, e o vetor função \mathbf{F} pode ser representado como $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

A seguir, revivaremos alguns fatos da teoria de equações diferenciais ordinárias. Se os componentes escalares de \mathbf{F} são C^0 (i.e., contínuos) em um domínio D do espaço (\mathbf{x}, t) , então a solução $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ satisfazendo a condição $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ em $t = t_0$ existe em um pequeno intervalo de tempo em torno de t_0 em D . Além disso, se os componentes escalares de \mathbf{F} são C^1 em D , então a solução $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ é única em um pequeno intervalo de tempo em torno de t_0 . A unicidade de soluções também é assegurada em certos casos onde \mathbf{F} é C^0 . Se a existência e unicidade de soluções de um sistema da forma (2.4) são garantidas, então o sistema é **determinístico**. Isto significa que duas curvas integrais iniciadas de duas diferentes condições iniciais não se interceptam no espaço de configuração estendido. Todavia as correspondentes órbitas podem se interceptar no correspondente espaço de configuração.

Se os componentes escalares de \mathbf{F} são funções C^r de t e os componentes de \mathbf{x} e \mathbf{M} , então a solução de (2.4) satisfazendo a condição inicial $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ e $t = t_0$ também é uma função C^r de t, t_0, \mathbf{x}_0 e \mathbf{M} em um pequeno intervalo em torno de t_0 . Além disso, se a solução de (2.4) originando uma certa condição inicial existe para todo tempo, então essa solução pode ser estendida indefinidamente. Se a solução existe e é definida somente sobre um intervalo de tempo finito, então esta solução iniciando de uma posição neste intervalo pode ser expandida para a fronteira deste intervalo.

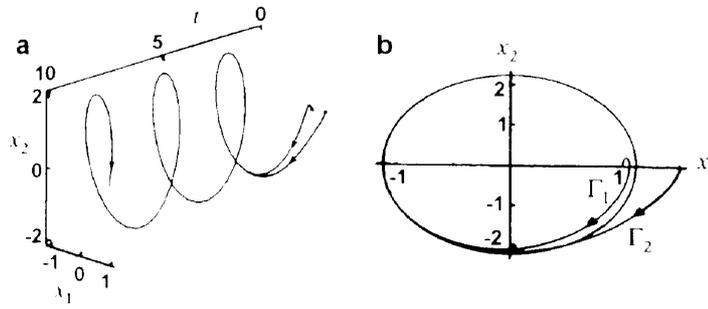
Exemplo 1.4. Este sistema é um exemplo de um sistema dinâmico determinístico. Os valores dos parâmetros usados para gerar a Figura (2.3) são os mesmos usados para gerar a Figura (2.1). Na figura 2.3 mostramos graficamente as soluções de (2.2) e (2.3) iniciadas em $t = 0$ de (1.0,0.0) e (1.5,0.0). Da figura 1.2.3a, percebemos que as curvas integrais correspondentes não se interceptam em parte nenhuma do espaço (x_1, x_2, t) . Como na figura 2.1, as intersecções aparentes na Figura 2.3a são uma consequência da escolha do ângulo de projeção. Da discussão anterior do exemplo 1.3, está claro que como $t \rightarrow \infty$, ambas curvas integrais convergem para o regime permanente.

$$x_1 = 0.5 \cos(2t) + \sin(2t)$$

$$x_2 = -\sin(2t) + 2 \cos(2t)$$

Embora as duas curvas integrais coincidem somente em $t = \infty$, nas escalas da figura 2.3a, elas não são distinguíveis após $t = 2.5$ unidades. Na figura 2.3b, as órbitas positivas iniciadas de (1.0,0.0) e (1.5,0.0) são mostradas. Observamos a presença de uma intersecção transversal fechada em (0.7,-2.0) na Figura 2.3b

Figura 2.3: Soluções de (2.2) e (2.3) iniciados em (1.0, 0.0) e (1.5,0.0) em $t = 0$ para $\omega^2 = 8$, $\mu = 2$, $F = 10$, e $\Omega = 2$: (a) curvas integrais e (b) órbitas positivas. Γ_1 e Γ_2 são órbitas positivas de (1.0,0.0) e (1.5,0.0), respectivamente.



2.2-Sistemas Autônomos.

No caso de um sistema autônomo, as equações são da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{M}) \quad (2.5)$$

onde \mathbf{x} , \mathbf{F} e \mathbf{M} são definidos como antes. Aqui \mathbf{F} não depende explicitamente da variável independente t e pode ser representado pela aplicação $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Por isso, o sistema (2.5) é **invariante no tempo, independente do tempo** ou **estacionário**. Isto significa que se $\mathbf{X}(t)$ é uma solução de (2.5), então $\mathbf{X}(t + \tau)$ também é uma solução de (2.5) para qualquer τ arbitrário. Se os componentes escalares de \mathbf{F} possuem a primeira derivada parcial contínua e limitada com respeito aos componentes escalares de \mathbf{x} , então o sistema (2.5) tem solução única para uma dada condição inicial \mathbf{x}_0 . Como consequência, duas trajetórias ou órbitas de um sistema autônomo não podem se interceptar no espaço configuração de um sistema n -dimensional. Além disso, se o vetor campo \mathbf{F} é uma função C^r de \mathbf{x} e \mathbf{M} , então a solução de (2.5) é também uma função C^r de t, \mathbf{x} e \mathbf{M} (Arnold, 1973).

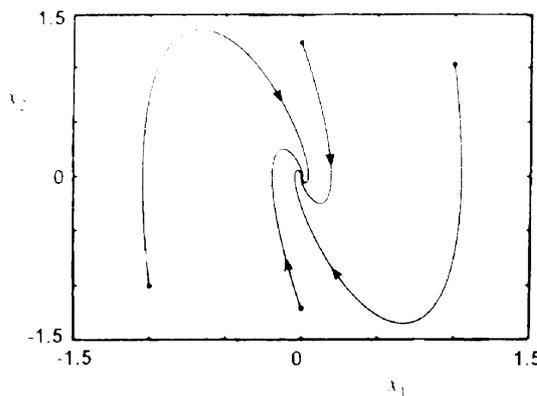


Figura 2.4: Órbitas positivas de (2.6) e (2.7) iniciadas em $t = 0$ de $(1.0, 1.0)$, $(0.0, -1.2)$, $(-1.0, -1.0)$, e $(0.0, 1.2)$ para $\omega^2 = 8$ e $\mu = 2$ todas as quatro órbitas aproximam-se da origem quando $t \rightarrow \infty$.

Exemplo. 5. Consideremos o seguinte sistema autônomo.

$$\dot{x} = x_2 \quad (2.6)$$

$$\dot{x} = -\omega^2 x_1 - 2\mu x_2 \quad (2.7)$$

Na Figura 2.4, mostramos órbitas positivas de (2.6) e (2.7) iniciadas de quatro diferentes condições iniciais, quando $\omega = 8$ e $\mu = 2$. Estas órbitas não se interceptam em lugar algum do plano quando se aproximam da origem, onde todas elas se encontram. A direção destas órbitas no espaço (x_1, x_2) é dada por

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-(\omega^2 x_1 + 2\mu x_2)}{x_2}$$

a qual é definida em todo lugar exceto na origem. Além disso, chamamos (0,0) ponto singular de (2.6) e (2.7).

Sistemas não-autônomos com coeficientes periódicos no tempo podem se transformar em sistemas autônomos de dimensão mais alta. Como exemplo, vamos considerar

$$\ddot{v}_1 + \omega^2 v_1 = f_1(v_1, \dot{v}_1, v_2, \dot{v}_2) + g_1 \cos(\Omega t) \quad (2.8)$$

$$\ddot{v}_2 + \omega_2^2 v_2 = f_2(v_1, \dot{v}_1, v_2, \dot{v}_2) \quad (2.9)$$

Usando as quatro variáveis $v_1, \dot{v}_1, v_2, \dot{v}_2$, podemos reescrever (2.8) e (2.9) como um sistema de quatro equações de primeira ordem. Este sistema de quarta ordem é não-autônomo devido à presença do termo periódico no tempo. Agora, consideremos uma variável adicional θ qual é definida como, $\theta = \Omega t \pmod{2\pi} \Leftrightarrow (A \pmod{B})$ é o resto da divisão de A por B depois que A é dividido por B; por exemplo, $7 \pmod{3}$ é igual a 1). Introduzindo esta variável em um sistema não-autônomo de quarta ordem e complementando este sistema com a equação $\dot{\theta} = \Omega$, nos obtemos um sistema autônomo de quinta ordem.

Formalmente, $\theta \in S^1$, e o espaço para o qual as cinco variáveis $v_1, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2$ e θ pertencem é escrito como $\mathbb{R}^4 \times S^1$. Este espaço é um espaço cilíndrico.

As equações (2.8) e (2.9) podem, também, serem transformadas em um sistema autônomo penta-dimensional considerando as cinco variáveis de configuração $v_1, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2, e v_3$, onde $v_3 = t$ e $\dot{v}_3 = 1$. Neste caso, as cinco variáveis de configuração pertencem a um espaço Euclidiano penta-dimensional designado por \mathbb{R}^5 .

2.3-Retratos de Fase e Fluxos.

Frequentemente, examinamos a evolução de um conjunto de trajetórias emanando de várias condições iniciais no espaço configuração. Como $t \rightarrow \infty$, as evoluções podem aproximar-se de diferentes soluções (assintóticas) do dado sistema de equações não linear. Um **retrato de fase** é uma solução de trajetórias que representam as soluções destas equações no espaço fase. A Figura (2.4) é um exemplo de retrato de fase de (2.6) e (2.7). Em geral, um retrato de fase, contém informações sobre o comportamento transitório e assintótico das soluções de um sistema. Um desenho análogo para linhas de fluxo na mecânica dos fluidos (i. é .linhas que marcam o movimento de diferentes partículas em um fluxo de um fluido), as órbitas iniciando de diferentes condições iniciais são indicadas para descrever o **fluxo** sobre

um dado sistema de equações.

Exemplo 1.6 Para ilustrar o significado de fluxo de um dado sistema de equações, consideremos (2.6) e (2.7) onde $\omega^2 = 8$ e $\mu = 2$. Na figura 2.5, mostramos órbitas positivas de (2.6) e (2.7) iniciadas em $t = 0.0$ de $(-1.00, 1.00)$, $(-1.25, 1.25)$ e $(-1.00, 1.25)$. Estes quatro pontos estão marcados em A, B, C e D, respectivamente. Depois de 0.5 unidades de t , estes quatro pontos são transportados para os pontos A', B', C' e D' pelas respectivas órbitas. Qualquer ponto na região ABCD é transportado para um local particular na região A'B'C'D' no fluxo de (2.6) e (2.7).

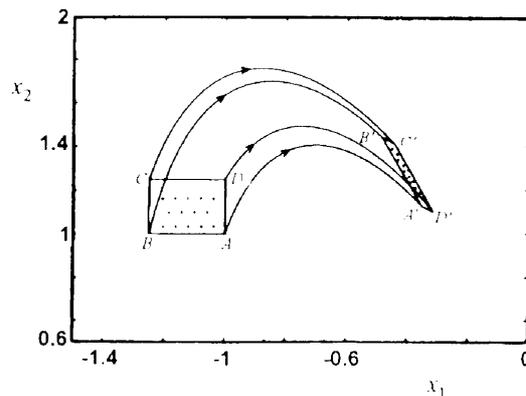


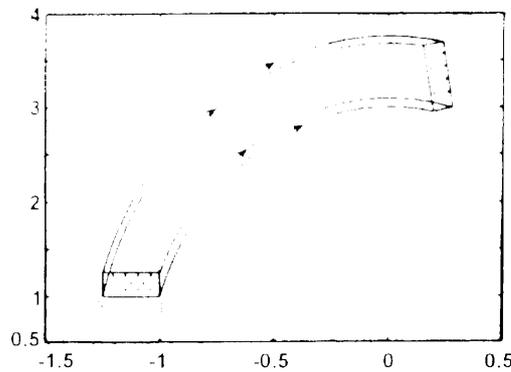
Figura 2.5: As quatro órbitas positivas de (2.6) e (2.7) são iniciadas em $t = 0$ quando $\mu > 0$. As órbitas são mostradas para $0 \leq t \leq 0.5$. A área A'B'C'D' ocupada pela configuração final é menor que área ABCD ocupada pela configuração inicial. Além disso, a orientação dos pontos da área inicial é preservada.

3. DISSIPACÃO E CONJUNTOS ATRATIVOS E ATRADORES

Antes de iniciarmos a noção de conjuntos atratores, explicaremos primeiro o que se entende por **dissipação** de um fluxo. Revendo a Figura 2.5, percebemos que a área da região A'B'C'D' no espaço fase em um tempo posterior é muito menor que a área da região inicial ABCD. Em outras palavras, o fluxo é tal que o conjunto de configurações finais ocupa uma região bem menor em tamanho do que aquela ocupada pelas correspondentes configurações iniciais. Logo, as áreas no espaço fase de (2.6) e (2.7) não são **conservadas** mas se **contraem** quando $\mu = 2$. Este fenômeno é chamado **dissipação**.

Na Figura 3.1 ilustramos o fluxo em (1.2.6) e (1.2.7) quando $\omega^2 = 8$ e $\mu = 0$. As quatro órbitas positivas iniciadas em $t = 0$ de $(-1.00, 1.00)$, $(-1.25, 1.00)$, $(-1.25, 1.25)$ e $(-1.00, 1.25)$ são consideradas, e estes quatro pontos iniciais estão marcados como A, B, C e D, respectivamente. Após 0.5 unidades de t estes quatro pontos são transportados para os pontos A', B', C' e D' pelas suas respectivas órbitas. Novamente, um ponto qualquer na região ABCD é transportado para uma posição particular na região A', B', C', D' sob o fluxo de (1.2.6) e (1.2.7). Todavia, ao contrário da situação da Figura 2.5, o conjunto de configuração final ocupa uma região igual em tamanho àquela ocupada pela correspondente configuração inicial. Nesse caso, diz-se que o fluxo **conserva** áreas no espaço de fase quando $\mu = 0$ em (2.6) e (2.7).

Figura 3.1: As quatro órbitas positivas de (2.6) e (2.7) iniciadas em $t = 0$ quando $\mu = 0$. As



órbitas são mostradas para $0 \leq t \leq 0.5$. A área $A'B'C'D'$ ocupada pelas configurações finais é igual à área $ABCD$ ocupada pelas configurações iniciais. Além a orientação dos pontos da área inicial é preservada.

Para conceituar dissipação num contexto geral consideremos o fluxo sob (2.5). Seja V_0 o volume ocupado por um dado conjunto de configuração inicial no instante $t=t_0$. Num instante posterior t_f , as órbitas iniciadas nestas condições atingem certas localizações no espaço de configuração inicial. Em $t=t_f$, seja V_f o volume ocupado pelo conjunto destas configurações $t=t_f$. Então os fluxos são classificados em conservativo ou dissipativo, dependendo de V_f ser igual ou menor que V_0 , ou seja dependendo se os volumes no espaço de configuração permanecem constantes ou contraem-se com o tempo.

Para os sistemas dinâmicos determinados por (2.4) ou (2.5), recorreremos aos conceitos de mecânica dos fluídos para determinar quando um fluído é conservativo ou dissipativo. Em um instante no tempo t , consideremos um conjunto de pontos ocupando uma pequena região com volume V e superfície S no espaço de configuração n -dimensional associado. (Como o conjunto de pontos é transportado no espaço de configuração sob o fluxo considerado, V e S variam com o tempo.). Considerando uma pequena área elementar ΔS , a mudança associada no volume V sobre um intervalo Δt é dada por

$$\mathbf{v} \Delta t \cdot \mathbf{n} \Delta S \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ é o vetor velocidade e \mathbf{n} é um vetor unitário normal à superfície apontado para fora em S . Para determinar a mudança em V , tomamos $\Delta S \rightarrow 0$ e integramos (1.3.1) sobre a superfície S . O resultado é:

$$\Delta V = \Delta t \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.2)$$

Do teorema da divergência, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV \quad (3.3)$$

Mas, por um V infinitamente pequeno, o lado direito de (3.3) pode ser aproximado por $(\nabla \cdot \mathbf{F}) V$. Por isso (3.2) e (3.3) resulta em

$$\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (3.4)$$

Conseqüentemente, um fluido é conservativo ou dissipativo, dependendo se o divergente do campo vetorial é zero ou negativo. Em outras palavras, nos sistemas conservativos

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0 \quad (3.5)$$

e nos sistemas dissipativos (e.g. Sistemas com amortecimento)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} < 0 \quad (3.6)$$

onde F_i e x_i são os componentes escalares de \mathbf{F} e \mathbf{x} em (1.2.5) respectivamente. Neste livro, estaremos interessados sobretudo pelos sistemas dissipativos.

Na mecânica, existem sistemas denominados de **sistemas Hamiltonianos** os quais são determinados por

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (3.7)$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (3.8)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$ e $H = H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t)$. (A função H é chamada de **Hamiltoniana**). A divergência do vetor campo do sistema governado por (1.3.7) e (1.3.8) é Fig.(1.3.9)-(pág.17)

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(- \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right] = 0 \quad (3.9)$$

se H é duas vezes continuamente diferenciável. Por isso, os volumes no espaço de configuração são conservados nos sistemas Hamiltonianos e portanto eles formam um subconjunto do conjunto dos sistemas conservativos. A preservação de volumes no espaço de configuração de sistemas Hamiltonianos é chamado **teorema de Liouville**.

Em resumo, **o fluxo em sistemas conservativos preservam(localmente) o volume no espaço configuração**. Além disso, quando $t \rightarrow \infty$, o movimento ocorre em todo o espaço n -dimensional. Para sistemas dissipativos, $V_f < V_0$ e $V_f \rightarrow 0$ quando $t = t_f \rightarrow \infty$. Isto significa que as trajetórias iniciadas de diferentes condições são atraídas para um subespaço do espaço de configuração. Este fenômeno é chamado **atração** e o conjunto para o qual as trajetórias são atraídas quando $t \rightarrow \infty$ é chamado **conjunto atrativo**.

Antes de considerarmos a noção de um conjunto atrativo em detalhes, primeiro explicaremos o que se entende por um **conjunto invariante**. Um conjunto $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^n$ é chamado um **conjunto invariante** se para alguma condição inicial $\mathbf{x}(t = t_0) \in \mathbf{P}$ nos tivermos $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{P}$ para todo $-\infty < t < \infty$. Se esta condição é satisfeita somente para $t \geq 0$ ou $t \leq 0$, \mathbf{P} é chamado um **conjunto invariante positivo ou negativo** respectivamente. Um **conjunto atrativo** é um conjunto invariante. Além disso, se ele tem uma vizinhança aberta tal que as órbitas positivas iniciadas nesta vizinhança são atraídas para este conjunto, como será explicado na Secção 5, esse conjunto atrativo é chamado **conjunto atrator**.

Exemplo 7 Para o sistema (2.6) e (2.7) o vetor campo divergente é -2μ . Daí, se $\mu > 0$ este sistema é dissipativo, e se $\mu = 0$ o sistema é conservativo. A Figura 3.1 é ilustrativa da natureza conservativa deste sistema quando $\mu = 0$, enquanto as Figuras 2.4 e 2.5 são ilustrativas de dissipação neste sistema quando $\mu > 0$. No caso da Figura 2.4 todas as quatro órbitas positivas são atraídas para a origem do espaço de configuração.

Exemplo 8 Transformamos o sistema (2.2) e (2.3) em um sistema autônomo tri-dimensional definindo uma configuração adicional θ tal que $\dot{\theta} = \Omega$. Assim temos

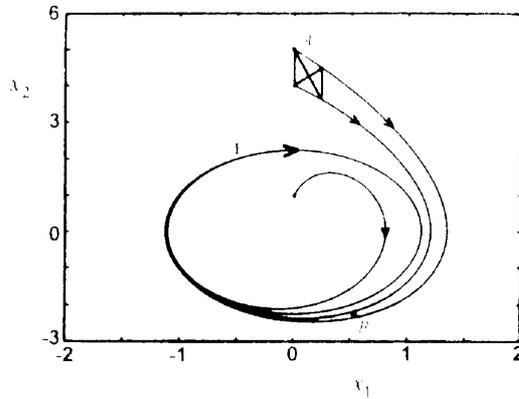
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_2 - 2\mu x_2 + F \cos(\theta) \\ \dot{\theta} &= \Omega \end{aligned}$$

e o divergente do campo vetorial será

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = -2\mu$$

Então, os volumes no espaço (x_1, x_2, θ) são conservados quando $\mu = 0$ e contraem-se quando $\mu > 0$. Para construir a Figura 3.2, usamos os seguintes valores de parâmetros: $\omega^2 = 8$, $\mu = 2$, $F = 10$ e $\Omega = 2$. Mostramos três órbitas positivas iniciadas de $(0,1)$, $(0,4)$ e $(0,5)$. Todas estas órbitas são **atraídas** para a órbita fechada G circundando a origem quando $t \rightarrow \infty$ por causa da dissipação do sistema. Na figura 3.2., a área das condições iniciais marcada A contrai para a área marcada B depois de uma unidade de tempo.

Figura 3.2: As três órbitas positivas de (2.2) e (2.3) são iniciadas em $t = 0$.



Na Figura 2.4, 2.5 e 3.2, observamos a presença de atração e conjuntos atrativos. A origem do espaço $x_2 - x_1$ é o conjunto atrativo e a órbita fechada Γ é o conjunto atrativo na Figura 3.2. Tais conjuntos ocorrem somente em sistemas dissipativos.

Observamos que os conceitos de dissipação, conjuntos invariantes, conjuntos atrativos e atratores também se aplica às transformações discutidas na Secção 1. A aplicação (1.3) é dissipativa em $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$ se

$$|\det D_{\mathbf{x}_k} \mathbf{F}| < 1 \quad \text{em} \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 \quad (3.10)$$

Sendo $\det D_{\mathbf{x}_k} \mathbf{F}$ o determinante da matriz $n \times n$ da primeira derivada parcial dos componentes escalares de \mathbf{F} com respeito aos componentes escalares de \mathbf{x}_k .

Exemplo 1.9. No caso da aplicação de Hénon (1.5) e (1.6), temos

$$\det D_{\mathbf{x}_k} \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} -2\alpha x_k & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} = -\beta$$

Portanto quando $|\beta| < 1$, o mapa de Hénon é dissipativa em todo \mathbf{x}_k . Consequentemente, qualquer área se contrai pelo fator $|\beta|$ após cada iteração.

4-CONCEITOS DE ESTABILIDADE

Nesta secção, discutiremos vários tipos de estabilidade e o conceito de atratores. Observamos que todas as noções de estabilidade discutidas anteriormente foram feitas no contexto de sistemas de dimensão finita.

4.1 Estabilidade de Lyapunov

Aplicações

A solução $\{\mathbf{u}_k\}$ de uma aplicação é dita ser de **Lyapunov estável** se, dado um pequeno número $\epsilon > 0$, existe um número $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que qualquer outra solução $\{\mathbf{v}_k\}$ na qual $\|\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k\| < \delta$ para $k = m$ satisfaz para todo $k > m$, onde k e $m \in \mathbb{Z}^+$.

Para a estabilidade de Lyapunov, duas órbitas de uma aplicação iniciada de dois pontos vizinhos em um certo tempo permanecem próximas entre si para tempos futuros (i.é., $k > m$).

Exemplo 1.10 Consideremos a estabilidade de Lyapunov de uma solução da aplicação (1.4). Quando $\alpha = 0$, $x_k = 0.5$ é uma solução desta aplicação para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Uma órbita de (1.4) iniciada em $u_0 = 0.5$ é

$$\{0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, \dots, 0.5\}$$

Uma órbita iniciada em $v_0 = 0.4$ é

$$\{0.4, 0.48, 0.4992, 0.49999872, 0.5, \dots, 0.5\}$$

Assim dado um $\epsilon > 0$, encontramos um $\delta(\epsilon) > 0$ satisfazendo as condições de estabilidade de Lyapunov. Portanto, $x_k = 0.5$ é uma solução Lyapunov estável de (1.4).

Sistemas de Tempo Contínuo

Uma solução $\mathbf{u}(t)$ de um sistema de equações diferenciais autônomo ou não autônomo é dita ser **Lyapunov-Estável** se, dado um pequeno número $\epsilon > 0$, existe um número $\theta = \theta(\epsilon) > 0$ tal que qualquer outra solução $\mathbf{v}(t)$ na qual $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \theta$ em $t = t_0$ satisfaz a $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \epsilon$ para todo $t > t_0$.

Em sistemas não-autônomos, θ será também função do tempo inicial t_0 . Se \mathbf{u} é Lyapunov Estável, então qualquer outra solução, que é inicialmente próximo a ela, permanecerá assim e estará confinada a um tubo formado pela união de esferas de raios ϵ centrado nos pontos entre as trajetórias $\mathbf{u}(t)$, o chamado tubo ϵ . Para um sistema não-autônomo, teremos um tubo ϵ no espaço de configuração estendido. Na figura 4.1, ilustramos o conceito da estabilidade de Lyapunov para duas soluções \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 de sistemas não-autônomos.

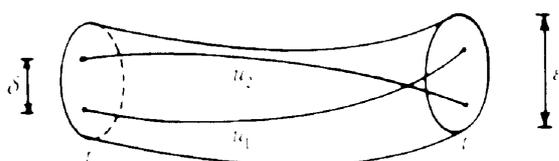


Figura 4.1: Ilustração da estabilidade de Lyapunov para uma solução \mathbf{u}_i de um sistema não-autônomo de tempo contínuo.

Em sistemas autônomos a **estabilidade de Lyapunov** é também conhecida como **estabilidade uniforme**, porque θ é independente do tempo inicial t_0 .

Exemplo 1.1 Vamos considerar a estabilidade de algumas soluções do oscilador de Duffing dadas por

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4.1}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_1^3 - 2\mu x_2 \quad (4.2)$$

Vamos examinar as soluções de (4.1) e (4.2) quando μ , o coeficiente de amortecimento, é zero. Os pontos $(0,0), (-1,0)$ e $(1,0)$ no plano $x_2 - x_1$ satisfaz (4.1) e (4.2) para todos os tempos e são as três soluções do sistema. Estas soluções são chamadas **soluções de equilíbrio**. As correspondentes configurações para uma solução de equilíbrio são constantes no tempo. No plano $x_2 - x_1$, as órbitas de soluções na vizinhança de $(0,0)$ são curvas fechadas na sua vizinhança.

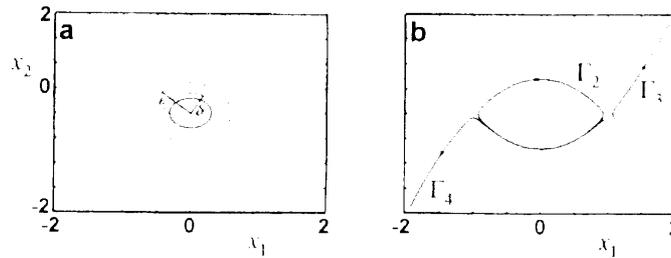


Figura 4.2: Ilustração determinando a estabilidade de Lyapunov para as soluções de (4.1) e (4.2) quando $\mu = 0$: (a) $(0,0)$ e (b) $(1,0)$.

Consideremos a estabilidade de Lyapunov da solução $(0,0)$ e usemos a Figura 4.2a nesta consideração. A curva cheia foi obtida integrando numericamente as equações com a condição inicial $(0,0,0.3)$. Seja (x_{10}, x_{20}) que representa a condição inicial no tempo $t = t_0$ para uma das soluções periódicas na vizinhança $(0,0)$. Se

$$\sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2} < \Theta$$

então a solução periódica correspondente é limitada para o tubo ϵ (cuja seção transversal tem um raio ϵ como mostrado na Fig.4.2a) para todos os tempos. Em outras palavras, para a solução $(0,0)$, dado um número $\epsilon > 0$, você poderá sempre encontrar um número $\theta > 0$ satisfazendo as condições para a estabilidade de Lyapunov. (Se desejarmos o movimento em uma vizinhança ϵ de $(0,0)$, podemos encontrar uma vizinhança θ para a condição inicial.). Então a solução $(0,0)$ é uniformemente estável.

A seguir vamos considerar a estabilidade de Lyapunov da solução $(1,0)$. As trajetórias Γ_2, Γ_3 , e Γ_4 tratadas na Figura 4.2b, são órbitas positivas associadas com as condições iniciais $(0.9,-0.1), (1.1,-0.1)$ e $(0.95,-0.1)$, respectivamente. Todas as três condições iniciais são escolhidas na vizinhança de $(1,0)$. A órbita positiva Γ_2 é periódica e limitada. As órbitas positivas Γ_3 e Γ_4 não são limitadas e crescem indefinidamente. Todas as órbitas da Figura 4.2b foram obtidas através de integrações numéricas. Não é possível encontrar um tubo ϵ ao redor de $(1,0)$ dentro do qual Γ_3 e Γ_4 permanecerão confinados para todos os tempos. Portanto, simulações numéricas indicam que $(1,0)$ não é uniformemente estável ou estável no sentido de Lyapunov.

1.4.2 Estabilidade Assintótica

Aplicações

A solução $\{\mathbf{u}_k\}$ de uma aplicação é dita ser **assintoticamente estável** se ela é Lyapunov-Estável e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k\| \rightarrow 0$$

Exemplo 12 Quando $\alpha = 0.5$, a solução $x_k = 0.5$ de (1.4) é assintoticamente estável. Isso ocorre porque $x_k = 0.5$ é Lyapunov-Estável e a distância entre as órbitas iniciadas em $u_0 = 0.5$ e $v_0 = 0.4$ ou iniciada em outro ponto em uma vizinhança de u_0 é muito pequena para $k \geq 4$.

Sistemas de Tempo Contínuo

Uma solução $u(t)$ de equações diferenciais de um sistema autônomo ou não-autônomo é dito ser assintoticamente estável se ele é de Lyapunov-Estável e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \rightarrow 0$$

Exemplo 13 Consideremos (4.1) e (4.2), quando $\mu > 0$, então temos um sistema dissipativo. Na Figura 4.3, mostramos duas órbitas positivas Γ_1 e Γ_2 deste sistema iniciadas de $(0.0, 0.6)$ e $(0.0, -0.6)$, respectivamente. Representamos por u a solução $(0, 0)$. Como mostramos na Figura 4.3, uma solução v iniciada de uma condição inicial em uma vizinhança de $(0, 0)$ dirige-se em direção a $(0, 0)$ ou é atraída para ela quando $t \rightarrow \infty$. A separação entre as soluções u e v vai para zero quando $t \rightarrow \infty$. Daí, pela definição $(0, 0)$ é assintoticamente estável. A presença de amortecimento em (4.1) e (4.3) torna uma solução assintoticamente estável.

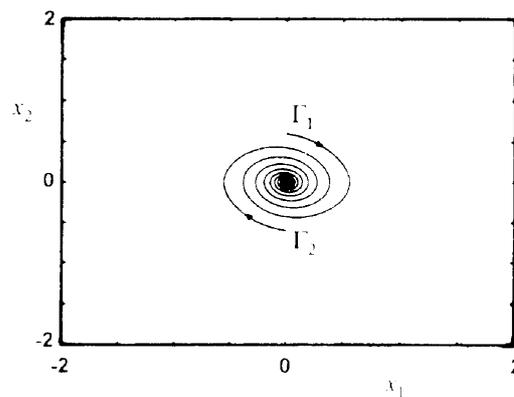


Figura 4.3: Ilustração da estabilidade assintótica da solução $(0,0)$ de (4.1) e (4.2) quando $\mu = 0.1$. As órbitas positivas de Γ_1 Γ_2 são iniciadas em $(0.0, 0.6)$ e $(0.0, -0.6)$, respectivamente

4.3 Estabilidade de Poincaré

Esta noção de estabilidade é comumente aplicada às soluções de sistemas de equações diferenciais autônomos e não-autônomos. Estas noções descritas nas Seções 4.1 e 4.2 são tipicamente usadas para estudar as soluções de estabilidade de equilíbrio de (2.5). Estas soluções satisfazem à condição $\mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{M}) = 0$. Nas Seções 4.1 e 4.2, comparamos a distância

no mesmo instante t , de duas curvas integrais originárias de duas condições iniciais diferentes. Esta abordagem é restritiva, e de acordo com ela mesmo uma solução periódica de um sistema autônomo não-linear é instável. Para entendermos o porquê disto, vamos considerar a estabilidade das soluções periódicas do sistema autônomo bi-dimensional não linear(4.1) e (4.2). Quando $\mu = 0$, usando o método das múltiplas escalas, encontramos a seguinte solução aproximada de (4.1) e (4.2) Para amplitudes pequenas mas finitas.

$$u \approx a \cos \left[\left(1 - \frac{3}{8} a^2 \right) t + \beta \right]$$

Esta claro que a frequência $\omega = 1 - \frac{3}{8} a^2$ depende da amplitude a da oscilação, a qual por sua vez é determinada pela condição inicial. Portanto, soluções iniciais ligeiramente diferentes evoluem com dois períodos diferentes e podem não ser próximas umas das outras para grandes valores de t .

Para uma ilustração gráfica, vamos considerar duas soluções periódicas do sistema não amortecido obtido de (4.1) (4.2) fazendo $\mu = 0$. Estamos interessados na estabilidade de soluções periódicas cuja órbita \mathbf{u} e Γ_1 da Figura 4.4. Esta órbita foi obtida integrando numericamente (4.1) e(4.2) da condição inicial (0.0000,0.5000). Outra solução \mathbf{v} do sistema corresponde à órbita Γ_2 na Figura 4.4. Esta órbita foi obtida integrando numericamente(4.1) e (4.2) da condição inicial (0.0000,0.6000). Devido às diferentes condições iniciais, os períodos de oscilação destas órbitas são diferentes. No tempo inicial $t = 0$ a distância entre as duas soluções é $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 0.1$.

Após $t = 30$ unidades, deslocaremos para o ponto y em Γ_1 e para o ponto z em Γ_2 . As coordenadas de y são (0.5263,0.1068) e de z são (-0.6369,0.1914). A distância entre estas duas soluções é $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 1.1663$ e é muito maior do que a condição inicial

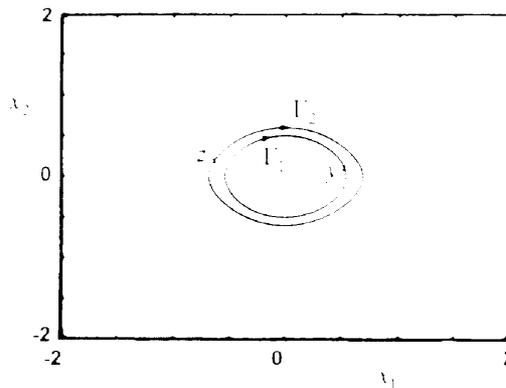


Figura 4.4: Soluções periódicas de (4.1) e (4.2) quando $\mu = 0$.

Podemos escolher duas condições iniciais mais próximas, mas distâncias grandes entre as respectivas curvas integrais no espaço (x_1, x_2, t) eventualmente ocorrerão depois de um certo número de ciclos devido às diferenças nos respectivos períodos. Você não pode fazer tais separações entre as curvas integrais arbitrariamente pequenas escolhendo condições iniciais próximas umas às outras. Embora as duas órbitas estejam próximas umas às outras, de acordo com a definição de estabilidade de Lyapunov, a solução \mathbf{u} é instável porque as curvas integrais não estão próximas umas às outras. Para remediar esta situação, Poincaré introduziu

a noção de **estabilidade orbital**. Para soluções dinâmicas, tais como soluções periódicas de (2.5), pode-se usar a noção de **estabilidade orbital ou estabilidade de Poincaré**.

Se Γ_1 representa a órbita de \mathbf{u} e Γ_2 representa a órbita de \mathbf{v} para todo t . As soluções periódicas de \mathbf{u} e \mathbf{v} tem diferentes períodos T_1 e T_2 e, portanto, os correspondentes movimentos evoluem em diferentes escalas de tempo. A órbita Γ_1 é dita **orbitalmente estável** se, dado um pequeno número $\epsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $\|\mathbf{u}(t=0) - \mathbf{v}(t=\tau)\| < \delta$ para algum τ , então existem t_1 e t_2 para os quais $\|\mathbf{u}(t_1) - \mathbf{v}(t_2)\| < \epsilon$. Além disso, se Γ_2 tende para Γ_1 quando $t \rightarrow \infty$, então dizemos que Γ_1 é assintoticamente estável. Na verificação da estabilidade de Poincaré examina-se a proximidade ds órbitas no espaço das configurações.

4.4 Estabilidade de Lagrange (Estabilidade Limitada)

Aplicações

A solução $\{\mathbf{u}_k\}$ de uma aplicação é dita ser limitadamente estável se $\|\mathbf{u}_k\| < L$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, onde L é uma quantidade positiva finita.

Sistemas de Tempo Contínuo

Uma solução $\mathbf{u}(t)$ de um sistema de tempo contínuo é dita ser **limitadamente estável** se $\|\mathbf{u}\| \leq L$ para todo t , onde L é uma quantidade positiva finita.

4.5 Estabilidade Através da Função de Lyapunov

O conceito de estabilidade de Lyapunov discutida na Seção 4.1 e estabilidade assintótica discutida na Seção 4.2 são tipicamente usadas para estudar a estabilidade de soluções de equilíbrio de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{M})$. Vamos designar as soluções de equilíbrio para alguns valores \mathbf{M}_0 de \mathbf{M} como $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Mais adiante, vamos assumir que $V(\mathbf{x}; \mathbf{M})$ seja uma função escalar de C^1 definida em uma vizinhança de \mathbf{x}_0 tal que $V(\mathbf{x}_0, \mathbf{M}_0) = 0$ e $V(\mathbf{x}; \mathbf{M}) > 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. A função V é chamada **função de Lyapunov**. A derivada de V ao longo das curvas solução de (2.5) é $\dot{V} = \nabla V \cdot \mathbf{F} = \nabla V^T \mathbf{F}$. Dos teoremas de estabilidade (Lyapunov, 1947), temos o seguinte:

- (a) Se $\dot{V} \leq 0$ na vizinhança escolhida de \mathbf{x}_0 , então \mathbf{x}_0 é **estável**.
- (b) Se $\dot{V} < 0$ na vizinhança escolhida de \mathbf{x}_0 , então \mathbf{x}_0 é **assintoticamente estável**.

Existem teoremas endereçados à existência das funções de Lyapunov (Krasovskii, 1963). Para sistemas mecânicos e estruturais, você pode frequentemente usar a energia como função de Lyapunov. No contexto de sistemas de força elétrica, alguns métodos tem sido usados para determinar funções de Lyapunov. Para sistemas Hamiltonianos, o Hamiltoniano pode ser tomado para ser função de Lyapunov. Todavia, para outros sistemas não existe um método geral para determinar esta função.

Exemplo 14. Vamos considerar a estabilidade da solução (0,0) de (4.1) e (4.2). Escolhemos a expressão da energia como função de Lyapunov e obtemos:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{4}x_1^4$$

Percebemos que $V(0,0) = 0$ e $V(x_1, x_2) > 0$ em uma região em torno de $(0,0)$. Neste caso o gradiente de V , dado por ∇V , é

Fig.(pág.28)

$$\nabla V^T = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \right)$$

e assim

Fig.(pág.28)

$$\dot{V} = \nabla V^T \mathbf{F} = \frac{\partial V}{\partial x_1} F_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} F_2$$

onde os F_i são componentes escalares de \mathbf{F} . Daí a derivada de V ao longo das soluções de (4.1) e (4.2) é dada por

Fig.(pág.28)

$$\dot{V} = -2\mu x^2$$

Porque μ é positivo em um sistema dissipativo, temos que $\dot{V} \leq 0$ em alguma vizinhança escolhida da solução de equilíbrio $(x_1, x_2) = 0,0$. Daí, esta solução é estável de acordo com o primeiro teorema da estabilidade de Lyapunov.

O exemplo 14 também serve para ilustrar a deficiência do segundo teorema da estabilidade de Lyapunov. Usando algumas técnicas, tais como métodos numéricos e de perturbação, você pode mostrar que a origem é uma solução assintoticamente estável de (4.1) e (4.2). Todavia por causa de

Fig.(pág.28)

$$\dot{V} = -2\mu x_2^2 \leq 0$$

em toda vizinhança da origem ($\dot{V} = 0$ ao longo de todo eixo x_1 ; que é $x_2 = 0$), o segundo teorema da estabilidade de Lyapunov não pode ser usado para concluir que a origem é assintoticamente estável. Na verdade, a condição dada pelo segundo teorema de Lyapunov é suficiente mas não necessária. Esta deficiência pode ser superada utilizando o teorema de Krasovskii. Seja $V(\mathbf{x})$ uma função escalar C^1 , com $V(\mathbf{x}_0) = 0$, e

Fig.(pág.28)

$$D_l = \{ \mathbf{x} / V(\mathbf{x}) \leq l \}$$

Fig.(pág.29)

$$V(\mathbf{x}) > 0 \text{ para } \mathbf{x} \in D_l \text{ e } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$$

Fig.(pág.29)

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ para } \mathbf{x} \in D_l$$

Se não existe solução $\mathbf{x}^*(t)$ para $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{M}_0)$ completamente contida em D_l , que não seja \mathbf{x}_0 , e para a qual $\dot{V}(\mathbf{x}^*(t)) \equiv 0$, então toda solução que se inicia em D_l dirige-se para \mathbf{x}_0 , e \mathbf{x}_0 é assintoticamente estável. Ao encontrar a maior região possível para a qual as condições do teorema de Krasovskii são satisfeitas, você poderá determinar o **domínio de atração** ou **bacia de atração** de \mathbf{x}_0 ; que é a região no espaço de configuração tal que uma trajetória iniciada em qualquer ponto no seu interior tenderá para \mathbf{x}_0 quando $t \rightarrow \infty$. Por exemplo, usando a função de Lyapunov

Fig.(pág.29)

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{4}x_1^4$$

e tomando D_l para ser a região

Fig.(pág.29)

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{4}x_1^4 < \frac{1}{4}$$

você poderá mostrar que todas as condições do teorema de Krasovskii estão satisfeitas e portanto a origem de (4.1) (4.2) é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e que D_l é o domínio de atração da origem.

1.5 ATRADORES

No início, no contexto da Figura 2.4, percebemos que as órbitas positivas de (2.6) e (2.7) são atraídas para a origem do espaço das configurações quando $t \rightarrow \infty$. Usando a função de Lyapunov, você poderá mostrar que a origem é uma solução assintoticamente estável de (2.6) e (2.7) quando $\mu > 0$. Estas soluções assintoticamente estáveis são atrativas e exemplos de atratores.

Num contexto geral, se T^t é um operador de evolução que atua sobre as condições iniciais \mathbf{x}_0 no \mathbb{R}^n tal que $T^t \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$, onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Repetidas aplicações de T^t podem levar para um subespaço do \mathbb{R}^n , chamado **atrator**, o qual é definido pelas seguintes propriedades:

1. **Invariância:** Um atrator X é um conjunto invariante do fluxo do sistema. Formalmente, $T^t X \in X$.
2. **Atratividade:** Neste caso, existe uma vizinhança U do atrator (*i.e.*, $X \subset U$) tal que as evoluções iniciadas U em permanecem em U e se aproximam de X quando $t \rightarrow \infty$. Formalmente, $T^t U \subset U$ para $t \geq 0$ e $T^t U \rightarrow X$ à medida que $t \rightarrow \infty$.
3. **Recorrência:** Trajetórias iniciadas de uma configuração em um subconjunto aberto de X

repetidamente se tornam arbitrariamente próximas da configuração inicial para valores grandes do tempo.

4. Indecompossibilidade: Um atrator não pode ser dividido em dois pedaços não triviais.

A propriedade 3 impede que soluções instáveis e soluções transientes sejam atratores. A propriedade 4, também chamada de **irreduzibilidade**, implica que um atrator não pode ser decomposto em atratores menores distintos. Todos os conjuntos atrativos possuem as propriedades 1 e 2, mas apenas alguns deles, os atratores possuem as propriedades 3 e 4. Porque algumas soluções instáveis podem fazer parte de um conjunto atrativos, a propriedade 3 pode ser violada. Além disso, pelo fato de mais de um atrator poder fazer parte de um conjunto atrativo, a Propriedade 4 pode não ser satisfeita. Observamos que para verificar a Propriedade 2 precisaríamos usar uma medida de distância.

Voltando à origem na figura 2.4 percebemos que nela estão satisfeitas a Propriedade 1 porque é uma solução de (2.6) e (2.7) para todo t . Também, ela satisfaz as Propriedades 3 e 4 porque é assintoticamente estável. Além disso, $(0,0)$ satisfaz a propriedade 4 porque não pode ser dividida em pequenos conjuntos que satisfazem (2.6) e (2.7). A solução de equilíbrio assintoticamente estável $(0,0)$ de (2.6) e (2.7) é um exemplo de **atrator pontual**. A órbita Γ da Figura 3.2 é um atrator de (2.2) e (2.3). Para ser específico, ele é um **atrator periódico**. Diferente de um atrator pontual, este atrator é uma **solução dinâmica** porque as variáveis de configuração são funções do tempo. Outros dois atratores, que são caracterizados pela variação no tempo, são os atratores **quasiperiódico** e **caótico**, respectivamente.

O domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ que inclui todas as condições iniciais \mathbf{x}_0 tal que $T^t \mathbf{x}_0 \rightarrow X$ quando $t \rightarrow \infty$ é chamado **bacia** ou **domínio de atração** ou **região de estabilidade** de X . Na verdade, todas as evoluções em uma bacia de atração de X são atraídas para ela.

Na literatura, o oposto da idéia de atrator é também chamado **repulsor**. Um atrator atrai órbitas positivas mas repele órbitas negativas e um repulsor repele órbitas positivas mas atrai órbitas negativas. A solução $(0,0)$ de (2.6) (2.7) é um atrator quando $\mu > 0$. Esta solução é um repulsor quando $\mu < 0$.

1.6 OBSERVAÇÕES

Na literatura, o Método utilizando funções de Lyapunov para determinar a estabilidade de um ponto fixo também é chamado **segundo método de Lyapunov**. A existência de funções de Lyapunov e aplicações do segundo método Lyapunov são discutidos minuciosamente por Krasovskii(1963). Uma exposição detalhada da teoria de estabilidade de Lyapunov também é apresentado em Hagedorn(1988). Observamos que todas as noções de estabilidade discutidas acima não fornecem esquemas explícitos para determinar a estabilidade de uma solução.