Universidade Federal de Goiás
Campus Avançado de Catalão
Departamento de Matemática

Aplicação dos Modelos de Malthus e Verhulst de Dinâmica Populacional à População do Brasil

por

Izabel Aparecida de Almeida

Catalão - GO
2003

Izabel Aparecida de Almeida

Aplicação dos Modelos de Malthus e Verhulst de Dinâmica Populacional à População do Brasil

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática do Campus Avançado de Catalão, da Universidade Federal de Goiás, para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Donald Mark Santee.

Catalão

2003

Izabel Aparecida de Almeida

Aplicação dos Modelos de Malthus e Verhulst de Dinâmica Populacional à População do Brasil

Monografia apresentada e aprovada em 31 de julho de 2003, pela Banca Examinadora constituída pelos professores.

Prof. Dr. Donald Mark Santee

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos

Prof. Ms. Cleves Mesquita Vaz

Agradecimentos

Ao professor e orientador ("pai") dessa Monografia, Donald Mark Santee, pela dedicação, confiança e prestatividade.

À professora Eliane M. Freitas pelo incentivo e credibilidade.

Sumário

Resumo

Modelos matemáticos são importantes em praticamente todos os ramos da ciência, influenciando a maneira que a natureza é compreendida e, muitas vezes, controlada. Isso é particularmente verdade com os modelos de dinâmica populacional. Os modelos trabalhados nessa monografia contam com um inestimável valor histórico: O modelo de Malthus introduziu a percepção de que os recursos da natureza não são inesgotáveis, dando assim uma preocupação científica aos temas de preservação da natureza e da ecologia e influenciou Charles Darwin na percepção da competição intraespecífica e do princípio da seleção natural; O modelo de Verhulst deu um passo a mais mostrando que os modelos matemáticos de dinâmica populacional, dentro de suas hipóteses básicas permintem que se possam fazer previsões bastante acuradas do crescimento de uma população.

A determinação dos parâmetros de um modelo a partir de alguns dados experimentais também se mostra como um desafio. Esse trabalho faz essa determinação usando o método dos mínimos quadrados para a população brasileira.

Abstract

Mathematical models are important in practically every branch of science, changing the way nature is seen and, many times, controlled. This is particularly true with the models of Population Dynamics. The models treated in this monograph have an invaluable historical meaning: Malthus model introduced the notion than nature's resources are limited, furnishing in this way scientific reasons to environment conservation and ecology, it also influenced Charles Darwin perception of the intraspecific competition and natural selection; Verhulst model, on the other hand, went a step further showing that Population Dynamics mathematical models can, under the right hypothesis, furnish very accurate predictions of a populational growth.

To determine the parameters of a model, given the populational data is also a challenge. This monograph determines the parameter values of the Malthus and Verhulst models for the Brazilian population.

Introdução.

Ecologia é uma disciplina antiga. Seu nome foi criado em 1866 pelo biólogo evolucionista alemão Ernst Haeckel. Ele cunhou dois termos: Philogenia e Ecologia. O termo ecologia vem do grego *oikos*, que significa lar, moradia, e *logos* que significa estudo. A Ecologia tornou-se o estudo cientifico da inter-relação dos organismos vivos uns com os outros e com o seu ambiente físico. Entretanto o conceito de ecologia é ainda mais antigo (Worter, 1994). Ele está relacionado com as noções do século 18 de equilíbrio da economia e da natureza refletido no artigo de Linnaeus de 1749 chamado *Eoconomia Naturae* (economia da natureza, Stauffer, 1960).

Ecologia é também uma disciplina diversificada. No passado dividia-se a ecologia em dois ramos: *autecologia*, a ecologia dos organismos vivos e das populações, e *synecologia*, o estudo das comunidades de animais e plantas. Hoje ela se subdivide em vários sub-ramos. Muitos desses ramos usam a matemática como ferramenta de análise. Por exemplo a ecologia comportamental usa a teoria dos jogos e outros tipos de otimização.

Essa monografia se situa na ecologia populacional, em particular na dinâmica de populações com modelos *não estruturados*. São chamados de modelos não estruturados aos modelos que não incluem o efeito da distribuição geográfica da população (estrutura espacial), da distribuição das idades (estrutura etária), e da diferença de sexos (estrutura sexual). Modelos não estruturados tem a vantagem da simplicidade, e à medida que se adicionam conceitos de biologia, eles tornam-se mais realistas e mais desafiadores.

Outro aspecto do uso de modelos matemáticos no estudo da ecologia é a sua calibração. Calibrar um modelo matemático significa determinar os parâmetros daquele modelo de tal forma que eles levem a resultados mais próximos o possível dos dados observados. Ao calibrar um modelo o cientista deve estar consciente dos erros envolvidos nessa calibração. Os erros envolvidos são basicamente os seguintes: As hipóteses do modelo matemático não são atendidas pela população estudada; existem erros de medição do tamanho da população, isto é, os dados não são exatos; e finalmente existem os erros inerentes à representação de números propagação de erros aritméticos inerentes aos métodos numéricos normalmente utilizados.

Essa monografia se propõe a calibrar os modelos analisados a dados reais utilizando-se o método dos mínimos quadrados.

Os Modelos Básicos de Dinâmica Populacional.

O conceito básico para modelagem matemática de populações é o "tamanho da população". Esse tamanho pode ser expresso de várias formas, dependendo da população que está sendo estudada. Pode ser expressa em número de indivíduos, peso, volume, massa, densidade e até porcentagem de uma dessas medidas. Com freqüência usa-se o termo "biomassa" para expressar de forma genérica a unidade que se mede o tamanho da população.

Os modelos matemáticos de dinâmica populacional de uma única espécie são basicamente três. O crescimento exponencial, baseado no Modelo de Malthus, o Crescimento Logístico, baseado no Modelo de Verhulst, e o crescimento de Gompertz. Nesse trabalho analisaremos os dois primeiros.

O Crescimento Exponencial do Modelo de Malthus.

O primeiro modelo matemático para o crescimento populacional foi proposto pelo britânico Reverendo Thomas Robert Malthus (1766-1834). Seu primeiro artigo sobre populações apareceu em 1798. Malthus é conhecido por ter escrito o livro *An Essay on the Principle of Populations* (Um Ensaio sobre o Principio das Populações). A essência desse livro pode ser dada pela expressão:

População com crescimento geométrico	+	Produção de alimento com crescimento aritmético	=	Muita miséria humana

Muitas das conclusões a que Malthus chegou já tinham sido antecipadas por Jonh Graunt (1662), Sir William Petty (1683) e alguns outros. Mas foi Malthus que expressou a situação de forma mais clara. O livro de Malthus teve uma grande influência nas idéias de Charles Darwin e Alfred Russel Wallace e, proveu-os com os fundamentos básicos para o conceito de seleção natural.

O modelo de Malthus é, também o modelo mais simples, ele parte do conceito de "taxa de crescimento per capta", que expressa a fração média de crescimento que cada indivíduo contribui na população total numa unidade de tempo. Chamando-se de $y(t)$ ao tamanho da população no instante t, podemos escrever matematicamente:

$$\text{Taxa de crescimento per capta} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

A unidade da taxa de crescimento per capta é o inverso do tempo (por exemplo s^{-1}) pois é a quantidade de biomassa nova por unidade de biomassa existente na unidade de tempo.

No modelo de Malthus supomos que a taxa de crescimento per capta é constante, *r*, ao longo do tempo. A sua expressão algébrica é:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = r \Rightarrow \frac{dy}{dt} = r\,y \qquad (2)$$

No parâmetro *r* está condensada a taxa de nascimento per capta e a taxa de mortalidade per capta da população. Ele é também chamado de **velocidade específica de crescimento**, ou de **declínio**, dependendo de ser positivo ou negativo.

A equação (1) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear com coeficiente constante e homogênea, que pode ser resolvida usando métodos usuais de equações diferenciais. Considerando uma população inicial como condição inicial

$$y(0) = y_0 \qquad (3)$$

obtemos como solução do PVI (Problema de Valor Inicial) correspondente

$$y(t) = y_0 e^{r\,t} \qquad (4)$$

Para uma taxa de crescimento positiva, $r>0$, que indica mais nascimentos do que mortes, o modelo prevê que a população crescerá exponencialmente com o tempo a população cresce ilimitadamente com o tempo. Isso só é possível se houver uma quantidade ilimitada de recursos naturais (alimento e espaço). Para uma taxa de crescimento negativa, $r<0$, quando há mais mortes do que nascimentos, a população tenderá à extinção, pois $y(t)$ tenderá exponencialmente a zero.

Em condições ideais, a equação 4 foi observada com exatidão razoável, em muitas populações, pelo menos durante intervalos de tempo limitados.

Quando a taxa de crescimento é zero, a população não cresce nem diminui com o tempo. Nesse caso dizemos que a população está em *equilíbrio*. Numa população em equilíbrio não há variação no seu tamanho.

O valor de *r* varia de espécie para espécie e depende basicamente da fecundidade da espécie (por exemplo da quantidade média de filhotes por ninhada) e da taxa de mortalidade.

Diz-se que o Modelo de Malthus é válido para condições ideais porque uma população não pode crescer indefinidamente. Limitações de espaço, de suprimento de alimentos ou de outros recursos, reduzirão a taxa de crescimento e porão fim ao crescimento exponencial ilimitado. Ainda mais, esse modelo despreza a possibilidade de haverem migrações e de interações com outras espécies.

O Crescimento Logístico do Modelo de Verhulst.

Um modelo mais realista foi proposto pelo matemático belga Pierre-François Verhulst (1804-1849) que introduziu uma equação como um modelo de crescimento da população humana, em 1838, seguindo a formulação moderna. Denominou-a então de equação do crescimento logístico, e por isso é chamada, muitas vezes, equação logística. Seu trabalho foi pouco conhecido durante toda a sua vida, e ele morreu na obscuridade. Verhulst não pôde testar a exatidão do seu modelo em virtude de os dados censitários serem inadequados, e não provocou muita atenção, até muitos anos depois. Rayamond Pearl (1930) e Lowell Reed (1920) redescobriram a equação logística e iniciaram uma cruzada para fazer com que a equação fosse considerada um lei da natureza (Kingsland, 1985). Eles publicaram mais de uma dúzia de artigos entre 1920 e 1927 divulgando essa lei. Algumas de suas conclusões e extrapolações eram questionáveis, mas eles fizeram com que a equação logística se tornasse famosa. Em sua pesquisa Pearl mostrou uma concordância razoável da equação com os dados experimentais de populações de *Drosophila melanogaster* e G. F. Gause (1935) fez o mesmo para populações do caruncho de cereais.

Para deduzir a equação logística suporemos que taxa de crescimento per capita depende do tamanho da população. Então a constante *r* da equação (1) será substituida por uma função *f*(*y*), assim:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = f(y) \tag{5}$$

Escolhemos *f*(*y*) de modo que *f*(*y*) $\cong$ *r*>0 quando *y* for pequeno, que *f*(*y*) decresça com o crescimento de *y* e que *f*(*y*) seja negativo quando *y* for suficientemente grande. A função mais simples que tem estas propriedades é *f*(*y*)=*r-ay* onde *a* é também uma constante positiva. Usando esta função na equação (5), obteremos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = (r - a\,y) \tag{6}$$

A equação (6) é conhecida como equação de Verhulst, ou equação **Logística**. A equação Logística considera que a taxa de crescimento per capita diminui de forma linear à medida que a população cresce. Essa diminuição da taxa de crescimento está relacionada com a existência de quantidades de recursos limitados, pois à medida que a população cresce, a taxa de crescimento decresce por conta da diminuição dos recursos naturais disponíveis.

Muitas vezes é conveniente escrever esta equação na forma equivalente

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{L}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = r\,y\left(1 - \frac{y}{L}\right) \tag{7}$$

onde $L=r/a$. Como no modelo de Malthus, o parâmetro r é a taxa básica de crescimento ou velocidade específica de crescimento intrínseca, ou seja, a velocidade de crescimento na ausência de quaisquer fatores limitantes. O parâmetro L é chamado de *população limite*, *Capacidade Ambiental de Sustentação*, ou *Nível de Saturação*.

Análise qualitativa das Soluções.

Apesar de ser possível determinar a solução geral da equação (7), primeiramente vamos destacar os principais aspectos da solução da equação diferencial, sem resolvê-la, mediante argumentação geométrica. Esta é uma técnica importante, pois pode ser usada com equações mais complicadas, cujas soluções são mais difíceis de serem obtidas.

A figura 1 mostra o gráfico da taxa de crescimento dy/dt contra y, O gráfico é uma parábola que corta o eixo dos y em (0,0) e (L,0),com o vértice em (L/2, rL/4).

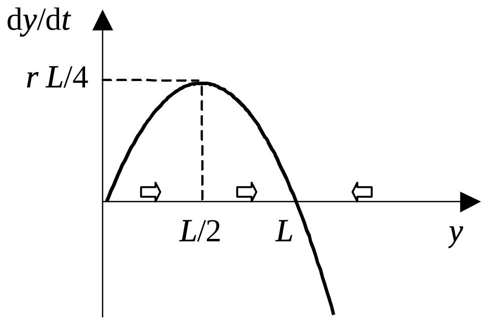


Figura 1 – dy/dt x y para dy/dt = r (1-y/L) y

Para 0<*y*<*L*, vemos que d*y*/d*t*>0, e *y* é uma função crescente de *t*; o que está indicado pela seta que aponta para a direita, nas vizinhanças do eixo dos *y*. Analogamente, se *y*>*L*, então d*y*/d*t*<0 e *y*(*t*) é decrescente, conforme está indicado pela seta que aponta para a esquerda. Se *y*=0,ou *y*=*L*, então d*y*/d*t*=0 e *y*(*t*) não se altera com o tempo. As soluções constantes $y=f_1(t)=0$ e $y=f_2(t)=L$ são as **soluções de equilíbrio**. Os pontos correspondentes, os pontos *y*=0 e *y*=*L*, sobre os eixos dos *y* são os **pontos de equilíbrio** ou **pontos críticos**.

Depois esboçaremos os gráficos das funções *y*(*t*) contra *t* para *t*>0, *y*>0 para diferentes valores iniciais *y*(0). Para isso é útil saber a relação entre as propriedades da curva de d*y*/d*t* contra *y* e as da curva de *y* contra *t*, para qualquer equação da forma

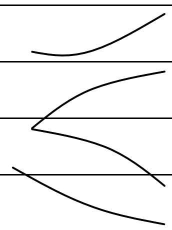
$$\frac{dy}{dt}=F(y). \tag{8}$$

A curva de *y*(*t*) contra *t* é crescente, ou decrescente, conforme d*y*/d*t* seja positiva ,ou negativa. A fim de investigar a concavidade, observe que se d*y*/d*t* for positiva, então *y* e *t* crescem, ou decrescem, simultaneamente. Por isso, se d*y*/d*t* for positiva e crescente, como função de *y*, também é crescente como função de *t* e a curva de *y* contra *t* é côncava para cima. Analogamente, se d*y*/d*t* for positiva e decrescente, então a curva de *y* contra *t* é côncava para baixo.

A situação se inverte se d*y*/d*t* for negativa, pois então *y* diminui quando *t* cresce e vice-versa. Portanto se d*y*/d*t* for negativa e crescente em função de *y*, então é decrescente em função de *t* e a curva de *y* é côncava para baixo. Analogamente, se d*y*/d*t* for negativa e decrescente, então a curva de *y* contra *t* é côncava para cima.

Tabela 1 - Relação entre as curvas de d*y*/d*t* e de *y* como função de *t*.

Se d*y*/d*t* [ou *F*(*y*)] for então	*y*(*t*) é
Positiva e crescente	Crescente e côncava para cima
Positiva e decrescente	Crescente e côncava para baixo
Negativa e crescente	Decrescente e côncava para baixo
Negativa e decrescente	Decrescente e côncava para cima



Estes resultados significam que as curvas das soluções da equação (7) devem ter a forma geral que aparece na figura 2, independentemente dos valores de *r* e de *L*. As retas horizontais são as soluções de equilíbrio $f_1(t)=0$ e $f_2(t)=L$. A figura 2 mostra que dy/dt é positiva e crescente para $0<y<L/2$, de modo que a curva de $y(t)$ é crescente e côncava para cima neste intervalo. Analogamente, dy/dt é positiva e decrescente no intervalo $L/2<y<L$, de modo que a curva de $y(t)$ é crescente e côncava para baixo neste intervalo. Desta maneira, as funções que principiam abaixo de $L/2$ têm uma curva em forma de S, ou curva sigmóide. Por outro lado, se $y>L$, dy/dt é negativa e decrescente, de modo que a curva de $y(t)$ é decrescente e côncava para cima.

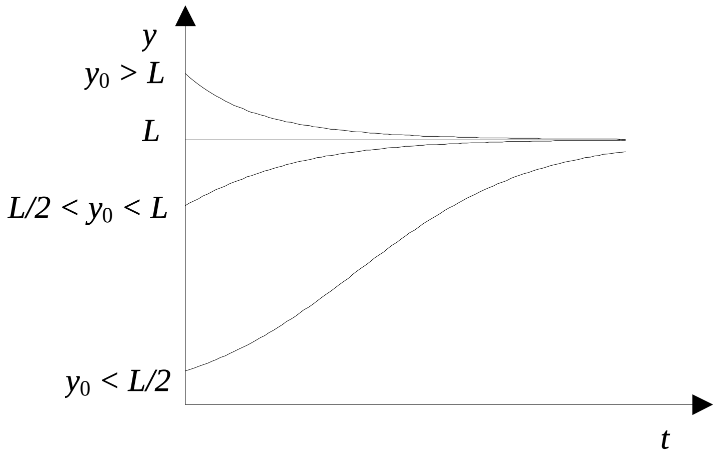


Figura 2 – Forma da solução para diferentes condições iniciais.

O teorema fundamental da existência e unicidade garante que duas soluções diferentes nunca passam pelo mesmo ponto. Por isso, embora as soluções se aproximem da solução de equilíbrio $N=L$ quando $t\to\infty$, não atingem este valor em qualquer instante finito de tempo. Uma vez que L é o limite superior do qual se aproximam as populações crescentes, menores que L, que nunca o excedem. Por isso é natural denominar o parâmetro L como o **nível de saturação** ou a **capacidade ambiental de saturação** da espécie dada.

A comparação entre a solução exponencial do modelo de Malthus e as soluções expressas na figura 2, mostra que as soluções da equação (7) não-linear são bastantes diferentes das soluções da equação (2) linear, pelo menos no que se refere a grandes valores de t. Independentemente do valor de L, isto é , independentemente de o termo não-linear ser pequeno na equação (7), as soluções desta equação se aproximam de um valor finito quando $t\to\infty$, enquanto as soluções da equação (2) crescem (exponencialmente), sem limite. Assim, mesmo um pequeno termo não-linear na equação diferencial tem um efeito decisivo sobre a solução, para grandes valores de *t*.

A Expressão da Solução do Modelo.

Em muitas situações é suficiente ter a informação qualitativa sobre a solução $y(t)$ da equação (7) que aparece na figura 2. Acentuamos que esta informação foi conseguida, na sua totalidade, pelo gráfico de d*y*/d*t* contra *y* e sem se resolver a equação diferencial (6). No entanto, se quisermos ter uma informação mais completa sobre o crescimento logístico – por exemplo, se quisermos saber o valor da população num certo instante de tempo – devemos resolver a equação (7) com a condição inicial. Desde que $y \neq 0$ e $y \neq L$, podemos escrever a equação (7) na forma

$$\frac{dy}{(1-y/L)y} = r\,dt \tag{9}$$

Com a expansão em frações parciais do primeiro membro temos

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1/L}{1-y/L}\right)dy = r\,dt\,. \tag{10}$$

Depois, integrando os dois membros, temos

$$\ln|y| - \ln\left|1-\frac{y}{L}\right| = r\,t + c \tag{11}$$

onde **c** é uma constante arbitrária a ser determinada pela condição inicial $y(0)=y_0$.
Já observamos que se $0<y_0<L$, então $y(t)$ fica deste intervalo para qualquer tempo. Por isso, podemos omitir as barras indicadoras de módulo na equação (11) e tomar a exponencial dos dois membros, o que dá

$$\frac{y}{1-(y/L)} = C\,e^{r\,t} \tag{12}$$

onde C = e^c. A fim de obedecer à condição inicial $y(0)=y_0$ devemos escolher $C=y_0/[1-(y_0/L)]$ Com este valor para C na equação (9) a resolução em *y* dá

$$y(t) = \frac{y_0 L}{y_0 + (L-y_0)e^{-r\,t}}\,. \tag{13}$$

Deduzimos a equação (13) com a hipótese $0<y_0<L$. Se $y_0>K$, esta equação continua a ser válida como solução. Finalmente, observamos que a equação 13 também contém as soluções de equilíbrio $y=f_1(t)= 0$ e $y=f_2(t) = L$, correspondentes às condições iniciais $y_0=0$ e $y_0= L$, respectivamente.

Pelo exame da solução (13) confirmam-se todas as conclusões qualitativas que foram feitas pela análise geométrica. Em particular, se $y_0 =0$, então a equação (13) exige $y(t)=0$ para todos os t. Se $y_0 > 0$, e se fizermos $t \to \infty$ na equação (13) obteremos

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{y_0\, L}{y_0} = L$$

Assim para cada $y_0>0$ a solução se aproxima assintoticamente (na realidade, exponencialmente) da solução de equilíbrio $y=f(t)=L$ quando $t \to \infty$. Por isso dizemos que a solução constante $f(t)=L$ é uma solução **assintoticamente estável** da equação (7), ou que o ponto $y=L$ é um ponto de equilíbrio ou um ponto crítico assintoticamente estável. O que significa que depois de um intervalo de tempo dilatado a população está próxima do nível de saturação L, independentemente do tamanho da população inicial, desde que seja positivo.

Por outro lado, a situação da solução de equilíbrio $y=f_1(t) = 0$ é bastante diferente. Mesmo populações, que principiam muito perto de zero, crescem quando t cresce e, conforme vimos, tendem para L quando $t \to \infty$. Dizemos então que $f_1(t) = 0$ é uma **solução de equilíbrio instável** ou que $y=0$ é um ponto de equilíbrio, ou um ponto crítico, instável. Isto significa que a única forma de garantir que a solução permaneça nula é garantir que o seu valor seja *exatamente* igual a zero.

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) – O caso Discreto.

O método dos mínimos quadrados é um método numérico que permite que se ajuste uma equação cujos parâmetros são desconhecidos de tal forma que ela melhor aproxime um conjunto de dados numéricos. No presente trabalho duas equações serão ajustadas: a equação (4) do modelo de Malthus cujos parâmetros são y_0 e r; e a equação (13) do modelo de Verhulst cujos parâmetros são y_0, r e L. Essas equações serão comparadas com a população brasileira a partir de dados publicados na Internet pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística).

O problema do ajuste de curvas no caso em que temos uma tabela de *m* pontos (x_1,y_1), $(x_2,y_2),...,(x_m,y_m)$ com x_1, x_2, ..., x_m pertencentes a um intervalo $[a,b]$, consiste em, escolhidas *n* funções $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$, contínuas em $[a,b]$, obter *n* constantes $a_1, a_2, ..., a_n$ tais que a função

$$j\,(x)=a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + ...+ a_n g_n(x) \qquad (13a)$$

se aproxime ao máximo dos pontos.

Este é um modelo matemático *linear* porque os coeficientes a determinar, $a_1, a_2, ..., a_n$, aparecem linearmente embora as funções $g_1(x)$, $g_2(x),...,g_n(x)$ possam ser funções não lineares de *x*.

Determinadas as funções $g_1(x)$, $g_2(x),...,g_n(x)$ temos de estabelecer o conceito de proximidade entre a função $j\,(x)$ e os dados. A idéia básica é impor que o desvio $d_i=(y_i-j\,(x_i))$ seja mínimo para $i=1, 2, 3, ..., m$. Existem outras formas de impor que os desvios sejam mínimos; o desenvolvimento apresentado aqui é o desenvolvimento básico do MMQ.

O número que mede a distância entre a curva de equação conhecida $j(x)$ e os dados obtidos experimentalmente é definido como:

$$EQ=[y_1-j(x_1)]^2 +[y_2-j(x_2)]^2 + \dots +[y_m-j(x_m)]^2 \qquad (14)$$

Pode-se observar a partir da equação (14) que, se a função $j(x)$ passar por todos os valores experimentais, o valor de *EQ* será zero. Por ser a soma de números positivos, *EQ* será sempre um valor positivo. Apesar de não estar explícito na equação (14), é importante ressaltar que se os coeficientes a_1, a_2, ..., a_n, forem desconhecidos, então *EQ* é função desses parâmetros, e apenas deles. Assim podemos escrever:

$$EQ = EQ(a_1, a_2, ..., a_n) \qquad (15)$$

Assim o Método dos Mínimos Quadrados baseia-se na idéia de determinar os coeficientes a_1, a_2, ..., a_n, de tal forma que *EQ* seja mínima. O ponto de mínimo pode ser determinado usando-se um princípio básico do Cálculo de Várias Variáveis, que é a determinação do ponto em que o gradiente de *EQ* é zero, assim podemos escrever:

$$\nabla EQ(a_1, a_2, \mathbf{L}, a_n) = 0 \qquad (16)$$

Assim:

$$EQ = \sum_{k=1}^{m}[y_k - j\ (\mathrm{x}_k)]^2 = \sum_{k=1}^{m}[y_k - a_1 \mathrm{g}_1(\mathrm{x}_k) - a_2 \mathrm{g}_2(\mathrm{x}_k) - \dots a_n \mathrm{g}_n(\mathrm{x}_k)]^2 \tag{17}$$

Substituindo-se a equação (17) na equação (16), temos que cada derivada parcial será da forma:

$$\frac{\partial EQ}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{m}[y_k - a_1 g_1(x_k) - \dots - a_n g_n(x_k)][g_j(x_k)] = 0,\ j\text{=1,2,...,}n. \tag{18}$$

QUE POR SUA VEZ PODE SER ESCRITO NA FORMA:

$$a_1 \sum_{k=1}^{m} g_1(x_k) g_j(x_k) + \dots + a_n \sum_{k=1}^{m} g_n(x_k) g_j(x_k) = \sum_{k=1}^{m} y_k g_j(x_k),\ j\text{=1,2,...,}n. \tag{19}$$

Particularizando a equação (18) para cada j=1, 2, .. ,n, temos

$$\begin{aligned}
j\text{=1} &\Rightarrow a_1 \sum_{k=1}^{m} g_1(x_k) g_1(x_k) + \dots + a_n \sum_{k=1}^{m} g_n(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{m} y_k g_1(x_k) \\
j\text{=2} &\Rightarrow a_1 \sum_{k=1}^{m} g_1(x_k) g_2(x_k) + \dots + a_n \sum_{k=1}^{m} g_n(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{m} y_k g_2(x_k) \\
&\vdots \\
j\text{=n} &\Rightarrow a_1 \sum_{k=1}^{m} g_1(x_k) g_n(x_k) + \dots + a_n \sum_{k=1}^{m} g_n(x_k) g_n(x_k) = \sum_{k=1}^{m} y_k g_n(x_k)
\end{aligned} \tag{20}$$

Que é um sistema linear nas incógnitas a_1, a_2, ..., a_n. O sistema linear pode ser escrito na forma matricial Aa =b. Assim o MMQ na forma descrita aqui consiste nos seguintes passos:

1. A partir das funções $g(x)$ e das abcissas x, montar a matriz A cujos coeficientes a_{ij} são dados pela expressão

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_j(x_k) g_i(x_k) = a_{ji} \ \text{(ou seja, A é simétrica)} \tag{21}$$

2. Incluir as ordenadas y para calcular o vetor dos termos independentes b pela expressão:

$$\mathrm{b}_i = \sum_{k=1}^{m} y_k g_i(x_k) \tag{22}$$

3. Resolver o sistema linear Aα=b para determinar os coeficientes desejados.

A Calibração do Modelo de Malthus.

A equação (3) não está na forma padrão para a aplicação do MMQ, entretanto, como $y(t)$ é um número positivo para todo t, podemos aplicar o logaritmo na igualdade de onde se obtém a seguinte expressão:

$$ln(y(t)) = ln(y_0) + r\,t \tag{23}$$

Tal que fazendo-se

$$z = ln(y) \tag{24}$$

$$a_1 = ln(y_0)$$

$$g_1(t)=1$$

$$a_2 = r$$

$$g_2(t)=t$$

A equação (23) pode ser escrita na forma indicada ela equação (13a) onde se aplica o MMQ.

Para esses valores as equações (20) se reduzem ao sistema

$$m\,a_1 + \sum_{k=1}^{m} t_k\, a_2 = \sum_{k=1}^{m} z_k \tag{24a}$$

$$\sum_{k=1}^{m} t_k\, a_1 + \sum_{k=1}^{m} t_k^2\, a_2 = \sum_{k=1}^{m} z_k t_k$$

Nas incógnitas α_1 e α_2. Esse sistema pode ser resolvido fazendo-se:

$$\bar{t} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t_k \tag{24b}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} z_k$$

$$a_2 = \frac{\sum_{k=1}^{m} z_k (t_k - \bar{t})}{\sum_{k=1}^{m} (t_k - \bar{t})^2}$$

$$a_1 = \bar{z} - a_2\,\bar{t}$$

Assim a aplicação do MMQ ao modelo de Malthus segue os seguintes passos:

1. Tira-se o logaritmo das ordenadas *y* dos dados;
2. Calculam-se α_1 e α_2 pelas fórmulas (24b);

3. Calculam-se os parâmetros do modelo invertendo-se as expressões correspondentes nas equações (24):

$$y_0 = e^{a_1} \qquad (25)$$
$$r = a_2$$

A aplicação dessa metodologia aos dados do apêndice leva aos seguintes valores de taxa de crescimento *r* e população inicial y_0:

$$y_0 = y(1500) = 8126 \text{ habitantes} \qquad (26)$$
$$r = 0{,}01968 \text{ ano}^{-1}$$

A Calibração do Modelo de Verhulst

A equação (13) dada pelo modelo de Verhulst não pode ser ajustada com o uso direto do MMQ. Para a calibração desse modelo supor-se-á que o parâmetro y_0 é muito próximos ao do modelo de Malthus, dessa forma o problema se reduz à determinação de dois parâmetros, *r* e *L*. Pode-se também aproveitar a idéia de minimizar o quadrado do desvio, como no MMQ.

As equações serão bastante simplificadas partindo-se da equação (11). Fazendo-se t=0 tem-se que

$$c = \ln y_0 - \ln\left(1 - \frac{y_0}{L}\right) \qquad (27)$$

e, isolando-se *t* tem-se:

$$t = t(y) = \frac{1}{r}\left[\ln y - c - \ln\left(1 - \frac{y}{L}\right)\right] \qquad (28)$$

Assim pode-se definir o quadrado do desvio *EQ* como:

$$EQ = \sum_{k=1}^{m}\left[t_k - t(y_k)\right]^2 \qquad (29)$$

Com L como único parâmetro a determinar tem-se que:

$$\frac{\partial EQ}{\partial r} = 0 \qquad (30)$$

$$\frac{\partial EQ}{\partial L} = 0$$

Que leva ao sitema de equações:

$$\sum_{k=1}^{m}(2c+rt_k)\ln y_k - c(c+rt_k) - \ln^2(y_k) + (2\ln y_k - 2c - rt_k)\ln\left(1-\frac{y_k}{L}\right) - \ln^2\left(1-\frac{y_k}{L}\right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{y_k}{L-y_k}\left\{\ln\left(1-\frac{y_k}{L}\right) - \ln y_k + c + r\,t_k\right\} = 0 \tag{31}$$

Os valores de r e L que anulam os somatórios (31) são os parâmetros desejados.

Finalmente usando-se

$$y_0 = y(1500) = 8126 \text{ habitantes} \tag{32}$$

E os dados históricos apresentados no apêndice, o valor de L é:

$$r = 0{,}01973 \text{ ano}^{-1} \tag{33}$$

$$L = 2\ 490\ 200\ 000 \text{ habitantes}$$

Finalmente os dados indicam que a população limite do Brasil está em torno de 2,5 bilhões de habitantes. Uma população maior que a população da China, país mais populoso atualmente.

A calibração do modelo de Verhulst, em comparação com o modelo de Malthus, é bem mais complexa, levando à necessidade da solução de um sistema algébrico não-linear. A complexidade da calibração do modelo de Verhulst leva à necessidade do uso do computador e de métodos numéricos para a determinação dos parâmetros.

Bibliografia.

1. Boyce, William E. & DiPrima, Richard C. "Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno" Editora Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, RJ - 1998.
2. Kingsland, S. E. “Modeling Nature: Episodes in the History of Population Ecology.” University of Chicago Press, Chicago, IL - 1985
3. Kot, Mark. “Elements of Mathematical Ecology” Cambridge University Press, New York – 2001.
4. Ruggiero, Márcia A. Gomes e Lopes, Vera Lúcia da Rocha "Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais" Editora Makron Books, São Paulo, SP - 1996
5. Santee, Donald Mark “Modelos Matemáticos de Caça e Pesca” Anais do Simpósio de Matemática – XIII Jornada de Matemática de Catalão, Catalão – 2002
6. Stauffer, R. C. “Ecology in the long manuscript version of Darwin’s Origin of Species and Linnaeus Oeconomy of Nature”. Anais da Sociedade Americana de Filosofia, v.104, pp.235-241 - 1960
7. Worster, D., “Nature’s Economy: A History of Ecological Ideas”. Cambridge University Press, New York - 1994.
8. IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em:
   http://www1.ibge.gov.br/home/populacao/censohistorico/1550_1870.shtm
   _________/1872_1920
   ________/1940_1996, capturado em 19 Mar. 2003

Apêndice - Dados Censitários e Históricos do IBGE.

Ano	População
1550	15000
1576	17100
1583	57000
1600	100000
1660	184000
1690	242000
1700	300000
1766	1500000
1770	2502000
1775	2666000
1776	1788480
1776	1900000
1776	2700000
1780	2523000
1780	2841000
1785	3026000
1790	3225000
1795	3435000
1798	2888078
1798	3569000
1798	3800000
1798	4000000
1800	3250000
1800	3660000
1805	3900000
1808	2424463
1808	4000000
1808	4051000
1810	3617900
1810	4000000
1810	4155000
1815	2860525
1815	4427000
1817	3300000
1817	4541000
1819	4396132
1819	4657000
1820	4717000
1823	3960866
1823	4899000
1825	5000000
1825	5025000
1827	3758000
1827	5154000
1830	5340000
1830	5354000
1834	3800000
1834	5690000
1835	5777000

1840	6233000
1845	6725000
1850	8000000
1850	7256000
1854	7677800
1854	7711000
1855	7829000
1860	8448000
1865	9114000
1867	11780000
1867	9396000
1868	11030000
1868	9539000
1869	10415000
1869	9686000
1870	9834000
1872	9930478
1890	14333915
1900	17438434
1920	30635605
1940	41236315
1950	51944397
1960	70070457
1970	93139037
1980	119002706
1991	146825475
1996	157070163
2002	175382088