# Geometria Analítica

## $1^o$ Semestre de 2007

Hernán Montúfar
Universidade Federal da Bahia

## Conteúdo



# 1 Matrizes

1. Uma *matriz* $A$, $m \times n$, é uma tabela de $mn$ números dispostos em $m$ linhas e $n$ colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notação: $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Dizemos que $a_{ij}$ ou $[A]_{ij}$ é o *elemento* de posição $i, j$ da matriz $A$.

2. A *i-ésima linha* de $A$ é: $[a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in}]$ para $i = 1, \cdots m$. A *j-ésima coluna* de $A$ é: $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

para $j = 1, \cdots n$.

3. Se $m = n$, dizemos que $A$ é uma *matriz quadrada de ordem* $n$. Os elementos $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ formam a chamada *diagonal* de $A$.

4. Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{p\times q}$ são *iguais* se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$.

**Exemplo 1.** Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ $D = [3]$

Então: As matrizes $A$ e $B$ são $2 \times 2$, $C$ é $3 \times 1$ e $D$ é $1 \times 1$. Elementos de matrizes: $a_{12} = -2$, $c_{31} = -4$. As matrizes $A$ e $B$ não são iguais pois $a_{11} = 1 \neq -1 = b_{11}$.

5. A *soma* de duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ é definida como sendo a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$. Escrevemos $C = A + B$ e $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

**Exemplo 2.** Sejam $A$ e $B$ do exemplo acima.

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+(-1) & -2+(-2) \\ 3+3 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

6. A *diferença* entre $A$ e $B$, matrizes $m \times n$, é: $A - B = A + (-B)$.

7. A *multiplicação de uma matriz* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *por um escalar* $\alpha$ é definida pela matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ onde $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ para $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$. Escrevemos $B = \alpha A$ com $[\alpha A]_{ij} = \alpha a_{ij}$ e dizemos que a matriz $B$ é um *multiplo escalar* da matriz $A$.

**Exemplo 3.** Seja $A$ a matriz acima e $\alpha = -2$.

$$-2A = \begin{bmatrix} (-2)(1) & (-2)(-2) \\ (-2)(3) & (-2)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$$

8. O *produto* de duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$ é definida como sendo a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ onde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$ para $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$. Escrevemos $C = AB$ e $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \hline \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{ip}} & & \\ \hline a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ & & & & \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & c_{ij} & \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

**Exemplo 4.** Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ então

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1.0+0.1 & 1.0+0.0 \\ 0.0+0.1 & 0.0+0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = BA = \begin{bmatrix} 0.1+0.0 & 0.0+0.0 \\ 1.1+0.0 & 1.0+0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. A *potência* $p$ de $A$, $n \times n$, é: $A^p = \underbrace{A \ldots A}_{p-vezes}$ com $p \in \mathbb{Z}^+$. E para $p = 0$, $A^0 = I_n$.

10. A *transposta* de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e definida pela matriz $B = (b_{ij})_{n\times m}$ onde $b_{ij} = a_{ji}$ para $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$. Escrevemos $B = A^t$ e $[A^t]_{ij} = a_{ji}$.

**Exemplo 5.** As transpostas de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ *e* $C = [3]$ são:

$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$, $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ e $C^t = [3] = C$

**Exercício 1.1.** Seja $A = [1\ 0\ 1]$, se for possivel calcule $AA$, $AA^t$, $A^tA$, $A^tA^t$, $3A^t$.

**Teorema 1.1.** *Sejam $A$, $B$ e $C$ matrizes, $\alpha$ e $\beta$ escalares:*

(*a*) $A + B = B + A$.

(*b*) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(*c*) *Existe uma única matriz $\overline{0}$, $m \times n$, tal que $A + \overline{0} = A$.*

(d) *Para toda matriz $A$, existe uma única matriz $B$, tal que $A+B=0$. Representamos $B$ por $-A$.*

(e) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$.

(f) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

(g) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

(h) $A(BC)=(AB)C$.

(i) $A(B+C)=AB+AC$ *e* $(B+C)A=BA+CA$

(j) $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$.

(k) $(A^t)^t=A$.

(l) $(A+B)^t=A^t+B^t$

(m) $(AB)^t=B^t.A^t$.

(n) $(\alpha A)^t=\alpha A^t$.

(o) *A matriz, $n\times n$, $I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ chamada matriz identidade é tal que*

$$AI_n=A,\ \forall\ A=(a_{ij})_{m\times n}$$

$$I_nB=B,\ \forall\ B=(b_{ij})_{n\times m}$$

*Demonstração*: Exercicio □

**Exemplo 6.** Sejam $A$ e $B$ de ordem $n$. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2 \Longleftrightarrow AB=BA$
$(A+B)(A-B)=(A+B)A+(A+B)(-B)=AA+BA-AB-BB=A^2+BA-AB-B^2$

# 2 Sistemas Lineares

Um *sistema de equações lineares* ou simplesmente *sistema linear* é um conjunto de equações da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

onde $a_{ij}$, $b_k\in\mathbb{R}$, $i,k=1,\cdots,m$ e $j=1,\cdots,n$. A *equação matricial* de sistema linear é $AX=B$ onde

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix}\quad \text{e}\quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

Uma *solução* é uma matriz $S=\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \\ s_n \end{bmatrix}$ tal que as equações do sistema são satisfeitas quando $x_1=s_1$, $x_2=s_2$, $\cdots$, $x_n=s_n$. A matriz $A$ é chamada *matriz do sistema linear*. A *matriz aumentada* é a matriz de coeficientes do sistema.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

**Definição .** Uma *operação elementar sobre as linhas* de uma matriz é:

($a$) Trocar a posição de duas linhas da matriz.

($b$) Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero.

($c$) Somar a uma linha da matriz um multiplo escalar de outra linha.

**Teorema 2.1.** *Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$, são tais que a matriz aumentada $[C|D]$ é obtida de $[A|B]$ aplicando-se uma operação elementar, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções.*

*Demonstração*: Exercicio.

**Exemplo 7.** Resolva o sistema $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Portanto, o sistema possue as mesmas soluções que o sistema $\begin{cases} x \phantom{+y} = -\frac{1}{3} \\ \phantom{x+} y = \frac{2}{3} \end{cases}$

**Definição .** Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ esta na forma *escalonada reduzida* se:

($a$) Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas.

($b$) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula, chamado *pivô*, é igual a 1.

($c$) O pivô da linha $i + 1$ ocorre à direita do pivô da linha $i$, para $i = 1, \cdots, m - 1$.

($d$) Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

**Exemplo 8.**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{escalonada reduzida}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{não é escalonada reduzida}}$$

**MÉTODO DE GAUSS-JORDAN:** É um método de resolução de sistemas linares que consiste em:

1. Obter a matriz aumentada.
2. Aplicar as operações elementares.
3. Ate que a matriz aumentada esteja na forma escalonada reduzida.

**Exemplo 9.** Resolva o sistema $\begin{cases} x + 3y + 13z = 9 \\ \phantom{x+3} y + 5z = 2 \\ \phantom{x} - 2y - 10z = -8 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \to \begin{cases} x \quad -2z = 3 \\ \quad y + 5z = 2 \\ \qquad 0 = -4 \end{cases}$$

Contradição. Portanto, o sistema não possui solução.

**Exemplo 10.** Resolva o sistema $\begin{cases} 5x & + & 5y & + & & = 15 \\ 2x & + & 4y & + & z & = 10 \\ 3x & + & 4y & & & = 11 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 0 & 15 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \begin{cases} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 0 \end{cases}$$

Portanto, o sistema possui uma única solução.

**Exemplo 11.** Resolva o sistema $\begin{cases} & & & & 3z & - & 9w & = 9 \\ 5x & + & 15y & - & 10z & + & 40w & = 2 \\ x & + & 3y & - & z & + & 5w & = -8 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{cases} x & + & 3y & & + & 2w & = & -5 \\ & & & z & - & 3w & = & 2 \end{cases}$$

Então as variaveis livres são $\begin{cases} y & = & \alpha \\ w & = & \beta \end{cases}$. Logo a solução geral é: $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-3\alpha-2\beta \\ \alpha \\ 2+3\beta \\ \beta \end{bmatrix}$ $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Portanto, o sistema possui infinitas soluções.

**Proposição 2.2.** *Seja $A$ uma matriz $m \times n$ e $B$ uma matriz $m \times 1$. Se o sistema linear $AX = B$ possui duas soluções distintas $X_0 \neq X_1$, então ele tem infinitas soluções.*

*Demonstração*: Temos $AX_0 = B$ e $AX_1 = B$. Vamos mostrar que $AX_\lambda = B$ onde $X_\lambda = (1-\lambda)X_0 + \lambda X_1$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} AX_\lambda &= A((1-\lambda)X_0 + \lambda X_1) \\ &= A(1-\lambda)X_0 + A\lambda X_1 \\ &= (1-\lambda)AX_0 + \lambda AX_1 \\ &= (1-\lambda)B + \lambda B = [(1-\lambda)+\lambda]B = B. \end{aligned}$$

Então $X_\lambda$ é solução do sistema $AX = B$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Agora como $X_1 - X_0 \neq 0$ e

$$\begin{aligned} X_\lambda - X_{\lambda'} &= (1-\lambda)X_0 + \lambda X_1 - (1-\lambda^{'})X_0 - \lambda^{'} X_1 \\ &= [(1-\lambda)-(1-\lambda^{'})]X_0 + (\lambda-\lambda^{'})X_1 \\ &= (-\lambda+\lambda^{'})X_0 + (\lambda-\lambda^{'})X_1 = (\lambda-\lambda^{'})(X_1 - X_0) \end{aligned}$$

Então $X_\lambda \neq X_{\lambda'}$ para $\lambda \neq \lambda^{'}$. Portanto $AX = B$ tem infinitas soluções.

**Definição .** Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é *equivalente por linhas* a uma matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$, se $B$ pode ser obtida de $A$ aplicando-se uma seqüência de operações elementares sobre as suas linhas.

**Exemplo 12.** As matrizes $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$ e $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{array}\right]$ são equivalentes por linhas. Para outros exemplos veja as matrizes dos exemplos 9, 10 e 11.

**Teorema 2.3.** *Toda matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é equivalente por linhas a uma única matriz escalonda reduzida $R = (r_{ij})_{m\times n}$.*

*Demonstração*: Exercicio.

**Proposição 2.4.** *Seja $R$ uma matriz $n \times n$, na forma escalonada reduzida. Se $R \neq I_n$, então $R$ tem uma linha nula.*

*Demonstração*: O pivô da linha $i$ está na coluna $j$ com $j \geq i$. Portanto a última linha de $R$ é nula ou o pivô da linha $n$ está na posição $n.n$. Se o pivô da linha $n$ está na posição $n.n$ então todas as linhas anteriores são não nulas e os pivôs de cada linha $i$ está na coluna $i$. Portanto $R = I_n$. Contradição a hipotese.

**Definição .** Um sistema linear $AX = B$ é chamado *sistema homogêneo* se $B = 0$.

Todo sistema homogêneo admite pelo menos a *solução trivial* $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

**Teorema 2.5.** *Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é tal que $m < n$ então o sistema homogêneo $AX = \overline{0}$ tem solução diferente da solução trivial.*

*Demonstração*: Como $m < n$ então o sistema tem menos equações do que incognitas. Logo o número de linhas não nulas $r$ da forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema é tal que $r < n$. Assim temos $r$ pivôs e $n - r$ incognitas livres. Então o sistema admite solução não trivial e portanto infinitas soluções.

# 3 Matriz Inversa

**Definição .** Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é *invertivel* se existe uma matriz $B = (b_{ij})_{n\times n}$ tal que $AB = BA = I_n$. A matriz $B$ é chamada de *inversa* de $A$. Escrevemos $B = A^{-1}$.

**Proposição 3.1.** .

(a) *Se $A$ possui inversa então a inversa é única.*

(b) *Se $A$ é invertível então $A^{-1}$ também o é e $(A^{-1})^{-1} = A$.*

(c) *Se $A$ e $B$ são invertíveis então $AB$ é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

(d) *Se $A$ é invertível então $A^t$ também é invertível e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

*Demonstração*: (a) Se $B$ e $C$ são inversas de $A$. Então $AB = BA = I_n = AC = CA$. Logo

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

(b) $B$ é inversa de $A^{-1}$ se $A^{-1}B = BA^{-1} = I_n$. Mas $A^{-1}$ é inversa de $A$ então $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Como a inversa é única então $B = A$ é a inversa de $A^{-1}$. Portanto $(A^{-1})^{-1} = A$.
(c) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = BB^{-1} = I_n$

$(d)$ $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = (I_n)^t = I_n$
$(A^{-1})^t A^t = (AA^{-1})^t = (I_n)^t = I_n$ $\square$

Para verificar que uma matriz $A$ é invertível, quando temos uma matriz $B$ que é candidata a inversa de $A$, basta fazer um dos produtos $AB$ ou $BA$ e verificar se um deles é igual a $I_n$ (veja os exercicios). O proximo exemplo ilustra este fato.

**Exemplo 13.** Se $A$ é tal que $A^3 = \overline{0}$ então a inversa de $I_n - A$ é $I_n + A + A^2$.
De fato, pois $(I_n - A)(I_n + A + A^2) = I_n(I_n + A + A^2) - A(I_n + A + A^2) = I_n + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I_n$

**Teorema 3.2.** *Uma matriz $A$, $n \times n$, é invertível se, e somente se, $A$ é equivalente por linhas à matriz identidade $I_n$.*

*Demonstração*:
**MÉTODO PARA INVERSÃO DE MATRIZES** Se $A$ é uma matriz $n \times n$ então:

1. Forme a matriz aumentada $[A|I_n]$.
2. Aplicar as operações elementares a $[A|I_n]$.
3. Até encontrar sua forma escalonada reduzida $[R|S]$.
4. Se $A = I_n$ então $A$ é invertível e $A^{-1} = S$.
   Se $A \neq I_n$ então $A$ não é invertível.

**Exemplo 14.** Vamos encontrar, se existir, a inversa de: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Temos que $[A|I_3]$ é equivalente por linhas a $[I_3|S]$. Portanto $A$ é invertível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**Teorema 3.3.** *Seja $A$ uma matriz $n \times n$.*

$(a)$ *O sistema $AX = B$ tem solução única se, e somente se, $A$ é invertível. Neste caso a solução é $X = A^{-1}B$.*

$(b)$ *O sistema homogêneo $AX = \overline{0}$ tem solução não trivial se, e somente se, $A$ não é invertível.*

*Demonstração*: $(a) \Longrightarrow)$ Se $AX = B$ possui solução única, então a forma escalonada reduzida do sistema $[A|B]$ é $[R|C]$, em que $R = I_n$. Pois se $R \neq I_n$ então posssuiria uma linha de zeros (pelo exercicio) o que levaria a que $AX = B$ não tivesse solução o tivesse infinitas soluções. Logo $A$ é equivalente por linhas a $I_n$ então $A$ é invertível.
$\Longleftarrow)$ Se $A$ é invertível então $A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow I_nX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$
Portanto o sistema $AX = B$ tem solução única, $X = A^{-1}B$.
$(b) \Longrightarrow)$ Se $AX = \overline{0}$ tem solução não trivial então tem infinitas soluções. Então pelo item $(a)$ $A$ não é invertível.
$\Longleftarrow)$ Se $A$ é não invertível então por $(a)$ $AX = \overline{0}$ não tem solução única. Mas $AX = \overline{0}$ possui pelo menos a solução trivial então tem infinitas soluções. Portanto tem solução não trivial.

**Exercício 3.1.** Se $A$ e $B$ são matrizes $n \times n$, com $AB$ invertível, então $A$ e $B$ são invertíveis.

# 4 Determinantes

**Definição . .**

1. Seja $A = [a]$ matriz $1 \times 1$. O *determinante de* $A$, denotado por $det(A)$, é definido por $det(A) = a$.
2. Seja $A$ uma matriz $2 \times 2$. O *determinante de* $A$, é definido por:

$$det(A) = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3. Seja $A$ uma matriz $n \times n$.
   (a) O *menor* do elemento $a_{ij}$, denotado por $\widetilde{A}_{ij}$, é a submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de $A$ obtida eliminandose a i-ésima linha e a j-esima coluna de $A$.
   (b) O *cofator* do elemento $a_{ij}$, denotado por $A_{ij}$, é definido por $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(\widetilde{A}_{ij})$.
   (c) O *determinante de* $A$ é definido por: $det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$ em que $A_{1j} = (-1)^{1+j} det(\widetilde{A}_{1j})$ é o cofator do elemento $a_{1j}$.

**Exemplo 15.** Vamos encontrar o determinante de: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$det(A) = 0A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + (-3)A_{14}$$

Mas $A_{14} = (-1)^{1+4} det(\widetilde{A}_{14})$. Se $B = \widetilde{A}_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ então $det(B) = 1B_{11} + 2B_{12} + 3B_{13}$. Logo

$$det(B) = 1(-1)^{1+1} det(\widetilde{B}_{11}) + 2(-1)^{1+2} det(\widetilde{B}_{12}) + 3(-1)^{1+3} det(\widetilde{B}_{13})$$

$$= det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 2det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 3det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -8 - 2(-2) + 3(-7) = -25$$

Portanto, $det(A) = (-3)(-1)det(B) = -75$

**Exercício 4.1.** Mostre que se uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, é triangular inferior (ou triangular superior) então $det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

Pela definição de determinante, o determinante deve ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo a $1^a$ linha. Pode-se mostrar (veja os exercicios), que o determinante pode ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo qualquer linha.

**Teorema 4.1.** *Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$, escrita em termos de suas linhas, denotadas por $A_i = [a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}]$. Se para algum $k$, a linha $A_k = \alpha X + \beta Y$, em que $X = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]$, $Y = [y_1\ y_2\ \cdots\ y_n]$ e $\alpha$ e $\beta$ são escalares, então*

$$det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X + \beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha\, det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta\, det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

*Demonstração*: Exercicio.

**Exemplo 16.** Vamos encontrar o determinante de $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ilustrando o teorema acima.

$$\begin{aligned} det(A) &= det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3+5 & 2-1 & 1+2 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= (2)(-1-4) + (2)(-2-2) = -10 \end{aligned}$$

**Teorema 4.2.** *Sejam $A$ e $B$ matrizes $n \times n$.*

$(a)$ *Se $A$ possui uma linha formada inteiramente por zeros, então $det(A) = 0$.*

$(b)$ *Se $A$ possui duas linhas iguais, então $det(A) = 0$.*

$(c)$ *Se $B$ é obtida de $A$ multiplicando-se uma linha por um escalar $\alpha$, então $det(B) = \alpha det(A)$.*

$(d)$ *Se $B$ resulta de $A$ pela troca de posição relativa de duas linhas, então $det(B) = -det(A)$.*

$(e)$ *Se $B$ é obtida de $A$ substituindo a linha $i$ por ela somada a um multiplo escalar de uma linha $j$, $j \neq i$, então $det(B) = det(A)$.*

$(f)$ $det(A) = det(A^t)$.

$(e)$ $det(AB) = det(A)det(B)$.

*Demonstração*: $(a)$ Se $A$ tem uma linha nula então multiplicando-se a linha nula por qualquer escalar $\alpha$, obtemos $det(A) = \alpha det(A)$, para qualquer escalar $\alpha$. Portanto $det(A) = 0$.
$(b)$ Se $A$ é $2 \times 2$ então $det(A) = det \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0$. Supondo que é verdadeiro para matrizes $(n-1) \times (n-1)$, vamos provar que é verdadeiro para matrizes $n \times n$. Suponhamos que as linhas $k$ e $l$ sejam iguais, para $k \neq l$. Desenvolvemos o determinante de $A$ em termos da linha $i$, com $i \neq k, l$.

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}) = 0$$

pois cada $A_{ij}$ é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ com duas linhas iguais.
$(c)$ No teorema anterior, $\beta = 0$ então $det(B) = \alpha det(A)$.

$(d)$ Sejam $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$. Pelo item $(b)$ temos $0 = det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k + A_l \\ \vdots \\ A_k + A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$. Logo

$$0 = det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_k + A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_k + A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

$= 0 + det(A) + det(B) + 0$. Portanto $det(B) = -det(A)$.

$$(e)\ det(B) = det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l + \alpha A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \alpha det\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = detA.$$

**Exemplo 17.** Valor calcular o determinante de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ usando as propriedades acima.

$$detA = -det\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = -3det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = -3det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} = -3det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{bmatrix} =$$

$$= (-3)(-55) = 165.$$

**Exercício 4.2.** Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$

$(a)$ Se $A$ é invertível então $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.

$(b)$ Se $A^2 = A^{-1}$ então $det(A) = 1$.

**Teorema 4.3.** *Seja* $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

$(a)$ *A matriz* $A$ *é invertivel se, e somente se,* $det(A) \neq 0$.

$(b)$ *O sistema homogeneo* $AX = \overline{0}$ *tem solução não trivial se, e somente se,* $det(A) = 0$.

*Demonstração*:

$(a)$ Seja $R$ a forma escalonada reduzida de $A$. Então $R = I_n$ ou $R$ tem uma linha nula. Portanto, $A$ é invertivel $\Leftrightarrow R = I_n \Leftrightarrow det(R) \neq 0 \Leftrightarrow det(A) \neq 0$.

$(b)$ $AX = \overline{0}$ tem solução não trivial $\Leftrightarrow A$ não é invertivel $\Leftrightarrow det(A) = 0$. □

# 5 Vetores

Geometricamente, *vetores* são representados (não unicamente) por segmentos orientados * no plano ou no espaço.

A direção, o sentido e o comprimento do segmento orientado representa a *direção*, o *sentido* e a *magnitude* do vetor. Dois *segmentos orientados representão o mesmo vetor* se possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. Dois *vetores são iguais* se eles possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. Se o ponto inicial de um representante de um vetor $v$ é $A$ e o ponto final é $B$ então $V = \overrightarrow{AB}$

*Um *segmento orientado* é um segmento de reta com um sentido de percurso

A *soma*, $V + W$, de dois vetores $V$ e $W$ é:

- Tome um representante de $V$.
- Tome um representante de $W$, com origem na extremidade de $V$.
- O vetor $V + W$ é represcentado pelo segmento orientado que vai da origem de $V$ até a extremidade de $W$.

O vetor que tem a sua origem coincidindo com a sua extremidade é chamado *vetor nulo* e é denotado por $\overline{0}$. Segue $V + \overline{0} = \overline{0} + V = V$, $\forall$ vetor $V$. O *simetrico* de $V$, denotado por $-V$, é o vetor que tem mesmo comprimento, mesma direção e sentido contrario ao de $V$. Segue $V + (-V) = \overline{0}$, $\forall$ vetor $V$. Definimos a *diferença* de $W$ menos $V$, por $W - V = W + (-V)$

A *multiplicação de $V$ por um escalar $\alpha$*, $\alpha V$, é determinado pelo vetor que possui

1. O vetor nulo, se $\alpha = 0$ ou $V = \overline{0}$.
2. Caso contrario
   (a) Tem comprimento $|\alpha|$ vezes o comprimento de $V$.
   (b) A direção é a mesma de $V$ (dizemos que são *paralelos* ou *colineares*)
   (c) i. Se $\alpha > 0$ então tem o mesmo sentido de $V$.
       ii. Se $\alpha < 0$ então tem o sentido contrario ao de $V$.

Se $W = \alpha V$, dizemos que $W$ é um *multiplo escalar* de $V$.

COMPONENTES DE UM VETOR:

1. Escolha um representante de $V$ que tenha ponto inicial na origem.
2. As componentes de $V$ são as coordenadas do ponto final do representante escolhido.

SOMA DE VETORES (usando componentes):

1. Se $V = (V_1, V_2)$ e $W = (W_1, W_2)$ então $V + W = (V_1 + W_1, V_2 + W_2)$
2. Se $V = (V_1, V_2, V_3)$ e $W = (W_1, W_2, W_3)$ então $V + W = (V_1 + W_1, V_2 + W_2, V_3 + W_3)$

MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM ESCALAR (usando componentes):

1. Se $V = (V_1, V_2)$ e $\alpha$ um escalar então $\alpha V = (\alpha V_1, \alpha V_2)$
2. Se $V = (V_1, V_2, V_3)$ e $\alpha$ um escalar então $\alpha V = (\alpha V_1, \alpha V_2, \alpha V_3)$

Se o vetor $V$ é representado por um segmento orientado com ponto inicial fora da origem, $P = (x_1, y_1, z_1)$, e ponto final em $Q = (x_2, y_2, z_2)$ então as componentes do vetor $V$ são dadas por

$$V = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0Q} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

**Teorema 5.1.** *Sejam $U$, $V$ e $W$ vetores e $\alpha$ e $\beta$ escalares.*

$(a)$ $U + V = V + U$;

$(b)$ $(U + V) + W = U + (V + W)$;

$(c)$ $U + \overline{0} = U$;

$(d)$ $U + (-U) = \overline{0}$;

$(e)$ $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U$;

$(f)$ $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$;

$(g)$ $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$;

$(h)$ $1U = U$.

*Demonstração*: Exercicio □

**Exemplo 18.**

$(a)$ Dados quatro pontos $A$, $B$, $C$ e $X$ tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$, escreva $\overrightarrow{CX}$ como uma soma de múltiplos escalares de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

$(b)$ Mostre que o ponto medio de um segmento que une os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é $M = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$

*Demonstração*:

$(a)$ $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}$
$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \lambda(-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$
$\overrightarrow{CX} = (1 - \lambda)\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB}$

$(b)$ $M$ é ponto medio de $AB$ se, e só se, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
Em $(a)$ tome $X$ sendo $M$ e $C$ sendo a origem $\overline{0}$ então $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Portanto $\lambda = \frac{1}{2}$ e

$$\overrightarrow{OM} = (1 - \frac{1}{2})\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_2, y_2, z_2) = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$$

Logo $M = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$

□

# 6 Produto Escalar

O comprimento do vetor $v$ também é chamado de *norma* de $v$ e é denotado por $\|v\|$. Segue do teorema de Pitágoras que se $v = (v_1, v_2)$ então $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ e se $v = (v_1, v_2, v_3)$ então $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$. A *distancia entre dois pontos* $P$ e $Q$ é igual a $\|\overrightarrow{PQ}\|$. Por exemplo, se $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$ então $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Logo

$$dist(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Se $v$ é um vetor e $\alpha$ um escalar então $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$. De fato,

$$\|\alpha v\| = \|(\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)\| = \sqrt{(\alpha v_1)^2 + (\alpha v_2)^2 + (\alpha v_3)^2} = \sqrt{\alpha^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)} = |\alpha|\|v\|$$

Um vetor de norma igual a 1 é chamado de *vetor unitário*. Se $v \neq 0$, o vetor $u = \left(\frac{1}{\|v\|}\right) v$ é um *vetor unitário na direção* de $v$ pois $\|u\| = \left(\frac{1}{\|v\|}\right)\|v\| = 1$.

O *ângulo* entre vetores não nulos $v$ e $w$ é definido pelo ângulo $\theta$ determinado por $v$ e $w$ que satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$, quando eles estão representados com a mesma origem. Se $\theta = 90°$ ou um deles é nulo, dizemos que $v$ e $w$ são *ortogonais*.

**Definição .** O *produto escalar* de dois vetores $v$ e $w$ é definido por

$$v.w = \begin{cases} 0 & , \text{ se } v \text{ ou } w \text{ é nulo} \\ \|v\|\|w\|\cos\theta & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

em que $\theta$ é o angulo entre eles.

**Teorema 6.1.** *O produto escalar $v.w$ entre dois vetores é*

- *Se $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ então $v.w = v_1w_1 + v_2w_2$;*
- *Se $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ então $v.w = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$*

*Demonstração*: Pela Lei de Cosenos $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|\cos\theta$. Assim

$$v.w = \|v\|\|w\|\cos\theta = \frac{1}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2)$$

Se $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ então $v.w = v_1w_1 + v_2w_2$. □

Se $\theta$ é o ângulo entre dois vetores não nulos $v$ e $w$ então

$$\cos\theta = \frac{v.w}{\|v\|\|w\|}$$

**Exemplo 19.** Se $v = (1, 1, 1)$ e $w = (1, 0, 0)$ então $\cos\theta = \frac{(1,1,1).(1,0,0)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ então $\theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 54°$

**Teorema 6.2.** *Sejam $u$, $v$ e $w$ vetores e $\alpha$ um escalar.*

1. $u.v = v.u$
2. $u.(v + w) = u.v + u.w$
3. $\alpha(u.v) = (\alpha u).v = u.(\alpha.v)$
4. $v.v = \|v\|^2 \geq 0$, $\forall\ v$ e $v.v = 0 \Longleftrightarrow v = \overline{0}$

*Demonstração*: (*a*) $u.v = u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2 = v.u$.
(*b*), (*c*) e (*d*) Exercicio. □

**Definição .** Seja $w$ um vetor não nulo. Dado $v$ qualquer, o vetor $v_1$ é chamado *projeção ortogonal de* $v$ *sobre* $w$, e denotado por $v_1 = proj_w v$, se satizfaz que $v_1$ é paralelo a $w$ e $v - v_1$ é perpendicular a $w$.

**Proposição 6.3.** *Seja* $w$ *um vetor não nulo. Então a projeção ortogonal de um vetor* $v$ *em* $w$ *é dado por*

$$proj_w v = \left(\frac{v.w}{\|w\|^2}\right) w$$

*Demonstração*: Se $v_1 = proj_w v$ e $v_2 = v - proj_w v$ então $v = v_1 + v_2$. Sabemos que, $v_1$ é paralelo a $w$ se, e só se, $v_1 = \alpha w$. Então $v = \alpha w + v_2$. Multiplicando escalarmente por $w$

$$v.w = \alpha w.w + v_2.w = \alpha\|w\|^2 + v_2.w$$

Mas $v_2$ é perpendicular a $w$ então $v_2.w = 0$. Logo $\alpha = \dfrac{v.w}{\|w\|^2}$ e portanto $proj_w v = \left(\frac{v.w}{\|w\|^2}\right) w$. □

**Exemplo 20.** Se v=(2,-1,3) e $w = (4, -1, 2)$ encontre $v_1$ e $v_2$ tais que $v = v_1 + v_2$, com $v_1$ paralelo a $w$ e $v_2$ perpendicular a $w$.
**Solução.** Temos que:

$$v.w = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$

$$\|w\|^2 = w.w = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$$

$$v_1 = proj_w v = \left(\frac{v.w}{\|w\|^2}\right) w = \frac{15}{21}(4, -1, 2) = (\frac{20}{7}, \frac{5}{7}, \frac{10}{7})$$

$$v_2 = v - v_1 = (2 - \frac{20}{7}, -1 - \frac{5}{7}, 3 - \frac{10}{7}) = (\frac{-6}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{11}{7})$$