UNIVERSIDADE CATÓLICA DO SALVADOR
CURSO: INFORMÁTICA
DISCIPLINA: ÁLGEBRA LINEAR
PROFESSOR: ATAUALPA MAGNO FERRAZ DE NOVAES
PRIMEIRO SEMESTRE DE 2006 – PRIMEIRA PARTE

Prezados Alunos, sejam bem-vindos ao nosso curso de ÁLGEBRA LINEAR.

Espero que este material possa, sinceramente, ajudar vocês a aprender um pouco essa disciplina tão bela (e vasta) que é a Álgebra Linear.
Um agradecimento especial à professora Inês Malheiros e ao professor **Eron**, meu colega do Mestrado na UFBa, pelo incentivo e constante auxílio que ele me prestou. Uma parte dos exercícios que aqui se encontram são de autoria do próprio Eron.
Desde que desejamos aprimorar este trabalho ao longo do tempo, sugestões e críticas serão bem vindas.
Um forte abraço!
Email: amferraznovaes@ig.com.br ou ataualpa@im.ufba.br
Página na Internet: http:// geocities.yahoo.com.br/magnoferraz/ **ou** http:// www.magno.vze.com
Telefones: 3353-4784 ou 9179-1925

REVISÃO DE MATRIZES

MATRIZES

Denominamos ***matriz*** a um grupo de **elementos** (também chamados **entradas** da matriz) dispostos em linhas e colunas (filas), de forma retangular.

EXEMPLOS: $A=\begin{pmatrix}-1 & \pi & \sqrt{3}\\ 0 & 7 & e\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$; $D=\begin{Vmatrix}1 & 2\end{Vmatrix}$; $E=\begin{Vmatrix}4\end{Vmatrix}$

Ordem de uma matriz é o **número de linhas versus o número de colunas** (sempre nesta ordem!).
Nos exemplos acima: a ordem da matriz A é 2×3 (lê-se: dois por três); a ordem da matriz B é 2×2 (lê-se: dois por dois ou simplesmente de ordem dois, pois o número de linhas = número de colunas = 2); a ordem da matriz C é 2×1 (lê-se: dois por um); a ordem da matriz D é 1×2 (lê-se: um por dois); a ordem da matriz E é 1×1 (lê-se: um por um ou simplesmente de ordem um). Note que os elementos de uma matriz podem ser colocados entre parêntesis, colchetes ou ainda entre barras duplas.

Representação Canônica (Padrão) de uma Matriz

Em uma matriz qualquer A, cada elemento (ou entrada) é indicado (a) por a_{ij}. O índice i indica a linha e o índice j a coluna às quais o elemento a_{ij} pertence.

Considere, por exemplo, uma matriz A de ordem 2×3, genericamente: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

Notação: $A=\left(a_{ij}\right)_{2\times3}$

Considere, por exemplo, uma matriz B de ordem $m\times n$, genericamente: $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

Notação: $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$

<u>APLICAÇÃO:</u>

Seja a matriz $A=\left(a_{ij}\right)$, de ordem 2 (isto é, 2×2), ou, pela notação acima**:** $A=\left(a_{ij}\right)_{2\times2}$, tal

que: $a_{ij}=\begin{cases} 2i-3j & se \quad i\neq j \\ 3i+j & se \quad i=j \end{cases}$. Qual o valor da soma dos elementos dessa matriz? **RESPOSTA**: **9**

IGUALDADE DE MATRIZES

Duas matrizes **<u>de mesma ordem</u>** são ditas iguais quando os elementos "correspondentes" são iguais.

EXEMPLO: Se $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & d \\ c & 4 \end{pmatrix}$, **então** $a=-1; b=4; c=2$ e $d=3$

DEFINIÇÃO IMPORTANTE:

<u>Matriz Transposta</u>: Dada uma matriz A de ordem $m\times n$, define-se a matriz transposta de A, à matriz A^t de ordem $n\times m$ obtida de A trocando-se as linhas pelas respectivas colunas. Matematicamente: Dada uma a matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ diz-se que a matriz B é a transposta de A se $B=\left(a_{ji}\right)_{n\times m}$ e denota-se $B=A^t$.

EXEMPLO: Se $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ então $A^t=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

MATRIZES ESPECIAIS

Matriz Linha: é uma matriz que possui apenas uma linha. **Notação Genérica:** $L = \left(l_{ij}\right)_{1\times n}$

EXEMPLO: $L = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix}$

Matriz Coluna: é uma matriz que possui apenas uma coluna. **Notação Genérica:** $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times 1}$

EXEMPLO: $C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Matriz Nula: é aquela que possui todos os seus elementos nulos. **Notação Genérica:** $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ com $a_{ij} = 0, \forall i, j$ **, ou ainda,** $A = \left(0\right)_{m\times n}$ **. às vezes, denotamos, por comodidade, a qualquer matriz nula simplesmente por** 0 **, sem mencionar explicitamente a ordem.**

EXEMPLO: $\left(0\right)_{2\text{x }3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou, simplesmente, como explicado acima: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Matriz Quadrada: é uma matriz que possui o número de linhas **igual** ao número de colunas, ou seja, ela é do tipo $n \times n$. Dizemos simplesmente que a matriz é de **ordem** n.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Diagonal Secundária

Diagonal Principal

Matriz Diagonal: é uma **matriz quadrada** na qual todos os elementos não pertencentes à diagonal principal são iguais a zero. **Notação Genérica:** $D = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ **onde**: $a_{ij} = 0 \quad se \quad i \neq j$.

EXEMPLOS: a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$; c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Matrizes Triangulares: Uma **matriz quadrada** na qual todos os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero é chamada de **Triangular Inferior** e uma **matriz quadrada** na qual todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero é chamada de **Triangular Superior**. Uma **matriz quadrada** que é **Triangular Inferior** ou **Triangular Superior** é simplesmente chamada de matriz **Triangular**.

EXEMPLOS:

a) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ exemplo genérico de uma matriz triangular inferior de ordem 3×3.

b) $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ exemplo genérico de uma matriz triangular superior de ordem 3×3.

Matriz Identidade ou Matriz Unidade: é uma **matriz quadrada** que possui todos elementos não pertencentes à diagonal principal nulos e os elementos da diagonal principal iguais a um (ou seja, é uma matriz diagonal na qual os elementos pertencentes à diagonal principal são iguais a 1).

Notação Genérica: $I_n = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$ **onde**: $a_{ij} = \begin{cases} 0 & se \quad i \neq j \\ 1 & se \quad i = j \end{cases}$

EXEMPLOS:

a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, também chamada de **matriz identidade de ordem** 2;

b) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, também chamada de **matriz identidade de ordem** 3.

Matriz Simétrica: Uma **matriz quadrada** é dita simétrica quando **todos os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal forem iguais**.

OBSERVAÇÃO: Uma matriz simétrica A **é sempre igual à sua transposta, isto é,** $A = A^t$ **.**

EXEMPLO: $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & \pi & 8 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ é uma matriz simétrica. Note que $A = A^t$.

APLICAÇÃO: Se a matriz **A** = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2y \\ x & 0 & z-1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica, calcule $x+y+z$. **RESPOSTA: 5**

__Matriz Anti-Simétrica__: Uma **matriz quadrada** é dita anti-simétrica quando **todos os elementos da diagonal principal forem iguais a zero** e os **elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal forem opostos**..

EXEMPLO: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -8 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz anti-simétrica..

OPERAÇÕES COM MATRIZES

__Adição e Subtração__: Para adicionar ou subtrair matrizes **de mesma ordem**, basta adicionar ou subtrair os elementos correspondentes. Matematicamente: $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in$

EXEMPLO: $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -8 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

__Multiplicação de uma matriz por uma constante__: Para se efetuar a multiplicação de uma matriz por um dado número real, basta multiplicar cada elemento da matriz pelo número dado.

EXEMPLOS:

a) $2.\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ \pi & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2\pi & -6 \end{pmatrix}$

b) $(-1).\begin{pmatrix} 3 & -\pi \\ -1 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & \pi \\ 1 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

(De um modo geral, dada uma matriz **A**: **(– 1).A = – A** é chamada oposta de **A**).

Voltando à definição de matriz anti-simétrica**:** Uma matriz anti-simétrica é sempre igual à oposta de sua transposta, isto é, $A = -A^t$.

__Multiplicação de Matrizes__: Para se efetuar a multiplicação entre duas matrizes **A** e **B** de ordens **m x n** e **n x p**, respectivamente, basta multiplicarmos cada linha da primeira matriz por todas as colunas da segunda matriz, obtendo assim uma matriz de ordem **m x p**.

IMPORTANTE: Note que o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz para que a multiplicação de matrizes seja possível.

EXEMPLO:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 & -4 \\ 15 & -6 & -9 & 12 \\ 22 & -7 & -24 & 20 \end{pmatrix}$$

3 x 2 2 x 4 3 x 4

OBSERVAÇÕES:

1) **Qualquer** matriz **X** multiplicada pela matriz identidade **dá como resultado a própria matriz X.** (desde quando seja possível multiplicá-las!).

EXEMPLO: $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2) **Qualquer** matriz multiplicada por uma **matriz nula** (desde quando seja possível multiplicá-las!) **dá como resultado <u>*uma*</u> matriz nula (podendo ou não ser a mesma matriz nula dada).**

EXEMPLO: $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

APLICAÇÕES:

1) Sendo $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, determine $\boldsymbol{x - 5y}$.

2) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, considere a matriz $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{X = A^t \,.\, B - 6 \,.\, B^t}$.

Sabendo-se que o traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos da sua diagonal principal, determine o traço da matriz $\boldsymbol{X}$.

3) Sejam as matrizes: $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 4\end{pmatrix}$, $Z=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ então temos:

a) **B.A = I** b) **B.A = A.B** c) **A = 2.B** d) **A.I = B.Z** e) **N.R.A**

4) Calcule **A.B** e **B.A**, considerando as matrizes **A** e **B** abaixo:

A = $\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ e **B** = $\begin{pmatrix}4 & 3\\1 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}$ (você notará que B.A $\neq$ A.B).

RESPOSTAS

1) 7 2) 2 3) e) 4) ***A.B*** = $\begin{pmatrix}16 & 14\\13 & 12\end{pmatrix}$ e ***B.A*** = $\begin{pmatrix}13 & 11 & 20\\10 & 5 & 5\\5 & 5 & 10\end{pmatrix}$

PRIMEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Determine a matriz **A = ($\mathbf{a_{ij}}$)$_{\mathbf{4\times 4}}$** com $a_{ij}=\begin{cases}2i-j, & \text{se } i<j\\ i^2-3j, & \text{se } i=j\\ i-2, & se\ i>j\end{cases}$ **RESPOSTA**: $\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1 & -2\\0 & -2 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 2\\2 & 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$

2) Se $\begin{pmatrix}1 & x-2y\\x+18 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & y+1\\y-3x & 4\end{pmatrix}$, determine $x.y$. **RESPOSTA**: 10

3) Calcule os valores de ***x, y, z*** e ***t*** tal que $\begin{pmatrix}2x+y & t\\z-t & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\0 & y+2z\end{pmatrix}$.

RESPOSTA: $x=-1,\ y=5,\ z=-1\ e\ t=-1$

4) Sendo **A** = $\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}$ e **B** = $\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$, calcular as matrizes **X** e **Y** no sistema $\begin{cases}2X+3Y=B\\3X+2Y=A\end{cases}$.

RESPOSTA: $X=\frac{1}{5}\times\begin{pmatrix}6 & -1\\11 & 6\end{pmatrix}$ e $Y=\frac{1}{5}\times\begin{pmatrix}-4 & -1\\-9 & -4\end{pmatrix}$

5) Determine ***x, y*** e ***z*** e a matriz **B** de modo que **A.B** = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}$ sabendo que **A** = $\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{pmatrix}$ e **B** é uma matriz diagonal.

RESPOSTAS: $x = 1,\ y = 4\ e\ z = 4$ **e** $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

6) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **Verifique que são** satisfeitas as seguintes propriedades:

a) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associativa na adição).

b) $(A+B) = (B+A)$ (comutativa na adição).

c) $A+(-A) = 0$ (matriz oposta).

d) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B,\ \forall \lambda \in \Re$. (distributiva por escalar).

e) $(AB)C = A(BC)$ (associativa na multiplicação).

f) $(A+B)C = AC + BC$ (distributiva à direita).

g) $A(B+C) = AB + AC$ (distributiva à esquerda).

h) $AB \neq BA$ (as matrizes não comutam necessariamente).

i) $(A^t)^t = A$.

j) $(A+B)^t = A^t + B^t$.

k) $(\lambda A)^t = \lambda(A^t),\ \forall \lambda \in \Re$.

l) $(AB)^t = B^t A^t$ (verifique também que é falso que $(AB)^t = A^t B^t$).

7) Considere as seguintes matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $E = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$.

a) Determine $A^2 = AA$ e AC;
b) Mostre que as matrizes ***D*** e ***E*** comutam [1] e ***A*** e ***B*** não comutam [2]. ([1] $DE = ED$ e [2] $AB \neq BA$)

RESPOSTA: a) $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 & 9 & -6 \\ -5 & -33 & 32 \end{pmatrix}$

8) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Ache uma matriz $B = \left(b_{ij}\right)_{2x3}$, **com todos os elementos distintos**, tal que $AB = 0$.

<u>ATENÇÃO</u>: (Observe, no exemplo acima, que $AB = 0$ **não implica** $A = 0$ ou $B = 0$, onde 0 representa uma matriz nula).

RESPOSTA: $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. **Existem outras respostas.**

9) Determine, se possível, $x, y \in \mathbb{R}$ para que a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2x & 1 \\ x^2 & 3y-1 & -4x \\ x+1 & x^3 & 0 \end{pmatrix}$ seja:

a) simétrica. b) anti-simétrica

RESPOSTA: a) $x = 0 \ e \ \forall y \in \mathbb{R}$. b) $x = -2 \ e \ y = 1/3$.

OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE LINHAS DE UMA MATRIZ

1) Permutar duas linhas entre si.

EXEMPLO 1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L'_3 = L_2]{L'_2 = L_3} B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$ ou então, simplesmente $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \Leftrightarrow L_3} B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

2) Multiplicar uma linha por uma constante real $k \neq 0$ (de um modo geral a constante k é um número complexo, mas no nosso curso trabalharemos apenas números reais.

EXEMPLO 2:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow{L'_3 = \frac{-2}{3} L_3} D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ -10/3 & 14 \end{bmatrix}.$$

3) Somar a uma linha de uma matriz A uma outra linha de A multiplicada por uma constante.

EXEMPLO 3:

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & -3 & \pi & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L'_3 = L_3 + (-2)L_1} F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & -3 & \pi & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Toda operação elementar sobre linha pode ser revertida, assim:

EXEMPLO 1: $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \Leftrightarrow L_3} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$

EXEMPLO 2: $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ -10/3 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{L'_3 = \frac{-3}{2} L_3} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & -21 \end{bmatrix}.$

EXEMPLO 3: $F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & -3 & \pi & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L'_3 = L_3 + 2L_1} E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & -3 & \pi & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$

Vamos "algebrizar" (no que segue abaixo considere que e_i significa operação elementar de ordem i):

$e_1 : L_i \Leftrightarrow L_j$ a "inversa" é $e'_1 : L_j \Leftrightarrow L_i$ (permutar).

$e_2 : L'_i = k.L_i \, (k \neq 0)$ a "inversa" é $e'_2 : L_i = \frac{1}{k}.L'_i$.

$e_3 : L'_i = L_i + k.L_j \, (i \neq j)$ a "inversa" é $e'_3 : L_i = L'_i - k.L_j$.

DEFINIÇÃO: Se a matriz B é obtida de A por um número finito de operações elementares, dizemos que B é linha equivalente a A. Notação: $B \sim A$.

Note que a relação $\sim$ (linha equivalência entre matrizes) é uma relação de equivalência:

1) $A \sim A$ (propriedade reflexiva).

2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (propriedade simétrica).

3) $(A \sim B \;\; e \;\; B \sim C) \Rightarrow A \sim C$ (propriedade transitiva).

MATRIZ LINHA REDUZIDA À FORMA ESCADA OU ESCALONADA

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Podemos reduzir a matriz A a uma matriz B, linha equivalente a A e que esteja numa forma denominada ***forma escada (ou escalonada).***

Dizemos que B está na forma escada se e somente se:

1) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1;
2) A coluna que contém o primeiro elemento não nulo de uma linha tem os demais elementos iguais a zero;
3) Toda linha nula ocorre abaixo das linhas não nulas;
4) O primeiro elemento não nulo de qualquer linha não nula aparece numa coluna posterior (mais para a direita) àquela onde figura o primeiro elemento não nulo de qualquer linha precedente.

Identifique quais matrizes abaixo estão na forma escada:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **RESPOSTA: SIM**

b) $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ **RESPOSTA: NÃO SATISFAZ 4)**

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **RESPOSTA: SIM**

d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **RESPOSTA: SIM**

e) $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **RESPOSTA: NÃO SATISFAZ 3) NEM 2)**

f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **RESPOSTA: SIM**

g) $G = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ **RESPOSTA: SIM**

h) $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **RESPOSTA: NÃO SATISFAZ 2)**

i) $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **RESPOSTA: SIM**

EXERCÍCIO: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ ache a matriz B linha equivalente a A, na forma escada.

RESPOSTA: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

PROPOSIÇÃO: Toda matriz $A_{m \times n}$ é linha equivalente a uma **única** matriz reduzida à forma escalonada.
(Ver demonstração em qualquer livro da bibliografia).

POSTO DE UMA MATRIZ

Seja $A_{m \times n}$ uma matriz e B a matriz escalonada, linha equivalente a A.

Definimos ***posto de*** A que denotaremos por $p(A)$ ao número de linhas não nulas de B.

APLICAÇÕES:

Determine o posto das matrizes abaixo:

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ **RESPOSTA: 2** b) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 14 \end{bmatrix}$ **RESPOSTA: 2** c) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 7 & 21 \\ \pi & 3\pi \end{pmatrix}$ **RESPOSTA: 1**

SISTEMAS LINEARES

INTRODUÇÃO

As equações não existem por si, ou seja, não são invenções abstratas da Matemática. Muito pelo contrário, decorrem de situações concretas de nosso quotidiano. Veja os seguintes exemplos e suas respectivas representações na linguagem matemática:

a) A diferença entre as idades de Magno e Marcos é de 4 anos: **x – y = 4**

b) Numa fábrica trabalham 532 pessoas entre homens e mulheres. O número de homens é o triplo do número de mulheres: **x + y = 532 e x = 3y**

Os exemplos citados representam **equações lineares** e, ao conjunto destas, chamamos de **Sistemas Lineares**.

A resolução de sistemas lineares é um problema que surge em diversas áreas do conhecimento e ocorre, na prática, com muita freqüência. Por exemplo: cálculo de estruturas na Construção Civil, cálculo do ponto de equilíbrio de mercado na Economia e dimensionamento de redes elétricas.

EQUAÇÃO LINEAR

Entende-se por equação linear toda expressão da forma $\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b}$ onde:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são incógnitas ou termos desconhecidos e $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais chamados coeficientes e b é um número real chamado termo independente ou seja, **<u>em cada termo</u>** da equação linear aparece uma única incógnita e seu expoente é sempre igual a 1

EXEMPLOS:

$a)\ 2x_1 + x_2 = 12 \quad \text{ou} \quad 2x + y = 12$

$b)\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 15 \quad \text{ou} \quad x + 2y - 3z = 15$

$c)\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 10 \quad \text{ou} \quad 3x - 4y + z - 5w = 10$

SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR

Uma solução de uma equação linear é uma seqüência de números reais $\boxed{(k_1\,,\,k_2\,,\,k_3\;,\,\ldots\,,\,k_n)}$, tal que, substituindo-se respectivamente as incógnitas da equação pelos números reais k_1, ... , k_n , na ordem em que se apresentam, verifica-se a igualdade, ou seja,

$$a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \ldots + a_nk_n = b$$

EXEMPLOS: a) Uma solução da equação $2x+4y=22$ é o par (5, 3)
b) Uma solução da equação $3x+2y-5z=32$ é a terna (2, 3, – 4)
c) Uma solução da equação $x+2y-4z+w=3$ é a quadra (3, 2, 1, 0)

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

1. Se $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = b = 0$ **então qualquer ênupla** $(k_1\,,\,k_2\,,\,k_3\;,\,\ldots\,,\,k_n)$ **é solução.**

2. Se $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ e $b \neq 0$ **então a equação não admite solução.**

SISTEMAS LINEARES

Chama-se **SISTEMA LINEAR** ao conjunto de duas ou mais equações lineares.

EXEMPLOS: $a)\ \begin{cases} x-y=4 \\ 3x+y=2 \end{cases}$; $b)\ \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$; $c)\ \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-y+z=3 \\ 7x-2y-z=9 \end{cases}$; $d)\ \begin{cases} x-y=2 \\ 3x+2y=1 \\ 8x+2y=6 \end{cases}$

Genericamente, um sistema linear S de **m** equações e **n** incógnitas é escrito:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_3 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Abreviadamente, o sistema linear é representado por: $S = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j = b_i\ ,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ m$

SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Dizemos que a ênupla $(k_1\,,\,k_2\,,\,k_3\;,\,\ldots\,,\,k_n)$ é solução de um sistema linear se verificar, **simultaneamente**, todas as equações do sistema

EXEMPLOS: a) o par $(5,1)$ é solução do sistema $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x-5y=10 \end{cases}$

b) o terno $(\,1, 3, -2\,)$ é solução do sistema $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x-y-z=3 \\ x+y-z=6 \end{cases}$

MATRIZES ASSOCIADAS A UM SISTEMA LINEAR

De um modo geral, qualquer sistema linear pode ser escrito na forma matricial: $A \,.\, X = B$.

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$ são, respectivamente, matriz dos

coeficientes (incompleta), matriz das incógnitas (solução) e matriz dos termos independentes.

Pode-se associar, também, a um sistema linear uma matriz denominada **matriz completa** (ou matriz ampliada) que é:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

EXEMPLO: Representar matricialmente o sistema $\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ 3x-y=7 \\ 4x+3y+7z=2 \end{cases}$

RESPOSTA: $A \,.\, X = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Os sistemas lineares são classificados quanto ao número de soluções ou quanto aos termos independentes.

QUANTO AO NÚMERO DE SOLUÇÕES O SISTEMA PODE SER:

1) POSSÍVEL (OU COMPATÍVEL) - ***quando admite solução***.

Neste caso, é dito:

1.1) Determinado - quando possuir única solução (**SPD**)

1.2) Indeterminado - quando possuir infinitas soluções (**SPI**)

2) IMPOSSÍVEL (OU INCOMPATÍVEL) - ***quando não admite solução*** (**SI**)

EXEMPLOS:

a) O sistema $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x - 5y = 5 \end{cases}$ é Possível e Determinado (**SPD**), pois apresenta uma única solução:
S = {(5, 1)}

b) O sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases}$ é Possível e Indeterminado (**SPI**), pois apresenta infinitas soluções:

S = {(***k, 4 – k*** **)} com** $k \in \mathbb{R}$

c) O sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ x + y = 20 \end{cases}$ é Impossível (**SI**), pois não existe par ordenado **(x, y)**, de números reais, que torne as duas equações simultaneamente verdadeiras.

Graficamente, se um sistema de duas equações e duas incógnitas for SPD ele será representado por duas retas concorrentes; se SPI, por duas retas coincidentes; e se SI, por duas retas paralelas.

QUANTO AOS TERMOS INDEPENDENTES

1. **Homogêneo** - se os termos independentes são todos nulos
2. **Não Homogêneo** - caso contrário

EXEMPLOS: a) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ -x + y - 8z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Homogêneo b) $\begin{cases} 5x + 3y - 3z = 0 \\ 4x + 5y - 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 7 \end{cases} \Rightarrow$ Não Homogêneo

Todo **sistema linear homogêneo** sempre tem solução; uma delas é a ênupla **(0, 0, 0, ... , 0)** que é chamada de **solução trivial**. Qualquer outra solução, se existir, é chamada de **solução não-trivial**.

Vamos agora, fazer uma “ponte’ entre a teoria das matrizes, vista anteriormente, e a teoria dos sistemas lineares, que acabamos de estudar.

Primeiramente, gostaríamos que você resolvesse os sistemas abaixo (pelo método que você achar melhor!)

a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+y=4 \\ 5x+7y=14 \end{cases}$ **RESPOSTA:** $\{(7,-3)\}$.

b) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+y=4 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$ **RESPOSTA: IMPOSSÍVEL, isto é** $S=\varnothing$.

c) $\begin{cases} 2x+4y=8 \\ x+2y=4 \\ 3x+6y=12 \end{cases}$ **RESPOSTA: INDETERMINADO, cuja solução é** $S=\{(4-2a,a),\ com\ a\in\mathbb{R}\}$.

Para resolver os sistemas acima (e outros "maiores") existem técnicas bastante eficientes. Essas técnicas têm como suporte o importante teorema: (Ver demonstração em qualquer livro da bibliografia)

TEOREMA: Seja A a matriz ampliada de um sistema linear com m equações e n incógnitas e seja C a matriz dos coeficientes:

1) O sistema tem solução (isto é, **é possível**) se e somente se, $p(A)=p(C)$ (Logo, se $p(A)\neq p(C)$ o sistema **é impossível**).

2) Se $p(A)=p(C)=n$, o sistema tem solução única.

3) Se $p(A)=p(C)=v<n$, o sistema é indeterminado (e, neste caso dizemos que o sistema tem $n-v$ variáveis livres).

EXERCITE SEUS NEURÔNIOS

Resolva os sistemas abaixo por escalonamento, isto é**, reduzindo a matriz ampliada à forma escada**:

a) $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x-y-2z=-4 \end{cases}$ **RESPOSTA:** $S=\{(1,3,2)\}$

b) $\begin{cases} x+y-3z+t=1 \\ 3x+3y+z+2t=0 \\ 2x+y+z-2t=4 \end{cases}$ **RESPOSTA:** $S=\{(26z+12,-33z-14,z,t),\ com\ z \text{ e } t\in\mathbb{R}\}$

c) $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 3x+2y+z=0 \\ 5x+5y+z=-4 \end{cases}$ **RESPOSTA:** $S=\left\{\left(\frac{8-3z}{5},\frac{-12+2z}{5},z\right), com\ z\in\mathbb{R}\right\}$

d) $\begin{cases} x+4y=-8 \\ 3x-y=15 \\ 10x-12y=7 \end{cases}$ **RESPOSTA:** $S=\varnothing$

e) $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x-y+z=2 \\ 5x-3y+z=2 \end{cases}$ **RESPOSTA:** $S=\{(1,2,3)\}$

f) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+4y+6z=2 \\ 4x+5y+5z=3 \end{cases}$ **RESPOSTA: IMPOSSÍVEL, logo** $S=\varnothing$

g) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+4y+6z=2 \\ 4x+5y+5z=2 \end{cases}$ **RESPOSTA:** $S=\{(10z-2,2-9z,z), com\ z\in\mathbb{R}\}$

EXERCÍCIOS DE CLASSE

1) Determine o conjunto solução do sistema: $\begin{cases} 2x+4y-5z+6t-5w=-1 \\ 2x+4y-10z+6t+12w=28 \\ -2z+7w=12 \end{cases}$

RESPOSTA: Como $P(C)=P(A)=3<5$ o sistema é indeterminado, com 5 – 3 = 2 variáveis livres. A solução geral é $S=\{(-2y-3t,y,1,t,2), com\ y\ e\ t\in\mathbb{R}\}$.

2) Considere o sistema: $\begin{cases} -3x+3y-5z=-2 \\ 2x+4y-6z=8 \\ 4x-y+(a^2-7)z=a+3 \end{cases}$. Determine os valores de a de modo que:

a) O sistema seja possível e determinado
b) O sistema seja indeterminado
c) O sistema seja impossível

RESPOSTA: $\begin{cases} Se\ a \neq \pm 3,\ o\ sistema\ é\ possível\ e\ determinado \\ Se\ a = 3,\ o\ sistema\ é\ possível\ e\ indeterminado \\ Se\ a = -3,\ o\ sistema\ é\ impossível \end{cases}$

3) Para que valores de m o sistema: $\begin{cases} (m-3)x + y = 0 \\ x + (m-3)y = 0 \end{cases}$ tem solução não trivial?

RESPOSTA: $m = 2\, ou\ m = 4$

4) Resolva o sistema $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{8}{z} = 0 \\ \frac{-1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} = 5 \end{cases}$ **RESPOSTA:** $S = \left\{ \left(\frac{7}{11}, \frac{1}{2}, \frac{-7}{8} \right) \right\}$

MATRIZES ELEMENTARES

Uma matriz E de ordem n é ***elementar*** se, e somente se, $E = e_1 I_n$ (onde e_1 é uma operação elementar).

EXEMPLO 1:

$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar, pois é obtida do seguinte modo:

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \Leftrightarrow L_1} E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, isto é, a operação elementar utilizada foi: $e_1 : L_2 \Leftrightarrow L_1$.

EXEMPLO 2:

$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar, desde que:

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L'_2 = 7L_2} E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, isto é, a operação elementar utilizada foi: $e_1 : L_2' = 7.L_2$.

EXEMPLO 3:

$E=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}$ é uma matriz elementar, pois:

$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_2^{'}=L_2+3L_1}E=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}$, isto é, a operação elementar utilizada foi: $e_1:L_2^{'}=L_2+3.L_1$.

PROPOSIÇÃO: Se A é uma matriz $m\times n$ e e_1 é uma operação elementar tal que $e_1A=E.A$, então $E=e_1I$ (a ordem da matriz E e também da matriz I é m).

(Ver demonstração em qualquer livro da bibliografia).

EXEMPLO 1:

Seja $A=\begin{bmatrix}1 & 5\\-2 & 3\\0 & 4\end{bmatrix}$. Considere a operação elementar $e_1:L_2^{'}=L_2+4.L_1$, logo: $e_1A=\begin{bmatrix}1 & 5\\0 & 13\\0 & 4\end{bmatrix}$.

Faça esta mesma operação elementar, sobre a matriz identidade de ordem **3**, assim:

$I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{L_2^{'}=L_2+2L_1}E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Multiplique agora, E por A, ou seja:

$$E.A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 5\\-2 & 3\\0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\0 & 13\\0 & 4\end{bmatrix}=e_1A.$$

EXEMPLO 2:

Considere $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\3 & 4\end{pmatrix}$. Seja a operação elementar $e_1:L_2^{'}=\frac{2}{3}L_2$, portanto: $e_1B=\begin{pmatrix}2 & 5\\2 & 8/3\end{pmatrix}$.

Faça esta mesma operação elementar, sobre a matriz identidade de ordem 2, assim:

$I_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2^{'}=\frac{2}{3}L_2}E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2/3\end{pmatrix}$. Multiplique agora, E por B, deste modo:

$E.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 8/3 \end{pmatrix} = e_1 B$.

MATRIZ INVERSÍVEL

Uma matriz quadrada A de ordem n é inversível se existe uma matriz B tal que $A.B = B.A = I_n$.

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$, note que $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ é tal que $A.B = B.A = I_2$. Notação: $A^{-1} = B$.

Considere $M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, determine M^{-1}.

Seja $G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$, determine G^{-1}.

OBSERVAÇÕES:

1) Toda matriz elementar é inversível.
2) Se A e B são inversíveis, de mesma ordem, então $A.B$ é inversível e $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
3) Se a matriz A é inversível, A^t também é inversível e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
4) Se A tem uma linha (ou coluna) nula, A não é inversível.

Temos agora o importante resultado:

TEOREMA: $A_{n\times n}$ é inversível se, e somente se, $A \sim I_n$.

(Ver demonstração em qualquer livro da bibliografia).

Uma importante aplicação do teorema acima é o cálculo da matriz inversa de uma matriz A (se, é claro, A for inversível). Veja o exemplo abaixo.

Suponha que queremos achar a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

PRIMEIRO PASSO: Coloque a matriz identidade de ordem **4** ao lado da matriz A acima:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SEGUNDO PASSO: Aplique as operações elementares sobre linhas para reduzir a matriz dada (a matriz à esquerda) à forma escalonada; ao mesmo tempo efetue as mesmas operações à matriz identidade (a matriz à direita). Se ao final das operações elementares você conseguir transformar a matriz A na matriz identidade, neste momento observe a matriz à direita, ela é a matriz inversa procurada.

Vamos mostrar as operações elementares e achar a matriz inversa de A:

i) Trocando de lugar a primeira linha e a segunda linha, teremos: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii) Somando à quarta a primeira e à segunda, a primeira linha multiplicada por – 2, obteremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & | & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) Subtraindo a segunda linha da terceira: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & | & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & | & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iv) Trocando o sinal da terceira linha e, depois, anulando os outros elementos da terceira coluna da matriz à esquerda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & | & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & | & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & | & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

v) Finalmente, anulando os elementos da quarta coluna (exceto o último) da matriz à esquerda, obteremos a matriz identidade à esquerda e a matriz inversa de A denotada por A^{-1} à direita:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{assim: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS

1) Determine, se possível, a inversa das matrizes abaixo:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ **RESPOSTA:** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 3/10 \\ 2/5 & -1/10 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ **RESPOSTA:** A matriz A não é inversível

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **RESPOSTA:** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/36 & 1/18 \\ 2/3 & 5/9 & -7/9 \\ 1/2 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$

2) Ache o conjunto solução do sistema usando escalonamento e depois usando a matriz inversa:

$$\begin{cases} 3x - 3y + 5z = 1 \\ 2x + 4y - 6z = 0 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$$ **RESPOSTA:** $S = \left\{ \left(\frac{5}{18}, \frac{-8}{9}, \frac{-1}{2} \right) \right\}$

3) **Prove que** se ***A*, *B*** e ***C*** são matrizes inversíveis de ordem ***n***, então $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

4) Sejam ***A*, *B*** e ***C*** matrizes inversíveis de mesma ordem. Resolva as equações em ***X*,** sabendo-se que:

a) $A.X.B = C$ b) $A.(B + X) = A$ c) $A.C.X.B = C$

RESPOSTAS: a) $X = A^{-1}.C.B^{-1}$ b) $X = I - B$ c) $X = C^{-1}.A^{-1}.C.B^{-1}$

ESPAÇOS VETORIAIS

ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS E CONVENÇÕES:

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Um ***corpo numérico*** K é qualquer subconjunto de $\mathbb{C}$ (não vazio e diferente de $\{0\}$), que é fechado em relação às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (com divisor diferente de zero). Ou seja, se K é um corpo numérico e $x, y \in K$, então $x+y, x-y \; e \; x.y$ são elementos de K, e se $y \neq 0$, então $x / y \in K$.

OBSERVAÇÃO: CONSIDERAREMOS EM NOSSO CURSO APENAS O CORPO NUMÉRICO DOS NÚMEROS REAIS.

DEFINIÇÃO

Dizemos que um conjunto $V \neq \varnothing$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ quando, e somente quando:

I) Existe uma adição $(u,v) \mapsto u+v$ em V, com as seguintes propriedades:

1) $u+v=v+u$, $\forall u,v \in V$ **(Comutatividade)**;

2) $(u+v)+w=u+(v+w)$, $\forall u,v,w \in V$ **(Associatividade)**;

3) Existe em V um elemento neutro para essa adição, o qual será simbolizado genericamente por 0. Ou seja: $\exists\, 0 \in V$ tal que $v+0=v$, $\forall v \in V$ (Pode-se provar que esse 0 é único.) **(Elemento neutro)**;

4) Para todo elemento u de V existe o **simétrico** (ou **oposto**), indicaremos por $(-u)$ esse oposto. Assim $\forall u \in V, \exists (-u) \in V$ tal que $u+(-u)=0$; (Pode-se provar que esse oposto é único). Dizemos que todo elemento de V é simetrizável em relação à adição.

II) Está definida uma multiplicação de $\mathbb{R} \times V$ em V, o que significa que a cada par (α, u) de $\mathbb{R} \times V$ está associado um único elemento de V que se indica por $\alpha \bullet u$, e para essa multiplicação tem-se o seguinte, para todos $u, v \in V \; e \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

5) $\alpha \bullet (u+v) = \alpha \bullet u + \alpha \bullet v$; (Distributividade com relação à soma de vetores)
6) $(\alpha + \beta) \bullet u = \alpha \bullet u + \beta \bullet u$; (Distributividade com relação à soma de escalares)
7) $\alpha \bullet (\beta \bullet v) = (\alpha\beta) \bullet v$; (Associatividade da multiplicação por escalar)
8) $1 \bullet v = v$. (Onde 1 é o elemento unidade do corpo dos números reais)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

a) <u>Demonstraremos que</u> $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial se considerarmos as seguintes

operações: $\begin{cases} (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 \\ \alpha\bullet(a,b)=(\alpha a,\alpha b), \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

PROVA: Devemos demonstrar que valem as oito propriedades vistas acima na definição de Espaço vetorial:

$\forall u=(a,b), v=(c,d) \in \mathbb{R}^2$:

1) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, portanto está provada a **comutatividade**.

$(c,d)+(a,b)=(c+a,d+b)=(a+c,b+d)$

(Note que utilizamos a comutatividade da adição de números reais).

Provaremos agora a associatividade:

$\forall u=(a,b), v=(c,d), w=(e,f) \in \mathbb{R}^2$:

2) $[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a+c,b+d)+(e,f)=((a+c)+e,(b+d)+f)=(a+(c+e),b+(d+f))=$

$(a,b)+(c+e,d+f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)]$

Elemento Neutro:

Suponha que existe 0=(e_1,e_2), então,$\forall u=(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

3) $(a,b)+(e_1,e_2)=(a,b) \Rightarrow (a+e_1,b+e_2)=(a,b) \Rightarrow \begin{cases} a+e_1=a \\ b+e_2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1=0 \\ e_2=0 \end{cases}$, isto é,

o elemento neutro é $(e_1,e_2)=(0,0)$

Elemento Simétrico:

Suponha que existe $-u=(s_1,s_2)$, então,$\forall u=(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

4) $(a,b)+(s_1,s_2)=(0,0) \Rightarrow (a+s_1,b+s_2)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} a+s_1=0 \\ b+s_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1=-a \\ s_2=-b \end{cases}$, portanto,

para cada elemento $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ existe o simétrico $-u=(s_1,s_2)=(-a,-b) \in \mathbb{R}^2$

Distributividade com relação à soma de vetores:

$\forall u=(a,b), v=(c,d) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, devemos mostrar que $\alpha\bullet(u+v)=\alpha\bullet u+\alpha\bullet v$

5) $\alpha\bullet(u+v)=\alpha\bullet[(a,b)+(c,d)]=\alpha\bullet(a+c,b+d)=(\alpha.(a+c),\alpha.(b+d))=(\alpha.a+\alpha.c,\alpha.b+\alpha.d)=$

$(\alpha.a,\alpha.b)+(\alpha.c,\alpha.d)=\alpha\bullet(a,b)+\alpha\bullet(c,d)=\alpha\bullet(u+v)=\alpha\bullet u+\alpha\bullet v$

6) Distributividade com relação à soma de escalares:

$\forall u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, devemos mostrar que $(\alpha + \beta) \bullet u = \alpha \bullet u + \beta \bullet u$

$$(\alpha + \beta) \bullet u = (\alpha + \beta) \bullet (a,b) = ((\alpha + \beta).a, (\alpha + \beta).b) = (\alpha.a + \beta a, \alpha.b + \beta b) =$$
$$(\alpha.a, \alpha.b) + (\beta.a, \beta.b) = \alpha \bullet (a,b) + \beta \bullet (a,b) = \alpha \bullet u + \beta \bullet u$$

7) Associatividade da multiplicação por escalar:

$\forall v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, provaremos que $\alpha \bullet (\beta \bullet v) = (\alpha\beta) \bullet v$

$$\alpha \bullet (\beta \bullet v) = \alpha \bullet (\beta \bullet (a,b)) = \alpha \bullet (\beta.a, \beta.b) = (\alpha.\beta.a, \alpha.\beta.b) = (\alpha.\beta) \bullet (a,b) = (\alpha\beta) \bullet v$$

8) Mostraremos agora que: $\forall v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$1 \bullet v = 1 \bullet (a,b) = (1.a, 1.b) = (a,b) = v$$

Desde que todas as 8 propriedades foram satisfeitas, concluímos que $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ é um

espaço vetorial se considerarmos as seguintes operações: $\begin{cases} (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d), \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 \\ \alpha \bullet (a,b) = (\alpha a, \alpha b), \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$.

b) <u>Verifique se</u> $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ se considerarmos as seguintes operações:

$$\begin{cases} (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d), \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 \\ \alpha \bullet (a,b) = (\alpha a, b), \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Observe que o problema agora pede para <u>verificar se</u> $\mathbb{R}^2$ com as operações acima é um espaço vetorial. Vamos verificar as propriedades uma a uma, mas se qualquer uma delas não for verificada podemos garantir que $\mathbb{R}^2$ com as operações acima não é um espaço vetorial. Vamos ao trabalho!

As propriedades 1,2, 3 e 4 já foram verificadas no exercício a), que fizemos anteriormente (observe que a definição de soma de vetores é a mesma, tanto para a letra a) quanto para a letra b)).
Desde que a multiplicação de um escalar por um vetor da letra a) é diferente da multiplicação por escalar da letra b), devemos verificar as propriedades restantes (você verá que não precisaremos verificar todas as 8!).

5) Distributividade com relação à soma de vetores:

$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, devemos mostrar que $\alpha \bullet (u+v) = \alpha \bullet u + \alpha \bullet v$

$$\alpha \bullet (u+v) = \alpha \bullet [(a,b) + (c,d)] = \alpha \bullet (a+c, b+d) = (\alpha.(a+c), b+d) = (\alpha.a + \alpha.c, b+d) =$$
$$(\alpha.a, b) + (\alpha.c, d) = \alpha \bullet (a,b) + \alpha \bullet (c,d) = \alpha \bullet u + \alpha \bullet v$$

Distributividade com relação à soma de escalares:

6) $\forall u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, devemos mostrar que $(\alpha+\beta) \bullet u = \alpha \bullet u + \beta \bullet u$

$(\alpha+\beta)\bullet u = (\alpha+\beta)\bullet(a,b) = ((\alpha+\beta)a, b) = (\alpha.a + \beta a, b) =$ (note que $b = b + 0$)

$(\alpha.a, b) + (\beta.a, 0) = \alpha\bullet(a,b) + \beta\bullet(a,0) \neq \alpha\bullet(a,b) + \beta\bullet(a,b) = \alpha\bullet u + \beta\bullet u$

Desde que a propriedade 6) **<u>não</u>** foi satisfeita, garantimos que $\mathbb{R}^2$ com as operações acima **<u>não</u>** é um espaço vetorial. (apenas por curiosidade, verifique **que valem** as propriedades 7) e 8))

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(PREZADO ALUNO, TESTE AS OITO PROPRIEDADES, COM TODA A ATENÇÃO! SENÃO, INFELIZMENTE ☹ VOCÊ TERÁ DIFICULDADES NA PROVA...)

i) **<u>Verifique se</u>** $V = \{(3,x) / x \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ se considerarmos as seguintes operações:

$\begin{cases} (3,x)+(3,y) = (3,x+y), \forall (3,x),(3,y) \in V \\ \alpha\bullet(3,x) = (3,\alpha x), \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall (3,x) \in V \end{cases}$. **RESPOSTA: SIM.**

ii) **<u>Verifique se</u>** $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial se considerarmos as seguintes operações:

$\begin{cases} (a,b)+(c,d) = (a+c,b+d), \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 \\ \alpha\bullet(a,b) = (\alpha a,0), \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$. **RESPOSTA: NÃO. (NÃO VALE A PROPRIEDADE 8).**

<u>EXEMPLOS</u>:

1) O conjunto $\mathbb{R}$, com as operações usuais, é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$;

2) O conjunto $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, considerando as operações usuais;

3) O conjunto dos vetores da Geometria (ou da Física), definido por meio de segmentos orientados é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$;

4) O conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, considerando as operações usuais (revisadas no início desse material quando estudamos as matrizes, isto é, soma de matrizes e multiplicação de um número real por uma matriz);

5) O espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, considerando as operações usuais (o $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de todas as **ênuplas** de números reais $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$). Note que $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de todas as matrizes $1\times n$ de números reais, portanto as tais operações usuais são as mesmas definidas para matrizes;

6) Seja $n \geq 0$ um número natural. Indicaremos por $P_n(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n, mais o polinômio nulo. O conjunto (ou espaço) $P_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial com as operações usuais de soma de polinômios e de multiplicação de um polinômio por um número real. Isto é:

a) Se $f(t), g(t) \in P_n(\mathbb{R})$ então $f(t)+g(t) \in P_n(\mathbb{R})$;
b) Se $\alpha \in \mathbb{R}, f(t) \in P_n(\mathbb{R})$ então $\alpha \bullet f(t) \in P_n(\mathbb{R})$.

7) Seja $\Im$ = Conjunto das funções definidas de $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$, isto é, $\Im = \{\text{funções } f; f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Observe que, com as operações:

a) Se $f, g \in \Im$ então $(f+g)(t) = f(t)+g(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$;

b) Se $\alpha \in \mathbb{R}, f \in \Im$ então $\alpha \bullet f = \alpha.f(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

$\Im$ se torna um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. (demonstre!)

8) Seja $V = \{u \in \mathbb{R} / u > 0\}$. Se definirmos: $\begin{cases} u+v = u.v, \forall u, v \in V \\ \alpha \bullet u = u^{\alpha}, \forall u \in V \ e \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$, daí V se torna um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. (demonstre!)

RESUMINDO, SÃO ESPAÇOS VETORIAIS IMPORTANTES:

1) $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^n$;
2) O conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$;
3) O conjunto $P_n(\mathbb{R}) = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 / a_i \in \mathbb{R}, \text{ com } 0 \leq i \leq n\}$, isto é, o conjunto de todos os polinômios de grau $\leq n, com\ n \geq 0$ (inclusive o polinômio nulo);
4) O conjunto de todas as funções definidas de $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$,

SUBESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um subespaço vetorial de V é um subconjunto $W \subset V$ tal que:

a) O elemento neutro de V pertence a W. Ou seja, $0 \in W$;

b) $\forall u, v \in W,\ u+v \in W$ (onde + representa a mesma adição de vetores definida em V);

c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall u \in W$ *temos* $\alpha \bullet u \in W$ (a mesma multiplicação de um número real por um vetor em V).

PROPOSIÇÃO: Se W é um subespaço vetorial de um espaço vetorial real V, então W também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(Ver demonstração em qualquer livro da bibliografia).

PROPRIEDADES:

Seja V um espaço vetorial real:

1) $0 \bullet v = 0, \forall v \in V$ (**ATENÇÃO**: o zero do lado esquerdo é o número real zero e o zero do lado direito representa o vetor nulo do espaço vetorial V);

2) $\alpha \bullet 0 = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (**ATENÇÃO**: o zero do lado esquerdo e o zero do lado direito representam ambos o vetor nulo do espaço vetorial V);

3) $\alpha \bullet v = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ou $v = 0$ (interprete você mesmo a respeito do significado de cada zero!)

4) $-1 \bullet v = -v, \forall v \in V$

EXEMPLOS, CONTRA-EXEMPLOS E EXERCÍCIOS:

1) $\forall V$, V espaço vetorial, é imediato que $\{0\}$ e V são subespaços de V (chamados subespaços impróprios ou triviais).

2) $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y=0\}$ (isto é, ternos de números reais onde a soma das duas primeiras coordenadas é igual a zero!), com as operações usuais é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. (Você consegue ver que W_1 é um plano que passa na origem do sistema tridimensional? Procure desenhá-lo, ou use algum programa para vê-lo).

Faremos a demonstração de que $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y=0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, assim, devemos mostrar que:

a) O elemento neutro do $\mathbb{R}^3$ pertence a W_1. Ou seja, $0=(0,0,0)\in W_1$;
É óbvio, pois a soma das duas primeiras coordenadas do vetor $(0,0,0)$ é $0+0=0$.

b) $\forall u,v\in W_1,\ u+v\ \in W_1$ (onde + representa a mesma adição de vetores definida em $\mathbb{R}^3$);
Sejam $u=(a,b,c),v=(d,e,f)\in W_1$, então, pela definição de W_1, temos: $\begin{cases} a+b=0 \text{ (por causa de } u) \\ d+e=0 \text{ (por causa de } v) \end{cases}$,
vamos agora determinar $u+v$, $u+v=(a,b,c)+(d,e,f)=(a+d,b+e,c+f)$. Será que $u+v\ \in W_1$?
Basta verificarmos se a soma das duas primeiras coordenadas de $u+v$ é zero;
$(a+d)+(b+e)=(a+b)+(d+e)=0+0=0$. Beleza!

c) $\forall\alpha\in\mathbb{R}\ e\ \forall u\in W_1\ temos\ \alpha\bullet u\in W_1$ (a mesma multiplicação de um número real por um vetor em $\mathbb{R}^3$).

Seja $u=(a,b,c)\in W_1$, então, pela definição de W_1, temos: $a+b=0$, vamos agora determinar $\alpha\bullet u$,
$\alpha\bullet u=\alpha\bullet(a,b,c)=(\alpha.a,\alpha.b,\alpha.c)$. Agora queremos saber se que $\alpha\bullet u\in W_1$.
Novamente, basta verificarmos se a soma das duas primeiras coordenadas de $\alpha\bullet u$ é zero;
$\alpha.a+\alpha.b=\alpha(a+b)=\alpha.0=0$. Ok!

3) $W_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x-y=0\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$. (Prove você mesmo!)
(você consegue enxergar que W_2 é um plano que passa na origem do sistema tridimensional?)

4) $W_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,2x+3y-4z=0\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$. (Prove por si mesmo!)
(Mesma observação dos exercícios 2) e 3) acima ... Plano passando pela origem!)

5) Provaremos que $W_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x.z=0\}$ (isto é, ternos de números reais onde o produto da primeira pela terceira coordenada do vetor é igual a zero!) **<u>não</u>** é um subespaço do $\mathbb{R}^3$.

a) O elemento neutro do $\mathbb{R}^3$ pertence a W_4. Ou seja, $0=(0,0,0)\in W_4$;
É óbvio, pois o produto da primeira pela terceira coordenada do vetor $(0,0,0)$ é $0.0=0$.

b) $\forall u,v\in W_4,\ u+v\ \in W_4$ (onde + representa a mesma adição de vetores definida em $\mathbb{R}^3$);
Sejam $u=(a,b,c),v=(d,e,f)\in W_4$, então, pela definição de W_4, temos: $\begin{cases} a.c=0 \text{ (por causa de } u) \\ d.f=0 \text{ (por causa de } v) \end{cases}$,
vamos agora determinar $u+v$, $u+v=(a,b,c)+(d,e,f)=(a+d,b+e,c+f)$.
Será que $u+v\ \in W_4$?

Basta verificarmos se o produto da primeira pela terceira coordenada do vetor $u+v$ é zero;

$(a+d).(c+f) = \underbrace{a.c}_{=0} + a.f + d.c + \underbrace{d.f}_{=0} = a.f + d.c$ que não é necessariamente igual a zero!

(Querido aluno, se você desconfiar que certa propriedade não vale, você pode buscar um contra exemplo ao invés de ter de fazer cálculos exaustivos. Para isso você deve contar com a sua prática constante dos exercícios e da sua intuição! Boa Sorte!)

Neste caso o melhor é buscar um contra exemplo: Sejam $u = (2,5,0), v = (0,8,6) \in W_4$, mas $u + v = (2,13,6) \notin W_4$.

Portanto, por não satisfazer a propriedade ***b)*** *acima* W_4 ***<u>não</u>*** *é um subespaço do* $\mathbb{R}^3$.

c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall u \in W_1$ *temos* $\alpha \bullet u \in W_1$ (a mesma multiplicação de um número real por um vetor em $\mathbb{R}^3$).

Seja $u = (a,b,c) \in W_1$, então, pela definição de W_1, temos: $a + b = 0$, vamos agora determinar $\alpha \bullet u$, $\alpha \bullet u = \alpha \bullet (a,b,c) = (\alpha.a, \alpha.b, \alpha.c)$. Agora queremos saber se que $\alpha \bullet u \in W_1$.
Novamente, basta verificarmos se a soma das duas primeiras coordenadas de $\alpha \bullet u$ é zero; $\alpha.a + \alpha.b = \alpha(a+b) = \alpha.0 = 0$. Ok!

6) $W_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 2\}$ **<u>não</u>** é um subespaço do $\mathbb{R}^3$. (Prove!) (Agora **<u>não</u>** temos um plano passando pela origem...)

7) $P_s(\mathbb{R})$ é subespaço vetorial de $P_n(\mathbb{R})$, se $0 \le s \le n$. (Demonstre!)

8) Demonstre que se V é um espaço vetorial real, e $v \in V$, o conjunto dos vetores da forma $\lambda.v$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, é um subespaço vetorial de V.

9) Demonstre que o conjunto das matrizes simétricas de ordem n com elementos reais é um subespaço vetorial de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

LISTA DA PROFESSORA INÊS MALHEIROS

1) Determine a matriz **A**, nos seguintes casos:

a) $\mathbf{A = (a_{ij})_{2 \times 2}}$ com $\mathbf{a_{ij} = (-1)^{i+j}.i.j}$ **RESPOSTA:** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

b) **A = (a_{ij})$_{3 \times 2}$** com $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ i^2, & \text{se } i \neq j \end{cases}$ **RESPOSTA:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$

2) Sabendo que **C = AB, A^{-1} =** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **e B^{-1} = 3A**; calcule:

a) A matriz **X = (CB)$^{-1}$**
b) A matriz **Y** sendo **3.(Y – B) = A^{-1} + 2 B^t**.

RESPOSTAS: a) $X = \begin{pmatrix} -1/45 & 1/15 \\ 2/45 & -1/45 \end{pmatrix}$ **e** b) $Y = \begin{pmatrix} 8/9 & 22/9 \\ 2 & 8/9 \end{pmatrix}$

3) Determine ***x***, ***y*** e ***z*** de modo que **AB** = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}$ sabendo que **A** = $\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{pmatrix}$ e **B** é uma matriz diagonal. **RESPOSTA:** $x = 1,\ y = 4\ e\ z = 4$

4) Para quais valores de ***k*,** a matriz **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$ é inversível? **RESPOSTA:** $k \neq 1\ e\ k \neq -4$

5) Considere o sistema linear $\begin{cases} 2x - y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$

a) Determine os valores de ***a***, ***b*** e ***c*** de modo que o sistema tenha solução.
b) Calcule o posto e a nulidade da matriz dos coeficientes.
c) Determine a solução do sistema para **a = 0**, **b = 2** e **c = 2**.

RESPOSTAS: a) $c = a + b$ **;** b) $P(C) = 2$ **e** c) $S = \{(3y - 2, y, -5y + 4),\ y \in \mathbb{R}\}$

6) Determine os valores de ***m*** e ***n*** que tornam o sistema abaixo possível e determinado:

$$\begin{cases} x + y = n \\ 5x + 3y = 5m + 2n \\ 6x - 14y = 2m \\ x + 2y = m + n - 1 \end{cases}$$

RESPOSTA: $m = 2\ e\ n = 4$

7) Mostre que a matriz **A** = $\begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é uma ***matriz ortogonal*** para todo θ.

OBSERVAÇÃO: Basta provar que $A^{-1} = A^t$ (definição de matriz ortogonal).

8) Dê exemplo de duas matrizes **A** e **B** de modo que **(A + B)^2 ≠ A^2 + 2AB + B^2**.

RESPOSTA: Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **e** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **(há infinitas matrizes *A* e *B*)**

9) Responda **certo** ou **errado** para cada afirmativa abaixo. Justifique sua resposta com exemplos, contra exemplos ou com demonstrações:

a) Existe matriz 3 x 4 sem linha nula cuja nulidade é igual a 2. **RESPOSTA: CERTO**

b) Todo sistema linear homogêneo com 4 equações e 3 incógnitas tem infinitas soluções. **RESP: ERRADO**

c) Se **X_1** e **X_2** são soluções do sistema linear **AX = B**, então, **X_3 = aX_1 + bX_2**, com **a + b = 1**, também é solução de **AX = B**. **RESPOSTA: CERTO**

10) Nos itens abaixo determine se o conjunto dado com as operações indicadas é um espaço vetorial **real**. Caso não seja, indique todas as condições da definição de espaço vetorial que não se verificam:

a) V = { (1, x) ; x ∈ R }; (1, x) + (1, y) = (1, x + y) e k.(1, x) = (1, kx)

RESPOSTA: SIM, V É UM ESPAÇO VETORIAL

b) V = { (x, y) ∈ R^2 / x > 0 e y > 0 }; (a, b) + (c, d) = (ac, bd) e k.(a, b) = (a^k, b^k)

RESPOSTA: SIM, V É UM ESPAÇO VETORIAL

c) V = { (x, y, z) ∈ R^3 }; (a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b +e, c + f) e k.(a, b, c) = (ka, kb, c)

RESPOSTA: V NÃO É UM ESPAÇO VETORIAL, NÃO VALE A PROPRIEDADE 6.

11) Considere os espaços vetoriais dos itens a) e b), do exercício 10 (acima) e responda:

a) Qual é o vetor nulo de **V** ? **RESPOSTA: No caso a) é** $(1,0)$ **e no caso b) é** $(1,1)$

b) Qual é o vetor oposto de **u = (1, 3)** ? **RESPOSTA: No caso a) é** $(1,-3)$ **e no caso b) é** $(1,1/3)$

c) Qual é o vetor **– w** sabendo que **2w = 3v – t**, onde **t = (1, 9)** e **v = (1, 5)** ?

RESPOSTA: No caso a) é $-w=\left(1,-3\right)$ **e no caso b) é** $-w=\left(1,\dfrac{3\sqrt{5}}{25}\right)$

12) Dados os espaços vetoriais **V** abaixo, diga, em cada caso, se **W** é subespaço de **V**.

I) **V = R^3**

a) **W = { (x, y, z) ∈ R^3 ; x + y + z = 1** }; **RESPOSTA: Não**
b) **W = { (x, y, z) ∈ R^3 ; x = 2y – 3z** }; **RESPOSTA: Sim**
c) **W = { (x, y, z) ∈ R^3 ; y ≤ 0** }; **RESPOSTA: Não**
d) **W = { (x, y, z) ∈ R^3 ; x − y = 0 e z = 0** }. **RESPOSTA: Sim**

II) **V = M$_6$ (R)**

a) **W = { A ∈V; AT = TA, T fixada em V** }; ***RESPOSTA: Sim***

b) **W = { A ∈V; A é a matriz nula** }; ***RESPOSTA: Sim***

c) **W = { A ∈V; A é matriz triangular** }; ***RESPOSTA: Não (some uma matriz triangular superior com uma inferior e conclua...)***

d) **W = { A ∈V; A é a matriz inversível** }; ***RESPOSTA: Não (note que*** $0 \notin W$ ***, isto é, a matriz nula não é inversível)***

e) **W = { A ∈V; A é matriz triangular superior** }; ***RESPOSTA: Sim***

f) **W = { A ∈V; A é matriz simétrica** }. ***RESPOSTA: Sim***