Duas regras para cálculo do determinante de matrizes de ordem 3

Regra de Sarrus:

O determinante de uma matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ de ordem 3 é a soma

- dos números que se obtêm ora multiplicando as entradas principais da matriz, ora multiplicando as entradas da matriz que se dispõem nos vértices dos triângulos, de base paralela à diagonal principal da matriz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a_{11}a_{22}a_{33}} \qquad \mathbf{a_{12}a_{23}a_{31}} \qquad \mathbf{a_{13}a_{21}a_{32}}$$

com

- os simétricos dos números que se obtêm ora multiplicando as entradas da diagonal secundária da matriz, ora multiplicando as entradas da matriz que se dispõem nos vértices dos triângulos, de base paralela à diagonal secundária da matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$-\mathbf{a_{13}a_{22}a_{31}} \qquad -\mathbf{a_{12}a_{21}a_{33}} \qquad -\mathbf{a_{11}a_{23}a_{32}},$$

obtendo-se

$$\mathbf{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}.$$

Exemplo

Seja $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Pela Regra de Sarrus temos

$\det F = 1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8-3\times5\times7-2\times4\times9-1\times6\times8 = 0.$

2ª **regra:**

O determinante de uma matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ de ordem 3 é a soma

- dos produtos das entradas de cada uma das diagonais com três elementos, paralelas à diagonal principal da matriz dada, do quadro que se obtém "acrescentando" à matriz as suas duas primeiras colunas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} \end{matrix}$$

$$\mathbf{a_{11}a_{22}a_{33}} \qquad \mathbf{a_{12}a_{23}a_{31}} \qquad \mathbf{a_{13}a_{21}a_{32}}$$

com

- os simétricos dos produtos das entradas de cada uma das diagonais com três elementos, paralelas à diagonal secundária da matriz dada, do quadro que se obtém "acrescentando" à matriz as suas duas primeiras colunas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$-\mathbf{a_{13}a_{22}a_{31}} \qquad -\mathbf{a_{11}a_{23}a_{32}} \qquad -\mathbf{a_{12}a_{21}a_{33}}$$

obtendo-se

$$\mathbf{a_{11}a_{22}a_{33}} + \mathbf{a_{12}a_{23}a_{31}} + \mathbf{a_{13}a_{21}a_{32}} - \mathbf{a_{13}a_{22}a_{31}} - \mathbf{a_{11}a_{23}a_{32}} - \mathbf{a_{12}a_{21}a_{33}}.$$

Exemplo

Seja $F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Pela regra que acabámos de descrever temos de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ 4 & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ 7 & 1 & \mathbf{9} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ \mathbf{4} & 5 \\ \mathbf{7} & \mathbf{1} \end{matrix} \qquad \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mathbf{2} \\ 4 & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{9} \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & 5 \\ 7 & 1 \end{matrix}$$

$\det F = 1 \times 5 \times 9 + 3 \times 6 \times 7 + 2 \times 4 \times 1 - 2 \times 5 \times 7 - 1 \times 6 \times 1 - 3 \times 4 \times 9 = -5.$