$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - IAD236 - outubro de 2007

COORDENADAS E MUDANÇA DA BASE

1. Dê as coordenadas do vetor v com respeito à base B, em cada caso:
(a) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, 2, 1)$ e $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$.
(b) $V = P_2$, $v(t) = 2 + t^2$ e $B = \{2, 1 - t, 1 - t^2\}$.
(c) $V = P_2$, $v(t) = 3 - 2t - t^2$ e $B = \{1, 1 - t, (1 - t)^2\}$.
(d) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $v = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
(e) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (x, y, z)$ e $B = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$.
(f) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (x, y, z)$ e $B =$ base canônica.

2. Considere $V = \mathbb{R}^3$ com a base ordenada $B = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$. Determinar o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ cujas coordenadas em relação a B são 2, -3 e 4.

3. Considere $V = P_2$ com a base ordenada $B = \{3, 2t, -t^2\}$. Determinar o vetor $p \in P_2$ cujas coordenadas em relação a B são 2, -2 e 3.

4. Seja $B = \{u, v, w\}$ uma base ordenada de um espaço vetorial V.
(a) Mostre que $D = \{u, u + v, -u + v + w\}$ é base de V.
(b) Se um vetor q de V tem coordenadas 2 -1 e 1 em relação à base B, quais são as coordenadas de q em relação à base D?

5. Considere as seguintes bases: $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $D = \{w_1, w_2, w_3\}$ do espaço $\mathbb{R}^3$ tais que $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 2, 3)$ e $u_3 = (0, 2, -1)$, $w_1 = (1, 1, 0)$, $w_2 = (1, -1, 0)$ e $w_3 = (0, 0, 1)$
(a) Encontre as coordenadas $[v]_B$ e $[v]_D$ de $v = (3, 5, -2)$ em relação a cada base.
(b) Construa a matriz P cujas colunas são respectivamente, as coordenadas dos vetores u_i em relação à base D e verifique que $[v]_D = P[v]_B$.

6. Encontre a matriz P definida no exercicio 5, no caso em que B é a base definida no exercicio 1 e) e D é a base canônica. Verifique a validade da relação $[v]_D = P[v]_B$, neste caso.

7. Encontre a matriz P descrita no exercicio 5, quando $V = P_2$, $v(t) = 2+t^2$, a base $B = \{2, 1-t, 1-t^2\}$ e D é a base canônica. Verifique a validade da relação $[v]_D = P[v]_B$, neste caso.

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

8. Considere as transformações lineares T, S e H em $F(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definidas por; $T(x, y) = (x, 2y)$, $S(x, y) = (y, x + y)$ e $H(x, y) = (0, x)$. Mostre que T, S e H são L.I.

9. Para cada uma das funções do exercicio anterior, determine o conjunto imagem de E, onde E é a base canônica do domínio $\mathbb{R}^2$. Cada conjunto imagem obtido é uma base do contradomínio $\mathbb{R}^2$?

10. Dadas T e S em $F(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definidas por: $T(x, y) = (x, x - y)$ e $S(x, y) = (x + y, 2x)$ determine as funções $T + S$, $T \circ S$, $S \circ T$, T^2 e S^2, se existirem, justificando.

11. Considere as funções $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $T(x, y) = x+2y$ e $S(x) = 2x$. Determine $S \circ T$ e $T \circ S$, se possível. A função $T + S$ pode ser definida? Justifique.

12. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dada por $T(x, y) = (x, -y)$ e K é o triângulo de vértices $(-1, 4)$, $(3, 1)$ e $(2, 6)$ dê a imagem de K e represente graficamente. Qual é a interpretação geométrica de T?

13. Determine os vetores obtidos pela reflexão em relação à reta $y = -x$, dos vetores da base canônica do plano (use geometria analítica). Usando a noção de base e a interpretação geométrica da reflexão qual o vetor obtido para a reflexão de um elemento arbitrário (x, y) do plano? Defina uma função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que represente esta reflexão.

14. Repita o procedimento do exercicio anterior para definir a projeção $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de um elemento do espaço $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy. Interprete geometricamente, determine o núcleo $Ker(P)$ e ainda se P transforma base do domínio em base do contradomínio.

15. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ pode transformar uma base do domínio em uma base do contradomínio? E se for $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, como relacionar com as dimensões m e n? Justifique.

16. Em cada caso, dê exemplos, quando possível, de transformações lineares tais que:
(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sobrejetora;
(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $Ker(T) = (0, 0, 0)$;
(c) $T : \mathbb{R}^3 \to P_3$ sobrejetora;
(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $Im(T) = \{(0, 0)\}$;
(e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $Ker(T) = \{(x, y); x = y\}$;
(f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $Im(T) = \{(x, y, z); z + x = 0\}$

17. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n e seja $T : V \to V$ linear tal que $Im(T) = Ker(T)$. Mostre que n é par. Dê exemplo de uma transformação com estas características.

18. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se $dim(V) > dim(W)$, prove que existe um vetor não nulo v em V tal que $T(v) = 0$, isto é, T não é injetora.

19. Seja $T : V \to W$ linear injetora. Mostre que T transforma conjuntos LI em conjuntos LI.

20. Se V e W são finitamente gerados com $dim(V) = dim(W)$ e se $T : V \to W$ é linear injetora, mostre que T transforma uma base de V numa base de W. Dê contra-exemplos ilustrando os casos em que pelo menos uma das hipóteses não se verifica.

21. Determine um operador linear de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ cuja imagem tenha dimensão 2.

22. Determine um operador de $\mathbb{R}^4$ tal que o núcleo e a imagem tenha a mesma dimensão.

23. Determine um operador de $P_3(\mathbb{R})$ cujo núcleo tenha dimensão 1.

24. Dê a matriz do operador linear T de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ definido por $T(A) = KA$, em relação à base canônica, sendo $K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

25. A matriz relativa às respectivas bases canônicas, da transformação linear $L : P_2 \to Diag_{2\times2}$ é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Determine $L(1)$, $L(t)$ e $L(t^2)$;
(b) Determine $L(a + bt + ct^2)$.

26. Dar exemplos, em cada caso, de operadores lineares em $\mathbb{R}^2$ tais que;
(a) $T \circ T = 0$ mas $T \neq 0$
(b) $T \circ T = T$ mas $T \neq 0$ e $T \neq Id$.

27. Considere os operadores T e L em $\mathbb{R}^2$ definidos por $T(x, y) = (x-y, x)$ e $L(x, y) = (x, 0)$. Determine:
(a) $T \circ L$ (b) $L \circ T$ (c) T^2 (d) L^2

28. Mostre que a transformação linear $T : P_2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(p) = (p(0), p(1), p(-1))$ é injetora e sobrejetora. Dê a matriz de T em relação às respetivas bases canônicas dos espaços.

29. Seja $B = \{u, v, w\}$ uma base ordenada de um espaço vetorial V e sejam T e L operadores lineares dados por; $T(u) = u - v$, $T(v) = u + w$, $T(w) = v$, $L(u) = 2u + w$, $L(v) = u$ e $L(w) = v - 3u$. Determine as matrizes de cada um dos operadores T, L, $T \circ L$, $L \circ T$ e T^2 em relação à base B.

30. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita n e uma transformação linear $T : V \to V$ com a seguinte condição: $(\star)$ $T(Tv) = 0$ implica que $T(v) = 0$. Mostre que $Im(T) \cap Ker(T) = \{0\}$. Reescreva a condição $(\star)$ em termos dos nucleos de T^2 e de T.

31. Seja L um operador linear de V e $v \in V$ com $v \neq 0$. Considere o subespaço vetorial W de V gerado por $v, L(v), L^2(v), L^3(v), \cdots$ Determine o subespaço W em cada caso:
(a) $V = \mathbb{R}^3$, L definido por $L(x, y, z) = (x, 0, 0)$ e $v = (1, 0, 1)$.
(b) $V = P_3$, L definido por $L(p) = p''$ e $v = t^3$.
(c) $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$, L definido por $L(A) = A^t$ e $v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

32. Sejam W o subespaço de P_3 gerado por: $G = \{-5 + t - 2t^2 + t^3, 1 + 2t - t^2 - 2t^3\}$ e a transformação linear $T : W \to P_2$ definida por: $T(p(t)) = 2p'(t) + p(0)(t - 1)$.

Se $[T]^B_D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ pede-se:

(a) Calcular $[T(p)]_D$ sendo $[p]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) Se $D = \{t-1, q_1(t), q_2(t)\}$ calcular $3(q_1(t) + q_2(t))$.

(c) Determinar o núcleo $Ker(T)$ e a imagem de T.

33. Seja T o operador do $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (x-y, x+2y)$. Determine a expressão do operador L do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base canônica é a transposta da matriz de T (isto é, $[L] = A^t$ onde $A = [T]$).

34. Seja T o operador de P_2 definido por $T(p) = p' + 3p$. Determine a expressão do operador L do P_2 cuja matriz em relação à base canônica é a transposta da matriz de T (isto é, $[L] = A^t$ onde $A = [T]$).

AUTOVALORES E AUTOVETORES

35. Se $T : V \to V$ é um operador linear, relacione $Ker(T) \neq 0$ com a existência de autovalores de T.

36. Ache os autovalores e os autovetores de cada operador T do $\mathbb{R}^2$ definido abaixo:
(a) $T(x,y) = (x+2y, -x+4y)$ (b) $T(x,y) = (5x-y, x+3y)$ (c) $T(1,0) = (0,1)$ e $T(0,1) = (1,0)$

37. Ache os autovalores e os autovetores de cada operador T do $\mathbb{R}^3$ definido abaixo:
(a) $T(x,y,z) = (x+y, y, z)$
(b) $T(1,0,0) = (2,0,0)$, $T(0,1,0) = (2,1,2)$ e $T(0,0,1) = 3,2,1$
(c) $T(1,0,0) = (0,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,0,0)$ e $T(0,0,1) = (5,-1,2)$

38. Ache os autovalores e os autovetores de cada operador linear L de P_2 definido abaixo:
(a) $L(p)(t) = t^2 p''(t)$ (b) $L(p)(t) = p(t) + (t+1)p'(t)$

39. Ache os autovalores e os autovetores do operador linear L de P_3 definido por $L(p) = p' + p''$.

40. Ache os autovalores e os autovetores do operador linear L de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definido por $L(f) = f'$.

41. Seja L o operador de $\mathbb{R}^2$ definido por: $L(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$. Mostre que L tem autovalores reais se, e só se, $\theta = 0$ ou $\theta = 180$. Analise o caso em que $\theta = 90$.

42. Determine o operador linear L do $\mathbb{R}^2$ tal que L tem autovalores 1 e 3 associados aos autovetores $(y, -y)$ e $(0, y)$, respectivamente.

43. Decida se cada afirmação abaixo é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou contra-exemplo:
(a) Se $Tv = kv$ para algum escalar não nulo k então v é autovetor de T;
(b) Se $k = 0$ é um autovalor de T então $\dim Ker(T) > 0$;
(c) Se V tem dimensão finita e T é um operador linear de V com $T^2 = T$ então $ker(T) \oplus Im(T) = V$;
(d) Se k é um autovalor de T então o operador $L = T - kId$ não é injetor.

44. Sejam T e S operadores lineares de V tais que $T \circ S = S \circ T$. Se k é um autovalor de T com autoespaço associado W mostre que $S(W) \subset W$, isto é, W é invariante sob S.

45. Mostre que o polinômio característico de $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é dado pela equação: $k^2 - (tr(A))k + det(A)$. Conclua que se A é simétrica e $A \neq \text{r}Id$ então A tem sempre dois autovalores reais e distintos.

46. Dizemos que duas matrizes reais quadradas A e B são semelhantes se existe uma matriz inversível P tal que $B = P^{-1}AP$. Mostre que matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico.