$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - IAD236 - novembro de 2007

DIAGONALIZAÇÃO

1. Para cada um dos operadores definidos nos exercicios 33, 34, 36, 37, 38 e 39, da $2^{\underline{a}}$ lista de exercícios, determine se é diagonizável ou não. Nos casos afirmativos, dê uma base na qual a matriz do operador é diagonal, dê a matriz do operador nesta base e dê a matriz que diagonaliza o operador.

2. Dê exemplo de um operador diagonalizável T do $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado por $(1, 0, -1)$.

3. Dê exemplo de um operador diagonalizável T do $\mathbb{R}^3$ cuja imagem é gerada por $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$.

4. Dê exemplo de um operador diagonalizável L do P_2 cujo núcleo é gerado por $1 - t^2$.

5. Dê exemplo de um operador diagonalizável L do P_2 cuja imagem é gerada por $1 + t$ e $-t$.

6. Sejam V um espaço de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear tal que $T \circ T = 0$ (nilpotente).
(a) Encontre os autovalores de T.
(b) Se $T \neq 0$ mostre que T não é diagonalizável.

7. Sejam V um espaço de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear tal que $T \circ T = T$ (idempotente).
(a) Encontre os autovalores de T.
(b) Dê exemplos em que T é diagonalizável.

8. Seja L um operador do $\mathbb{R}^2$ tal que $L \neq cId$. Mostre que existe w tal que w e $(L(w) - w)$ são LI.

9. Se k_1 e k_2 são autovalores reais distintose não nulos de um operador linear T do $\mathbb{R}^2$ mostre que os vetores $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são LI, onde v_1 e v_2 são os autovetores associados a k_1 e k_2, respectivamente.

PRODUTO INTERNO

10. Exercícios do livro: Álgebra Linear , A. Steinbruch, pag. 142: 1b; 3b,d; 5; 6a; 7; 9.

11. Considere o espaço $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual. A afirmação: dado o número real $k = 5$, existem e são únicos os vetores u e w do $\mathbb{R}^n$ tais que $< u, w >= 5$, é verdadeira ou falsa?

12. A expressão: $< A, B >= tr(A + B)$ define um produto interno em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

13. A expressão $< p, q >= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$ define um produto interno em P_2?

14. No espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ sejam $u = (1, -1, 0)$ e $v = (2, -1, 2)$. Determinar: $< u, v >$, $\|u\|$, $\|v\|$, $d(u, v)$, o cosseno do ângulo entre u e v, e o normalizado de $u + v$.

15. No espaço V das matrizes reais 2×3 com o produto interno $< A, B >= tr(B^t A)$ determine $< A, B >$, $\|A\|$, $\|B\|$, as normalizadas de A e de B sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

16. No espaço V das matrizes reais 2×2 com o produto interno $< A, B >= tr(B^t A)$ determine $< A, B >$, $\|A\|$, $\|B\|$, $d(A, B)$, o cosseno do ângulo entre A e B sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17. No espaço dos polinômios reis com o produto interno da integral, dados $f(t) = t + 2$, $g(t) = 3t - 2$ e $h(t) = t^2$ determine $< f, g >$, $< f, h >$, $\|g\|$, $\|h\|$, os normalizados de g e de h, $d(f, g)$, $d(f, h)$ lembrando que: $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

18. No espaço $V = P_2$ com o produto interno usual, determine $< f, g >$, $< f, h >$, $\|g\|$, $\|h\|$, os normalizados de g e de h, $d(f, g)$, $d(f, h)$ para os polinômios dados no exercício anterior. Compare os resultados obtidos.

19. Em cada um dos exercícios 13, 15, 16, 17 dê exemplos de vetores u e v não nulos nos respectivos espaços tais que $< u, v >= 0$.

20. No espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$ determine $< e_i, e_j >$ onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é a base canônica.

21. Em P_3 com o produto interno usual, determine $< p_i, p_j >$ para a base canônica $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$.

22. Sejam $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, 1, 2)$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Determine w em $\mathbb{R}^3$ tal que $\|w\| = 1$ e $< u, w >=< v, w >= 0$

23. Num espaço vetorial V com produto interno, provar que:
(a) $u \neq 0$, $v \neq 0$, $< u, v >= 0 \Rightarrow u$ e v são LI.
(b) $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow < u + v, u - v >= 0$.
(c) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow < u, v >= 0$ *Teorema de Pitágoras.*
(d) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ *Lei do paralelogramo.*

24. Sejam $u = 1+t$ e $v = t+2t^2$ no espaço P_2. Determine q em P_2 tal que $\|q\| = 1$ e $< u, q >=< v, q >= 0$, em relação ao produto interno usual.

25. Escreva a desigualdade de Cauchy-Schwartz para o produto interno da integral definido no exercício 17 para os polinômios. Use tal desigualdade para mostrar que:

$$(\int_0^1 f(t)dt)^2 \leq \int_0^1 (f(t))^2 dt$$

26. Exercicios do livro: Álgebra Linear, A. Steinbruch, pag. 142: 10; 11; 12; 14; 15; 16b); 17; 19; 20; 21; 23; 24; 26; 27; 28.

27. No espaço P_2 determine m para que $p(t) = mt^2 - 1$ seja ortogonal a $q(t) = t$ em relação a cada um dos produtos internos abaixo:

(a) $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$ (b) $< f, g >= \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$

28. Resolver o exercício acima usando agora o produto interno definido no exercicio 13.

29. Achar o complemento ortogonal de $W = [1, t]$ no espaço P_2 em relação a cada produto interno:
(a) definido em (b) do exercício 27 (b) definido no exercício 13

30. Achar uma base ortogonal do complemento ortogonal de $W = [(1, 0, 1, 1), (1, 1, 2, 0)]$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$. completar esta base para formar uma base do espaço $\mathbb{R}^4$.

31. Achar uma base ortogonal do complemento ortogonal de $W = [A, B]$ no espaço $M_{2\times2}\mathbb{R}$ com o produto interno $< A, B >= tr(B^t A)$. Completar esta base para formar uma base de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

32. Seja V um espaço com produto interno. Se u e v pertencem a V com $v \neq 0$ e $k = \frac{<u,v>}{\|v\|^2}$ mostrar que $u - kv$ é ortogonal a v.

33. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x-y-z, 2z-x)$. Determine uma base do complemento ortogonal do núcleo $Ker(T)$.

34. Achar a projeção ortogonal da matriz A sobre o subespaço $W = [B]$ de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ dadas no exercício 31.

35. Achar a projeção ortogonal do vetor $(1, 1, 1, 1)$ sobre o subespaço $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$.

36. Achar a projeção ortogonal de $q(t) = 2t - 1$ sobre o subespaço $W = [t]$ do $P_2(\mathbb{R})$ em relação ao produto interno da integral definido no exercício 17. Qual seria a projeção se o produto interno fosse o usual do espaço $P_2(\mathbb{R})$.

37. Considere os vetores $u = (1, 1, 1)$ e $v = (3, 2, 1)$ do $\mathbb{R}^3$.
(a) Determine w_1 e w_2 tais que $v = w_1 + w_2$, w_1 seja ortogonal a u e que w_2 e u sejam LD.
(b) Dado $w = (0, 1, 1)$ decompor v em dois vetores sendo um pertencente a $S = [u, w]$ e outro ao complemento ortogonal $S^\perp$.

38. Determine uma base ortonormal de:

(a) $W = [(1,0,1,1),(1,1,2,0)]$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$.
(b) $W = [1,t]$ no espaço $P_2(\mathbb{R})$ em relação ao produto interno do exercício 17.
(c) $W = \{(x,y,z); x+y-z=0\}$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.
(d) $W = [A,B]$ no espaço $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com o produto interno $< A,B >= tr(B^t A)$ sendo A e B dadas no exercício 31.

39. Construir, apartir do vetor $(1,-2,1)$ uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$, relativamente ao produto interno usual e obter, a partir desta, uma base ortonormal.

40. Achar e interpretar geometricamente os seguintes complementos ortogonais:
(a) do plano $z = 0$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$;
(b) da reta bissetriz $y = x$ no plano euclidiano $\mathbb{R}^2$;
(c) da reta $x = z = 0$ no plano euclidiano $\mathbb{R}^3$;
(d) do subespaço gerado por t no espaço P_2 com o produto interno usual;
(e) do subespaço gerado por t no espaço P_2 com o produto interno do exercício 27(a);
(f) do subespaço das matrizes cujos elementos da diagonal são nulos em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com o produto interno usual.