$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - IAD236 - setembro de 2007

1. Considere o seguinte conjunto: $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbf{R};\ \text{f uma função contínua}\}$, munido das operações de adição e multiplicação por escalar, dadas por: $\forall f, g \in C[a,b]$ e $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \forall t \in [a,b] \quad \text{e} \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t), \forall t \in [a,b]$$

Demonstre que $C[a,b]$ é um espaço vetorial.

2. Considere o conjunto S definido por
(a) $S = \{v \in R^2; v^T = \alpha(1,2), \alpha \in \mathbf{R}\}$.
(b) $S = \{v \in R^2; v^T = \alpha(1,2) + (3,1), \alpha \in \mathbf{R}\}$.
S é um espaco vetorial? Interprete geometricamente este conjunto.

3. Caracterize geometricamente os subconjuntos do R^3 que são subespaços vetoriais.

4. O conjunto de todos os polinomios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + +a_nx^n$, onde n é um número natural qualquer, é um espaço vetorial?

5. Idem, considerando os polinomios de grau igual a um dado número natural n. (Por exemplo, o conjunto dos polinomios de grau exatamente 7.)

6. Demonstre que o conjunto das matrizes $m \times n$ de elementos reais, denotado por $M_{m\times n}(\mathbf{R})$, é um espaço vetorial sobre $\mathbf{R}$.

7. Em cada caso abaixo, determine se o conjunto $V = R^2$, com as operações de adição e multiplicação definidas conforme as regras indicadas abaixo, é ou não um espaco vetorial. Se V não for um espaco vetorial, indique um dos axiomas da definição que é violado.
(a) $(x_1, x_2) +_a (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0), \alpha \cdot_a (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$.
(b) $(x_1, x_2) +_b (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \alpha \cdot_b (x_1, x_2) = (\alpha x_1, 0)$.

8. Seja $V = R^3$. Verifique se W é ou não subespaco vetorial de V, onde:
(a) $W = \{(x,y,z); x,y,z \in \mathbf{R}\ \mathrm{e} z = 0\}$; (b) $W = \{(x,y,z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

9. Seja o intervalo $I = [0,1]$. Verifique se são subespaços vetoriais de $C(I)$ onde $C(I)$ é o espaço vetorial das funções reais contínuas definidas em I.
(a) $W = \{f \in C(I); f(0) = 0\}$; (b) $W = \{f \in C(I); \int_0^1 f(t)dt = 0\}$.

10. Seja V o espaço vetorial das matrizes quadradas $n\times n$, $M_n(\mathbf{R})$. Verifique se W é ou não um subespaço vetorial de V, onde:
(a) W é o conjunto das matrizes simétricas: $W = \{A \in M_n(\mathbf{R}); A^t = A\}$.
(b) $W = A \in M_n(\mathbf{R}); AT = TA$ onde T é uma matriz dada do espaço $M_n(\mathbf{R})$.
(c) W é o conjunto das matrizes anti-simétricas: $W = \{A \in M_n(\mathbf{R}); A^t = -A\}$.

11. Verifique se o seguinte subconjunto S das matrizes de ordem n é um subespaço vetorial: $S = \{A \in M_n(\mathbf{R}); A^2 = A\}$ (S é o conjunto das matrizes idempotentes).

12. Seja $A = (aij) \in M_n(\mathbf{R})$; definimos traço da matriz A, que denotamos por $tr(A)$, da seguinte forma: $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Mostre que o conjunto $S = \{A \in M_n(\mathbf{R}); tr(A) = 0\}$ é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbf{R})$.

13. Seja V em espaco vetorial. Se $\{U_i\}_{i\in J}$ é uma familia de subespacos vetoriais de V, mostre que o conjunto $S = \cap_{i\in J} U_i$ também é um subespaco vetorial de V.

14. Mostre que a união de dois subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial é também um subespaço vetorial se e somente se um dos subespaços está contido no outro.

15. Considere o espaco vetorial real $C([-a,a])$ com $a > 0$. Mostre que os subconjuntos abaixo são subespaços vetoriais de $C([-a,a])$.

$$S = \{f \in C([-a,a]); f(-x) = f(x)\ \forall x \in [-a,a]\} \text{ e}$$

$$W = \{f \in C([-a,a]); f(-x) = -f(x)\ \forall x \in [-a,a]\}$$

16. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbf{F}$. Mostre que $Z = V \times W = \{(v,w); v \in V e w \in W\}$ munido das seguintes operações:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \text{ e } \alpha(v,w) = (\alpha v, \alpha w); \alpha \in \mathbf{F},$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbf{F}$.

17. Dê um exemplo de três subespaços vetoriais não-triviais U, V e W de R^3 tais que $U \cap V = U \cap W = V \cap W, U + V = U + W = V + W = R^3$, porém $U \neq V$, $U \neq W$ e $V \neq W$.

18. Encontre o conjunto solução S do sistema linear homogêneo:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 4y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & z & = & 0 \end{array}$$

(a) Mostre que o conjunto S é um subespaço de R^3. Qual é a representação geométrica do conjunto S?
(b) Dado o subespaço $U = \{u \in \mathbf{R}^3; u_1 - u_2 + u_3 = 0\}$ determine sua interseção com o subespaço S. Qual é a representação geométrica do conjunto U?

19. Mostre que $M_n(\mathbf{R}) = S \oplus W$ onde S é o subespaço das matrizes simétricas e W o subespaço das matrizes anti-simétricas.

20. Seja U o subconjunto de $C([-a,a])$ composto pelas funções pares e W o subconjunto composto pelas funções ímpares.
(a) Demonstre que U e W são subespaços vetoriais de $C([-a,a])$.
(b) Encontre $U \cap W$.
(c) Mostre que $C([-a,a]) = U \oplus W$ (Sugestão: mostre que cada função $f \in C([-a,a])$ pode ser escrita de maneira única como a soma de uma função par e uma função ímpar).

21. Dado o subespaço: $V = \{x \in R^3; x_1 + 2x_2 + x_3 = 0e - x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$, determine um subespaço W do R^3 tal que $R^3 = V \oplus W$. Este subespaço é único?

22. Para qual valor de k o vetor $u = (1,-2,k) \in R^3$ será uma combinação linear dos vetores $v = (3,0,-2)$ e $w = (2,-1,-5)$?

23. Dar um sistema de geradores (ou seja, uma descrição paramétrica) para cada um dos seguintes subespaços do R^3:
(a) U = {(x,y,z);x-2y = 0}; (b) V = {(x,y,z);x + z = 0 e x-2y = 0};
(c) W = {(x,y,z);x + 2y - 3z = 0}; (d) $U \cap V$; (e) $V + W$.

24. Mostre que os dois conjuntos: $\{(1,-1,2),(3,0,1)\}$ e $\{(-1,-2,3),(3,3,-4)\}$ geram o mesmo subespaço de R^3.

25. Sejam U, V e W os seguintes subespaços do R^3: $U = \{(x,y,z); x = z\}$; $V = \{(x,y,z); x = y = 0\}$ e $W = \{(x,y,z); x + y + z = 0\}$. Verifique que $U + V = R^3$, $U + W = R^3$ e $V + W = R^3$. Em algum dos casos a soma é direta? Interprete geometricamente.

26. Seja U o subespaço do R^3 gerado pelo vetor $u = (1,0,0)$ e W o subespaço gerado pelos vetores: $w = (1,1,0)$ e $z = (0,1,1)$. Mostre que $R^3 = U \oplus W$.

27. Mostrar que os polinômios $1-t$, $(1-t)^2$, $(1-t)^3$ e 1 geram o espaço vetorial dos polinômios de grau menor do que ou igual a 3.

28. Encontre condições sobre a, b e c de modo que $(a,b,c) \in R^3$ pertença ao subespaço gerado por $u=(2,1,0)$, $v=(1,-1,2)$ e $w=(0,3,-4)$. Isto equivale a encontrar a descrição implícita (via equações) do subespaço gerado por u, v, e w.

29. Considerando os vetores do R^3: $u=(1,-3,2)$ e $v=(2,-1,1)$.
(a) Escreva $(1,7,-4)$ como combinação linear de u e v.
(b) Para que valor de k, o vetor $(1,k,5)$ é uma combinação linear de u e v?
(c) Qual a condição sobre a, b e c de modo que (a,b,c) seja combinação linear de u e v?

30. Considere os seguintes subespaços de R^4: $U=\{(u_1,u_2,u_3,u_4) \in R^4; u_1+u_2=0 \text{ e} u_3-u_4=0\}$ e $W=\{(w_1,w_2,w_3,w_4) \in R^4; w_1-w_2-w3+w_4=0\}$.
(a) Determine $U \cap W$.
(b) Determine os elementos que geram o subespaço $U \cap W$.
(c) Determine os elementos que geram o subespaço $U+W$.
(d) $U+W$ é soma direta? Justifique.

31. Considere o subespaço vetorial W formado pelas matrizes de $M_2(\mathbf{R})$, simétricas. Mostre que as matrizes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

geram o subespaço W.

32. Para cada conjunto abaixo, verifique se é linearmente independente.
(a) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,2,5)\} \subset R^3$.
(b) $\{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\} \subset R^3$.
(c) $\{1, x-1, x^2+2x+1, x^2\} \subset \mathbf{P}^4(\mathbf{R})$.

33. Se u, v e w são vetores de um mesmo espaço vetorial V tais que $u \in [w]$ e $v \in [w]$, mostre que $\{u,v\}$ é linearmente dependente.

34. Seja V um espaço vetorial real. Se $\{v_1,v_2,v_3\}$ é um conjunto linearmente independente em V, mostre que que o conjunto $\{v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3\}$ também é linearmente independente em V.

35. Determine m e n para que os conjuntos de vetores de R^3 abaixo, seja LI:
(a) $\{(3,5m,1),(2,0,4),(1,m,3)\}$;
(b) $\{(6,2,n),(3,m+n,m-1)\}$.

36. Seja W o subespaço de $M_{3\times 2}(\mathbf{R})$ gerado pelas seguintes matrizes

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ pertence a W? Justifique.

37. Se os vetores $v_1, \cdots, v_m$ geram o espaço vetorial V, então qualquer conjunto com mais de m vetores é L.D.

38. Se os vetores $v_1, \cdots, v_m$ geram o espaço vetorial V e os vetore $u_1, \cdots, u_n$ são L.I., então $n \leq m$.

39. Considere o subespaço W de R^4 gerado pelos seguintes vetores: $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$, $v_3 = (-2, 2, 1, 1)$ e $v_4 = (1, 0, 0, 0)$. Pede-se:
(a) exiba uma base para W. Qual é a dimensão de W?
(b) o vetor $u = (2, -3, 2, 2) \in W$? Justifique.

40. Mostre que as matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base para $W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}); A^t = A\}$.

41. Encontre uma base para o subespaço $W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}); A^t = -A\}$.

42. O conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 1, 1)\}$ é uma base para R^3?

43. Determine uma base de R^4 que contenha os seguintes vetores: $v_1 = (1, 1, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 1, 2, 1)$.

44. Determine uma base e a dimensão do espaço solução de cada um dos seguintes sistemas lineares homogêneos:

$$(a)\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 3x + 0.5y = 4 \end{cases} ; \quad (b)\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases} ; \quad (d)\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 2y + 5z + t = 0 \end{cases}$$

45. Encontre uma base e dê a dimensão do subespaço W de R^4, onde $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4; x_1 - 2x_2 = 0 \text{ e } x_1 - 3x_2 + x_4 = 0\}$.

46. No espaço vetorial R^3, consideremos os seguintes subespaços: $U = \{(x_1, x_2, x_3); x_1 = 0\}$, $W = \{(x_1, x_2, x_3); x_2 - 2x_3 = 0\}$ e $W = [(1, 1, 0), (0, 0, 2)]$. Determine uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços: U, V, W, $U \cap V$, $V + W$, $U + V + W$.

47. Determine os valores de $a \in R$ para que o seguinte conjunto seja uma base de R^3: $B = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$.

48. Complete: "Se dim$V$ = 7, U e W são subespaços de V tais que dim$U$=4 e dim$W$=5, então $\ldots \leq \dim(U \cap W) \leq \ldots$"
"Se U e V são subespaços de W tais que $U \neq V$, dim$U$=dim$V$=4, dim$W$=6, então $\ldots \leq \dim(U + V) \leq \ldots$ e $\ldots \leq \dim(UV) \leq \ldots$".

49. Se V e W são subespaços vetoriais do R^3 tais que dim(V)=1, $\dim(W) = 2$ e V não está contido em W, mostre que $R^3 = V \oplus W$.

50. Seja $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base para o espaço vetorial V. Mostre que $C = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ é também uma base para V.

51. Considere o seguinte subespaço de $P^3([-1, 1])$, $S = \{p \in P^3([-1, 1]); p(-1) = 0 \text{ e } p'(1) = 0\}$. Qual é a dimensão de S? Encontre uma base para S.

52. Encontre um subconjunto de $\{(2, -3, 1), (1, 4, -2), (-8, 12, -4), (1, 37, 17), (-3, -5, 8)\}$ que seja uma base para o R^3.