Teste 1 - Álgebra Linear - 10/08/2007

1. Responda falso ou verdadeiro a cada uma das afirmações abaixo (justifique suas respostas).
a) Se A é matriz $n \times n$ e $A^2 = \mathbf{0}$ então $A = \mathbf{0}$, aqui $\mathbf{0}$ é a matriz nula.
b) A única matriz $n \times n$ simétrica e anti-simétrica ao mesmo tempo é a matriz nula.
c) Se A é uma matriz $n \times n$ e $A^2 = I_n$ então $A = I_n$ ou $A = -I_n$ (I_n é a matriz identidade $n \times n$).
d) Se A e B são duas matrizes $n \times n$ e $AB = BA$, então $(AB)^p = A^p B^p$ para todo número natural p.
e) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $AB = \mathbf{0}$ então $BA = \mathbf{0}$.
f) Se A é uma matriz $n \times n$ e $A^4 - 3A^2 + 7A - I_n = \mathbf{0}$ então A é invertível (i.é. $AB = BA = I_n$ para alguma matriz B, $n \times n$).

2. Em cada um dos sistemas abaixo encontre, usando o metódo de Gauss, sua solução geral:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 4x & +3y & -z & +t & = 4 \\ x & -y & +2z & -t & = 0 \\ 5x & +2y & +z & & = 4 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrrl} x & +5y & +4z & -13t & = 3 \\ 3x & -y & +2z & +5t & = 2 \\ 2x & +2y & +3z & -4t & = 1 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrrl} x & -y & +2z & -t & = 0 \\ 3x & +y & +3z & +t & = 0 \\ x & -y & -z & -5t & = 0 \end{array}\right. .$$

3. Seja $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}$ a matriz ampliada (ou aumentada) do sistema linear. Para que valores de a e b o sistema admite:
a) Solução única
b) Solução com uma variável livre
c) Solução com duas variáveis livres
d) Nenhuma solução.

4. Considere o sistema $AX = B$, com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & a^2 - 16 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ a + 14 \end{pmatrix}$$

(a) Determine o valor (ou valores) de a para que o sistema tenha solução única.
(b) Existem valores para a de forma que o sistema tenha infinitas soluções?
(c) Existem valores para a de forma que o sistema não tenha solução?

5. Considere o sistema $(*)$ $AX = B$, com A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $m \times 1$.
a) Mostre que: se Y_1 e Y_2 são soluções do sistema homogêneo associado $AX = \mathbf{0}$ e a e b são números reais então $Z = aY_1 + bY_2$ também é solução do homogêneo associado.
b) Mostre que: Se X_1 e X_2 são soluções de $(*)$ então $Y = X_2 - X_1$ é solução do sistema homogêneo associado $AX = \mathbf{0}$.
c) Suponha que X_0 é uma solução particular de $(*)$ e mostre que qualquer solucão X de $(*)$ é da forma $X = X_0 + Y$, com Y solução do homogêneo associado.

OBS: Na verdade pode-se provar que para todo sistema homogêneo $(**)$ $AX = \mathbf{0}$, com A uma matriz $m \times n$, existem r soluções não nulas $Y_1, \cdots, Y_r$, $0 \le r \le n$, de $(**)$ tal que toda solução Y de $(**)$ se escreve na forma $Y = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \cdots + a_r Y_r$, com $a_1, \cdots, a_r$ números reais ($r = 0$ ocorre quando $(**)$ tem a solução nula como única solução) . Portanto, por c), se o sistema $(*)$ tem uma solução X_0 então toda solução X de $(*)$ é do tipo $X = X_0 + a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \cdots + a_r Y_r$, com $a_1, \cdots, a_r$ números reais. A solução X_0 é comumente chamada de solução inicial (ou particular) de $(*)$ e o conjunto $\{Y_1, \cdots, Y_r\}$ é chamado de um conjunto de geradores do sistema $(*)$ (ou simplesmente de geradores de $(*)$) Observe ainda que X_0 é a única solução de $(*)$ somente quando $r = 0$.

d) Para se convencer do que a observação acima afirma, encontre para cada um dos sistemas do exercício **2.**, um conjunto de geradores do sistema e uma solução particular (quando existir).

6. Determine todos os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I_3) = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

7. Resolva a equação $f(x) = 0$ onde $f(x) = \det(A - xI)$ e a matriz A é a seguinte:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.