INSTITUTO BAIANO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR – IBES
CURSO: CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
DISCIPLINA: LÓGICA MATEMÁTICA
PROFESSOR: ATAUALPA MAGNO FERRAZ DE NOVAES
PRIMEIRO SEMESTRE DE 2006

Prezados Alunos, sejam bem-vindos ao nosso curso de Lógica Matemática.

Desejo que vocês possam desfrutar destas notas de aula. O sabor coloquial com que procurei "temperar" estas anotações certamente facilitará a aprendizagem da matéria.
Um agradecimento muito especial aos autores de livros, excelentes mestres Edgard de Alencar Filho e Leônidas Hegenberg.
Desde que desejamos aprimorar este trabalho ao longo do tempo, sugestões e críticas serão bem vindas.
Email: amferraznovaes@ig.com.br ou ataualpa@im.ufba.br.
Página na Internet: http:// geocities.yahoo
Telefones: 3353-4784 ou 9179-1925

Primeiramente apresentarei a vocês a EMENTA do nosso curso e o CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

UNIVERSIDADE PAULISTA – UNIP

EMENTA E CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

INSTITUTO: Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia
CURSO: Ciência de Computação
DISCIPLINA: Lógica Matemática I
CARGA HORÁRIA SEMANAL: 2 horas/aula-semanais

I – EMENTA

Ciência e razão. Razão e linguagem. Linguagens naturais. Linguagens artificiais. Linguagem e metalinguagem. Linguagem proposicional. Conectivos lógicos. Paradoxos semânticos e lógicos:
Análise da tabela verdade de uma proposição qualquer. Tautologia e contradição. Regras de eliminação de parênteses.
Árvore de refutação de fórmulas. Forma disjuntiva normal. Forma conjuntiva normal.
A noção de teoria axiomatizada. O conceito de fórmula. O conceito de demonstração. Meta-teoremas. A questão de consistência do cálculo proposicional. Linguagem quantificacional.
Álgebras Booleanas e cálculo proposicional.
Noções sobre lógicas não-clássicas: lógicas multivaloradas, modais, nebulosas (*Fuzzy*) e paraconsistentes.

II – OBJETIVOS GERAIS

Capacitar o aluno a familiarizar com raciocínios abstratos, permitindo ver os conceitos de forma orgânica e ordenada.

III – OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Introduzir o aluno aos conceitos básicos da moderna Lógica Matemática, desenvolvendo o “raciocínio proposicional”, lógica de quantificadores (predicados), estruturas. Discutir-se-á também como a Lógica Clássica embasa as teorias usuais em Matemática, Ciência da Computação e outras ciências, fornecendo uma visão de sua importância no sistema de conhecimento científico como um todo. A disciplina possui caráter formativo e constitui uma das matérias básicas na formação de profissionais da área de Ciência da Computação

IV – CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

Lógica e linguagem: - Ciência e lógica - Lógica e razão;
Lógica e linguagem:- Linguagens naturais;
Lógica e linguagem:- Linguagens artificiais;
Paradoxos semânticos e lógicos:
- Introdução;
- Linguagens artificiais; linguagem e meta-linguagem.
O cálculo proposicional
- Introdução - Conectivos lógicos
- Conectivos da negação, conjunção, disjunção, implicação e bi-implicação, tabelas verdade dos conectivos.
O cálculo proposicional:
- Árvore de formação de fórmulas
- Árvore de decomposição de fórmulas.
O cálculo proposicional:
- Análise de valores-verdade de fórmulas.
O cálculo proposicional:
- Forma normal disjuntiva e conjuntiva
- Regra de eliminação de parêntesis
- Notação polonesa de fórmulas
O cálculo proposicional:
- Tautologias e contradições
O cálculo proposicional
Árvore de refutação de fórmulas
Hipóteses (ou premissas) e deduções
A regra de Modus Ponens
Apresentação axiomática
O cálculo de predicados
A linguagem quantificacional: a noção de predicado
A linguagem quantificacional: quantificadores universal e existencial.
A noção de estrutura e modelo
A linguagem quantificacional: começando a programar em linguagem quantificacional

1ª AVALIAÇÃO DO PRIMEIRO SEMESTRE DE 2006
TRABALHO EM DUPLA – VALOR 5,0

PESQUISAR SOBRE

Ciência e razão. Razão e linguagem. Linguagens naturais. Linguagens. A noção de teoria axiomatizada. O conceito de fórmula. O conceito de demonstração. Meta-teoremas. A questão de consistência do cálculo proposicional. Linguagem quantificacional. Álgebras Booleanas e cálculo proposicional.
Linguagem e metalinguagem. Linguagem proposicional. Regras de eliminação de parênteses. Árvore de refutação de fórmulas. A noção de teoria axiomatizada. O conceito de fórmula. A questão de consistência do cálculo proposicional. Noções sobre lógicas não-clássicas: lógicas multivaloradas, modais, nebulosas (*Fuzzy*) e paraconsistentes.

DATA DE ENTREGA: A DETERMINAR EM SALA.

FONTES DE PESQUISA

ABE, JAIR MINORO, et al. **Introdução à Lógica Matemática Para a Ciência da Computação.** Ed. Arte Ciência, 2001.

JUDITH GERSTING, **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação,**

Pesquisar na INTERNET

ATENÇÃO: OS DOIS PRIMEIROS LIVROS DA LISTA ACIMA PODEM SER ENCONTRADOS NA BIBLIOTECA DA IBES.

CONJUNTOS NUMÉRICOS FUNDAMENTAIS

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

O conjunto dos números naturais é representado por $\mathbb{N}$ e é definido como:

$\mathbb{N}$ = { 0, 1, 2, 3, 4, ... }.

Observação: $\mathbb{N}$ * = { 1, 2, 3, 4, ... }. Isto é, o *asterisco* exclui o zero do conjunto $\mathbb{N}$.

Note que nem sempre a **subtração** de dois números naturais, tem como resultado um número natural. Portanto, vamos "ampliar" $\mathbb{N}$ de modo que, a operação de subtração possa ser definida para quaisquer números do novo conjunto. Obteremos assim, o conjunto dos números inteiros:

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

O conjunto dos números inteiros é representado por $\mathbb{Z}$ e é definido como:

$\mathbb{Z}$ = {... , -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... }

Observação: $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ = **{... , – 4, – 3, – 2, – 1, 1, 2, 3, 4, ... }**

Note que nem sempre a **divisão** de dois números inteiros, tem como resultado um número inteiro. Portanto, vamos "ampliar" $\mathbb{Z}$ de modo que, a operação de divisão possa ser definida para quaisquer números do novo conjunto, **exceto quando o divisor for zero**. Obteremos assim, o conjunto dos números racionais:

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

$\mathbb{Q}$ = { x; x = p/q com p $\in \mathbb{Z}$, q $\in \mathbb{Z}$ e q $\neq$ 0 }, ou seja: $\mathbb{Q}$ = { x; x = p/q com p $\in \mathbb{Z}$, q $\in \mathbb{Z}^*$ }

Temos então que número racional é aquele que pode ser escrito na forma de uma fração p/q onde p e q são números inteiros, com o denominador diferente de zero.

Lembre-se que **NÃO EXISTE DIVISÃO POR ZERO!**
Note que 0/3 = 0/7 = 0, **mas não existem**, por exemplo: 3/0, 7/0, nem também 0/0.

São exemplos de números racionais: 2/3; – 3/7; 0,001 = 1/1000; 0,75 = 3/4; 0,333... = 1/3; 7 = 7/1, etc...

Nota: é fácil ver que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Observou-se que há números, como, por exemplo, $\sqrt{2}$ = 1,414213562... que não pertencem a $\mathbb{Q}$, isto é, que não podem ser escritos como quociente de dois números inteiros. Os matemáticos então definiram o conjunto dos números irracionais:

CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS (Símbolos: *I* ou $\mathbb{Q}$')

$\mathbb{Q}$**'= *I*** = { x; x é um número que pode ser expresso como decimal infinito e não periódico }.

Exemplos de números irracionais:

a) π = 3,1415926535897932... (pi = razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro);
b) e = 2,71828... (e é chamado número de Euler);
c) $\sqrt{2}$ = 1,414213562... ;
d) $\sqrt{3}$ = 1,732050807... ;
e) 2,01001000100001... (decimal infinito e não periódico);
f) $-\pi$;
g) $4e$;
h) $3\sqrt{2}$;
i) $7e + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{3} + \pi$.

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS ($\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}$ = { x; x é racional ou x é irracional }.

Notas:
a) é óbvio que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
b) $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{R}$;
c) $\mathbb{R} = \boldsymbol{I} \cup \mathbb{Q}$ (isto significa que um número real ou é racional ou irracional; não tem outra chance!).

NOÇÕES DE LÓGICA MATEMÁTICA BIVALENTE

1. PROPOSIÇÃO

Denominamos *proposição* (ou *proposição lógica* ou ainda *sentença*) a toda oração declarativa afirmativa que pode ser classificada como verdadeira ou falsa (ou verdadeira ou falsa). Daí o nome lógica bivalente.

Exemplos : ***a)*** $9 \neq 5$ ***b)*** $7 < 3$ ***c)*** $2 \in Z$ ***d)*** $3.5 + 1$ ***e)*** $3x - 1 = 11$

Naturalmente, as expressões *d)* e *e)* não são *proposições.*

Terminologia: Os ***valores lógicos*** de uma proposição são verdadeiro (V) ou falso (F).
Por exemplo: O valor lógico da proposição ***a)*** acima é verdadeiro, enquanto que o valor lógico da proposição ***b)*** acima é falso.

OBSERVAÇÃO: Alguns livros de Lógica usam a seguinte convenção: valor lógico **V = 1** (isto é, valor lógico verdadeiro é igual a um) e valor lógico **F = 0** (isto é, valor lógico falso é igual a zero).

2. PROPOSIÇÃO SIMPLES

É toda sentença que contém uma única afirmativa. São representadas por letras minúsculas do alfabeto, preferencialmente p, q, r e t.

EXEMPLOS:

a) p: $2^{-1} = -2$
b) q: $3 . 4 > 10$
c) r: O Brasil é uma monarquia.

2.1 - Negação de uma Proposição Simples

Dada uma proposição p, é sempre possível obtermos outra proposição cujo sentido seja contrário ao de p. Esta proposição é chamada negação de p e é representada por "~ p" (costuma-se ler " não p" ou "não é verdade que p").

EXEMPLOS:

a) p: $7 - 2 = 5$ tem como negação: ~ p: $7 - 2 \neq 5$
b) q: $3^{-1} \geq 2^{-1}$ tem como negação: ~ q: $3^{-1} < 2^{-1}$

OBSERVAÇÕES:

(1) Pode-se verificar, pelos exemplos acima, que uma proposição e a sua negação têm valores lógicos contrários. Este fato pode ser resumido na tabela abaixo:

p	~ p
V	F
F	V

(2) A negação de ~ p (chamada lei da dupla negação) equivale à própria proposição p, isto é:

$\boxed{\sim (\sim p) \text{ é o mesmo que } p}$

EXERCÍCIOS:

1. Quais das expressões abaixo são proposições? No caso das proposições, quais são as verdadeiras?

a) $5 \cdot 4 = 20$	**b)** $5 - 4 = 3$	**c)** $1 + 3 \neq 1 + 6$	**d)** $(-2)^5 \geq (-2)^3$
e) $3 + 4 > 0$	**f)** $11 - 4 . 2$		

2. Qual é a negação de cada uma das seguintes proposições? Quais negações são verdadeiras?

a) $3 \cdot 7 = 21$ **b)** $3 \cdot (11 - 7) \neq 5$ **c)** $3 \cdot 2 + 1 > 4$ **d)** $5 \cdot 7 - 2 \leq 5 \cdot 6$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

Às vezes, trabalhamos não só com proposições (no sentido que foi definido acima, isto é, que podem ser classificadas de maneira inequívoca como verdadeiras ou falsas), mas também com o que chamamos de funções proposicionais, veja alguns exemplos:

Exemplo 1:

Sabemos, que a rigor, $3x - 1 = 11$ não é uma proposição, más é fácil observar que, a depender do valor de x, a expressão $3x - 1 = 11$ pode ser verdadeira ou falsa (mais especificamente, para $x = 4$ a expressão dada: $3x - 1 = 11$ se torna uma proposição verdadeira e para qualquer $x \neq 4$ a expressão dada: $3x - 1 = 11$ se torna uma proposição falsa). Independentemente do valor lógico de $3x - 1 = 11$ podemos negá-la. Assim se quisermos negar a função proposicional $3x - 1 = 11$ (que por um abuso de linguagem, alguns autores denominam também de proposição), teremos: $3x - 1 \neq 11$.

Exemplo 2:

Usando a mesma linha de raciocínio do exemplo 1 acima, pode-se falar em negação da "proposição": $a > b$. Sua negação é $a \leq b$.

Exemplo 3:

A frase "o cachorro fugiu" não é, a rigor, uma proposição, pois não sabemos a qual cachorro especificamente a frase se refere, se identificarmos o tal cachorro podemos determinar a veracidade ou falsidade da afirmação "o cachorro fugiu". Como havíamos comentado antes, alguns (na verdade muitos) autores por um abuso de linguagem, denominam afirmações como essa ("o cachorro fugiu") de proposição (ou seja, "estendem" a definição de proposição). Deste modo, independentemente do valor lógico de "o cachorro fugiu" podemos negá-la. Sua negação é;
" o cachorro não fugiu" ou " não é verdade que o cachorro fugiu".

Seguiremos nos nossos estudos essa "convenção", isto é, expressões como as dos exemplos 1, 2 e 3 serão chamadas de proposições.

3. PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

A partir de proposições simples, podemos construir novas proposições, mediante o emprego de símbolos (conectivos) lógicos como **conjunção**, **disjunção (inclusiva e exclusiva)**, **condicional**, **bicondicional**.

<u>OBSERVAÇÃO IMPORTANTE</u>: Na verdade ao utilizarmos os conectivos entre as proposições simples estaremos realizando <u>operações</u> entre essas proposições, isto é, entre os valores lógicos
(verdadeiro ou falso) correspondentes a essas proposições. Portanto deveremos explicitar para vocês, prezados alunos, qual o "resultado" de cada operação lógica.

3.1 - CONJUNÇÃO

Colocando o conectivo ***<u>e</u>*** entre duas proposições p e q, obtemos uma proposição composta, $p \wedge q$, denominada ***conjunção*** das proposições p e q.

***<u>ATENÇÃO</u>*: $p \wedge q$ lê-se: *p* **e** *q*.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definição: A conjunção entre duas proposições só é verdadeira, ***<u>apenas</u>*** se ambas as proposições que a compõem são verdadeiras. Em qualquer outra situação a proposição composta é falsa.

OBSERVE OS EXEMPLOS ABAIXO:

1) p : 2 > 0 (cujo valor lógico é verdadeiro = **V**)
   q : $5 \neq 5$ (cujo valor lógico é falso = **F**)
   $p \wedge q$: 2 > 0 **e** $5 \neq 5$ (é uma proposição composta falsa, pois **V e F**, pela tabela acima, tem falso como resultado).

2) p : 2 > 0 (**V**)
   q : $2 \neq 5$ (**V**)

$p \wedge q : 2 > 0$ **e** $2 \neq 5$ (é uma proposição composta verdadeira, pois **V e V**, pela tabela acima, tem verdadeiro como resultado).

3.2 – DISJUNÇÃO

Colocando-se o conectivo ***ou*** entre duas proposições, *p* e *q*, obtemos uma proposição composta, $p \vee q$, denominada ***disjunção*** (***disjunção inclusiva***) das proposições *p* e *q*.

***ATENÇÃO*:** $p \vee q$ lê-se: *p* **ou** *q*.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definição: A disjunção entre duas proposições é falsa, ***apenas*** se ambas as proposições que a compõem são falsas. Em qualquer outra situação a proposição composta é verdadeira.

OBSERVE OS EXEMPLOS ABAIXO:

1) $p : 3^4 < 2^6$ (**F**)
$q : 2^2 > (-3)^5$ (**V**)
$p \vee q : 3^4 < 2^6$ **ou** $2^2 < (-3)^5$ (**V**).

2) $p : 3^4 < 2^6$ (**F**)
$q : 2^2 < (-3)^5$ (**F**)
$p \vee q : 3^4 < 2^6$ **ou** $2^2 < (-3)^5$ (**F**).

HÁ OUTRO TIPO DE DISJUNÇÃO CHAMADA DE *DISJUNÇÃO EXCLUSIVA*.

Dadas duas proposições *p* e *q*, podemos obter uma proposição composta, $p \dot{\vee} q$, denominada ***disjunção*** (***disjunção exclusiva***) das proposições *p* e *q*.

***ATENÇÃO*:** $p \dot{\vee} q$ lê-se: **ou** *p* **ou** *q*.

Observe a tabela abaixo:

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A disjunção entre duas proposições é verdadeira, apenas se as proposições que a compõem tiverem valores lógicos diferentes.

Por exemplo, considere que:

$p : 2 > 0$ (**V**)
$q : 5 \neq 5$ (**F**)
$p \dot{\vee} q$: **ou** $2 > 0$ **ou** $5 \neq 5$ (**V**)

3.3 - CONDICIONAL

Colocando-se o conectivo ***se*** antes das afirmativas e a palavra ***então*** entre elas, obtemos uma proposição composta, $p \to q$, denominada ***condicional*** das sentenças p e q.

***ATENÇÃO*:** $p \to q$ lê-se: **Se** *p* **então** *q*.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Propriedade: A condicional somente é falsa se a primeira das proposições é verdadeira e a segunda é falsa.

Por exemplo, considere que:

$p : 5 < 2$ (**F**)
$q : 2 \in Z$ (**V**)
$p \to q$: **Se** $5 < 2$ **então** $2 \in Z$ (**V**)

A condicional pode aparecer escrita por mais de uma forma, como indicado a seguir:

1) ***Se*** p ***então*** q.
2) p ***somente se*** q.
3) q, ***se*** p.
4) p ***é condição suficiente para*** q
5) q ***é condição necessária para*** p

EXEMPLO:

*"**Se** o pássaro canta **então** está vivo"* pode ser escrita também:

O pássaro canta ***somente se*** está vivo;
O pássaro está vivo, ***se*** canta;
O pássaro cantar ***é condição suficiente para*** estar vivo;
O pássaro estar vivo ***é condição necessária para*** cantar.

3.4 - BICONDICIONAL

Colocando-se o conectivo ***se e somente se*** entre duas proposições, p e q, obtemos uma proposição composta, $p \leftrightarrow q$, denominada ***bicondional*** das sentenças p e q.

***ATENÇÃO*:** $p \leftrightarrow q$ lê-se: *p* **se e somente se** *q*.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Propriedade: A bicondicional é verdadeira, se as proposições que a compõem possuem valores lógicos iguais.

Por exemplo, considere que:
p : um quadrado de lado ***a*** tem diagonal medindo ***2a*** (**F**)
q : um quadrado de lado ***a*** tem área a^2 (**V**)
p $\leftrightarrow$ q : um quadrado de lado ***a*** tem diagonal medindo ***2a*** **se e somente se** sua área for a^2. (**F**)

OBSERVAÇÃO: A bicondicional $p \leftrightarrow q$ pode ser lida das seguintes formas:

1) *p* é condição necessária e suficiente para *q*;
2) q é condição necessária e suficiente para p

PODEMOS USAR A TABELA ABAIXO, PARA SINTETIZAR OS RESULTADOS ACIMA:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \dot{\vee} q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

RESUMO:

Conjunção $\wedge$ (e) **..................................** Só é verdadeira se forem ambas verdadeiras.

Disjunção Inclusiva $\vee$ (ou) **.................** Só é falsa se forem ambas falsas.

Disjunção Exclusiva $\dot{\vee}$ (ou ... ou ...) **....** Só é falsa se ambas forem verdadeiras ou ambas falsas.

Condicional $\rightarrow$ (se **...** então**...**) **............** Só é falsa se a primeira for verdadeira e a segunda for falsa.

Bicondicional $\leftrightarrow$ (se e somente se) **....** Só é verdadeira se ambas forem verdadeiras ou ambas falsas.

EXERCÍCIOS:

1. Classificar em verdadeira ou falsa, cada uma das seguintes proposições compostas:

a) $3 > 1$ **e** $4 > 2$	**b)** $1/2 < 3/4$ **ou** $5 < 11$	**c)** $(-1)^6 = -1$ **e** $2^5 < (-2)^7$
d) $\sqrt{16} = 6$ **ou** m.d.c (4,7) = 2	**e)** $2 - 1 = 1 \rightarrow 5 + 7 = 3 . 4$	**f)** $2^2 = 4 \leftrightarrow (-2)^2 = 4$

2. Admitindo que **p** e **q** são verdadeiras, **r** é falsa e **t** é uma proposição cujo valor lógico não é conhecido, determine o valor (V ou F), de cada proposição abaixo:

a) $p \rightarrow r$	**b)** $p \leftrightarrow q$	**c)** $r \rightarrow q$
d) $(p \vee r) \leftrightarrow q$	**e)** $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	**f)** $p \rightarrow (q \wedge r)$
g) $\sim p \leftrightarrow \sim q$	**h)** $(\sim p \leftrightarrow r) \vee t$	**i)** $r \rightarrow (q \wedge t)$

4 - TAUTOLOGIAS E CONTRADIÇÕES

Dizemos que uma proposição composta é uma tautologia**, quando seu** valor lógico é sempre verdadeiro, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples que a compõem**.**

Exemplo: Verificar os valores lógicos da proposição $p \vee \sim p$.

p	~ p	p ∨ ~ p
V	F	**V**
F	V	**V**

Portanto, a proposição $p \vee \sim p$ é um exemplo de tautologia.

Dizemos que uma proposição composta é uma ***contradição***, quando seu **valor lógico é sempre falso, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples que a compõem**.

Exemplo: Verificar os valores lógicos da proposição $p \wedge \sim p$.

p	~ p	p ∧ ~ p
V	F	**F**
F	V	**F**

Portanto, a proposição $p \wedge \sim p$ é um exemplo de contradição..

5 – IMPLICAÇÃO E EQUIVALÊNCIA

5.1 - IMPLICAÇÃO

Sejam p e q duas proposições. Dizemos que p ***implica*** q ($p \Rightarrow q$), se a condicional $p \rightarrow q$ for uma tautologia, ou seja, nunca ocorrer o caso **V → F**, único em que a condicional é falsa.

Exemplo: Verificar os valores lógicos de: $\mathbf{(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)}$

p	**q**	**p∧q**	**p ∨ q**	**(p∧q) → (p ∨ q)**
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**V**

Como a proposição *condicional* $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ é uma *tautologia* e é uma, dizemos então que é uma *implicação* e passamos a representá-la assim: $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$.

5.2 - EQUIVALÊNCIA

<u>DEFINIÇÃO</u>: Dizemos que duas proposições *p* e *q* são *<u>equivalentes</u>* (ou segundo alguns autores, por abuso de linguagem, *<u>iguais</u>*) se elas têm o mesmo valor lógico. Representa-se $p \Leftrightarrow q$ e lê-se: *p* é equivalente a *q* (*p* é igual a *q*).

EXEMPLO 1:

p: O sol emite calor (que é uma proposição verdadeira)
q: $7 > 4$ (que também é uma proposição verdadeira)

As proposições *p* e *q* acima são equivalentes (ou iguais) pois ambas têm o mesmo valor lógico (no caso, ambas são verdadeiras).

EXEMPLO 2:

p: A lua é maior que o sol (que é uma proposição falsa)
q: $7 < 4$ (que também é uma proposição falsa)

As proposições *p* e *q* acima são equivalentes (ou iguais) pois ambas têm o mesmo valor lógico (no caso, ambas são falsas).

Você observou que para que duas proposições sejam equivalente, basta que elas tenham os mesmos valores lógicos, independentemente do "conteúdo" das afirmações.

Naturalmente, podemos também definir a equivalência entre duas proposições, do seguinte modo:

<u>DEFINIÇÃO</u>: Sejam p e q duas proposições. Dizemos que **p equivale a q ($p \Leftrightarrow q$)**, se a bicondicional $p \leftrightarrow q$ for uma tautologia, **isto é, se as proposições p e q têm sempre os mesmos valores lógicos**.

EXEMPLO: Provar você mesmo, a seguinte equivalência: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

6. VARIANTES DA CONDICIONAL

A condicional $p \rightarrow q$ possui, entre outras, duas proposições que lhe são **<u>equivalentes</u>**:

1) $\sim p \vee q$
2) $\sim q \rightarrow \sim p$

Vamos verificar essas equivalências:

p	q	~ p	~ q	p → q	~ p ∨ q	~ q → ~ p
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

RESUMINDO O QUE ACABAMOS DE DEMONSTRAR: A proposição $p \rightarrow q$ é *<u>equivalente</u>* à proposição $\sim q \rightarrow \sim p$ (a proposição $\sim q \rightarrow \sim p$ é chamada de contrapositiva da aplicação $p \rightarrow q$) e também à proposição $\sim p \vee q$.

Assim, podemos afirmar que:

Se o pássaro canta **então** está vivo **($p \rightarrow q$)**
SIGNIFICA O MESMO QUE:
Se o pássaro não está vivo **então** não canta **($\sim q \rightarrow \sim p$)**
E TAMBÉM SIGNIFICA O MESMO QUE:
O pássaro não canta **ou** está vivo **($\sim p \vee q$)**

Mesmo frases malucas (risos!), dentro da lógica, podem ser reescritas como foi indicado acima, por exemplo:
Se o macaco voa **então** João é uma pedra **($p \rightarrow q$)**
SIGNIFICA O MESMO QUE:
Se João não é uma pedra **então** o macaco não voa **($\sim q \rightarrow \sim p$)**
E TAMBÉM SIGNIFICA O MESMO QUE:
O macaco não voa **ou** João é uma pedra **($\sim p \vee q$)**

De um modo mais geral, a condicional $p \rightarrow q$ tem três **variantes** (**CUIDADO!** Eu não disse que todas são equivalentes!) que são denominadas por:

1) Contrapositiva: $\sim q \rightarrow \sim p$
2) Recíproca: $q \rightarrow p$
3) Contrária: $\sim p \rightarrow \sim q$

EXERCÍCIOS

1) Dada a proposição *"Se $2 < 1$ então $7 = 7$"* (observe que esta proposição é **verdadeir**a pois temos o caso **F** $\rightarrow$ **V**) **determine**:

a) Recíproca (que é falsa, pois agora trata-se do caso **V** $\rightarrow$ **F**):

b) Contrária (que é falsa, pois trata-se do caso **V** $\rightarrow$ **F**):

c) Contrapositiva (que é **verdadeir**a pois temos o caso **F** $\rightarrow$ **V**, isto era de se esperar pois já demonstramos que a contrapositiva $\sim q \rightarrow \sim p$ é equivalente à condicional $p \rightarrow q$):

2) Dada a proposição *"Se o pássaro canta então está vivo"* determine:

a) Recíproca:
b) Contrária:
c) Contrapositiva:

3) Considere a proposição *"Se o triângulo é eqüilátero, então é isósceles"* determine:

a) Recíproca:
b) Contrária:

c) Contrapositiva:

4) Dê a recíproca da contrapositiva da condicional *"se $x = 2$, então $x^2 = 4$"*.

7. TABELA VERDADE

Podemos construir muitos raciocínios que podem se deduzidos das convenções e definições estabelecidas anteriormente. Vamos demonstrar algumas equivalências e propriedades usando as tabelas de verdade (ou tabelas – verdade).

EXERCÍCIOS:

1) Verificar se as proposições abaixo são tautologias ou contradições ou contingências (nem tautologia nem contradição):

1) s: $(p \wedge \sim p) \rightarrow (p \vee q)$
2) r: $[\, p \wedge (p \rightarrow q) \,] \rightarrow q$
3) t: $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
4) c: $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$
5) u: $\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q)$
6) v: $(p \vee q) \rightarrow p$

2) Demonstre as propriedades da conjunção usando a tabela verdade:

a) Idempotência: $p \wedge p \Leftrightarrow p$ $\forall$ p ($\forall$ significa "qualquer que seja" ou ainda "para todo")
b) Comutatividade: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $\forall$ p, q
c) Associatividade: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $\forall$ p, q, r
d) Elemento Neutro: $p \wedge 1 \Leftrightarrow 1 \wedge p \Leftrightarrow p$ $\forall$ p
e) Elemento Absorvente: $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \wedge p \Leftrightarrow 0$ $\forall$ p

3) Demonstre as propriedades da disjunção usando a tabela verdade:

a) Idempotência: $p \vee p \Leftrightarrow p$ $\forall$ p
b) Comutatividade: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $\forall$ p, q
c) Associatividade: $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $\forall$ p, q, r
d) Elemento Neutro: $p \vee 0 \Leftrightarrow 0 \vee p \Leftrightarrow p$ $\forall$ p
e) Elemento Absorvente: $p \vee 1 \Leftrightarrow 1 \vee p \Leftrightarrow 1$ $\forall$ p

4) Demonstre as propriedades "mistas" usando a tabela verdade, $\forall$ p, q, r:

a) Distributividade da conjunção em relação à disjunção: $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
b) Distributividade da disjunção em relação à conjunção: $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

5) Demonstre as negações abaixo usando a tabela verdade:

a) $\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$
b) $\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$
c) $\sim (p \rightarrow q) = p \wedge \sim q$
d) $\sim (p \leftrightarrow q) = \sim p \leftrightarrow q$ (ou $p \leftrightarrow \sim q$)

7. NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

Retomando exatamente o que fizemos no exercício 5), acima:

7.1 - Conjunção

$$\boxed{\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q}$$

Exemplo: A negação de *"o carro é preto **e** a pedra é dura"* é *" o carro não é preto **ou** a pedra não é dura "*.

7.2 - Disjunção

$$\boxed{\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q}$$

Exemplo: A negação de *"estudo **ou** trabalho"* é *"não estudo **e** não trabalho"*.

<u>**OBSERVAÇÃO**</u>: As duas leis acima: $\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$ e $\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$ são chamadas primeiras leis de <u>De Morgan</u> em homenagem ao matemático Augustus de Morgan..

7.3 – Condicional

$$\boxed{\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q}$$

Exemplo: A negação de *"**se** sou baiano, **então** sou brasileiro"* é *"sou baiano **e** não sou brasileiro"*.

7.4 – Bicondicional

A bicondicional pode ser negada de duas maneiras:

$$\boxed{\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \leftrightarrow q} \text{ ou } \boxed{\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow \sim q}$$

Exemplo: A negação de *"3 > 2, **se e somente se** $2 \in N$"* pode ser feita de duas formas:

a) $3 \leq 2$, ***se e somente se*** $2 \in N$
b) $3 > 2$, *se* ***e somente se*** $2 \notin N$

EXERCÍCIOS

1) **Negar** as proposições:

a) 3 é impar **e** dois é primo;

b) Magno é Bahia **ou** Nelson é vitorinha ☺;
c) **Se** $x^2 = 4$, **então** $x = \pm 2$;
d) $\sqrt{x^2} = x$, **se e somente se** $x \geq 0$.

2) Na linguagem C, usada na programação de computadores, sabe-se que:

fabs (x) é o valor absoluto de x, sqrt (x) é a raiz quadrada de x, * é o operador multiplicação e
+ é o operador adição.

Pede-se calcular o valor da expressão: fabs (– 3) * sqrt (25) + fabs (4) * sqrt (49)

a) 33 b) 0 c) 34 d) 20 e) 43

3) A proposição composta $(p \leftrightarrow q) \wedge \sim q$ tem valor lógico V; então o valor lógico da proposição p:

a) só pode ser V
b) pode ser V ou F
c) só pode ser F
d) depende do valor de q
e) não pode ser determinado a partir dessa proposição.

4) Se p é uma proposição verdadeira, então:

a) $p \wedge q$ é verdadeira, qualquer que seja q
b) $p \vee q$ é verdadeira, qualquer que seja q
c) $p \wedge q$ é verdadeira, só se q for falsa
d) $p \rightarrow q$ é falsa, qualquer que seja q
e) $p \leftrightarrow q$ é falsa, qualquer que seja q

8. SENTENÇAS ABERTAS, QUANTIFICADORES

Já vimos que expressões como $x + 1 = 7$, $x > 2$ e $x^3 = 2x^2$, não podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas, pois para isso dependem do valor assumido pela variável x. Sendo assim, estas expressões, no sentido formal **não constituem proposições.** No entanto, vamos mostrar a vocês que podemos transformá-las em proposições, juntando-lhes os chamados ***quantificadores***.

<u>**OBSERVAÇÕES**</u>:

1) Salvo menção em contrário os valores numéricos de ***x*** poderão ser quaisquer **números reais.** Em outras palavras, costuma-se dizer que o nosso ***universo lógico***, normalmente simbolizado por ***U***, será, salvo menção em contrário, o conjunto R;

2) Nas sentenças matemáticas abaixo, a expressão "tal que" será abreviada por um ponto e vírgula.

QUANTIFICADORES:

Universal : $\forall$ x (Lê-se: Todo x ou Para todo x ou Qualquer que seja x)
Exemplo: ($\forall$ x $\in \mathbb{R}$) (x + 1 = 7), que se lê: "Para qualquer valor de x, x + 1 = 7" (proposição falsa).

Existencial : $\exists$ x (Lê-se: Existe pelo menos um x ou Existe x ou Existe algum x)
Exemplo: ($\exists$ x $\in \mathbb{R}$); (x + 1 = 7), que se lê: "Existe algum x tal que x + 1 = 7" (proposição verdadeira).

Existencial Particular : $\exists!$ x (Lê-se: Existe um único x ou Existe apenas um x)
Exemplo: ($\exists!$ x $\in \mathbb{R}$); (x + 1 = 7), que se lê: "Existe apenas um x tal que x + 1 = 7" (que é uma proposição verdadeira).

NEGAÇÕES DE PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADORES:

Nas explicações que se seguem, considere *U* um universo lógico e *p (x)* uma proposição:

1) $\sim (\forall x \in U, p(x)) = \exists x \in U; \sim p(x)$

EXEMPLOS:

a) $\sim (\forall x \in R,\ x^2 > 4) = \exists x \in R; x^2 \leq 4$
b) $\sim (\forall x \in R,\ x^2 \geq 0) = \exists x \in R; x^2 < 0$
c) ~ (Todo homem é mortal) = Existe pelo menos um homem que não é mortal (ou, o que é o mesmo: Existe pelo menos um homem imortal).

RESUMINDO: Negação do quantificador ***Universal***: Troca-se $\forall$ x por $\exists$ x e ***nega-se*** a proposição.

2) $\sim (\exists x \in U, p(x)) = \forall x \in U; \sim p(x)$

EXEMPLOS:

a) $\sim (\exists x \in R,\ x^2 > 16) = \forall x \in R; x^2 \leq 16$
b) $\sim (\exists x \in R,\ x^2 \geq 0) = \forall x \in R; x^2 < 0$
c) ~ (Existe homem que é mortal) = Todo homem não é mortal (ou, o que é o mesmo: Todo homem é imortal).

RESUMINDO: Negação do quantificador ***Existencial***: Troca-se $\exists$ x por $\forall$ x e ***nega-se*** a proposição.

EXERCÍCIOS:

1) Dê o valor lógico de cada proposição abaixo:

a) $\exists!\ x \in N; x^2 = 9$
b) $\exists\ x \in N; x^2 = 9$

c) $\forall\, x \in N,\ x^2 = 9$
d) $\forall\, x \in R,\ x \geq x$
e) $\exists\, x \in R;\ x \geq x$
f) $\exists!\, x \in R;\ x \geq x$
g) $\exists\, x \in R;\ x^2 = -4$
h) $\exists!\, x \in R;\ x^2 = -4$
i) $\forall\, x \in R,\ x^2 = -4$
j) $\forall\, x \in R, \exists\, y \in R;\ y = 1/x$

2) Negar as proposições abaixo:

a) $\forall\, x \in R,\ x + 2 = 7$
b) $\exists\, x \in R;\ x^2 - 2x \leq 4$
c) $\forall\, x \in R, \exists\, y \in R;\ y = 1/x$
d) $\exists\, x \in R;\ \forall\, y \in R,\ y > x$
e) $\exists\, x \in R;\ \forall\, y \in R,\ y > x \ \wedge\ 2x = 5y$
f) $\exists\, x \in R;\ \forall\, y \in R,\ y + x = 7 \ \vee\ x = 5y$
g) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0;\ \forall\, x \in X,\ |\, x - a \,| < \delta \rightarrow |\, f(x) - f(a) \,| < \varepsilon$
h) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0;\ \forall\, x \in X,\ 0 < |\, x - a \,| < \delta \rightarrow |\, f(x) - L \,| < \varepsilon$
i) $\exists\, x \in R;\ \forall\, y \in Z, \exists\, \varepsilon > 0;\ |\, x - y \,| \geq \varepsilon$

3) Dar a negação de *"Todo homem bom é justo e existe torcedor do vitorinha que é bom da bola"*.

9. PRINCÍPIO DA DUALIDADE

Dualidade no conjunto das proposições lógicas:

Dada uma expressão *E*, contendo apenas os símbolos: “=”, “$\wedge$”, “$\vee$”, “~”, “0” e “1”, define-se a dual de *E*, como a expressão *E’*, obtida de *E*, trocando-se “$\vee$” por “$\wedge$”; “$\wedge$” por “$\vee$”; “0” por “1”; “1” por “0” e conservando-se os demais elementos.
O mais importante resultado sobre a dualidade é que, se a expressão *E* for uma tautologia, então sua expressão dual *E’*, também é uma tautologia.

EXEMPLOS:

1) E: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \quad \forall\, p, q$
E’: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \quad \forall\, p, q$
2) E: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \quad \forall\, p, q, r$
E’: $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \quad \forall\, p, q, r$
3) E: $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \quad \forall\, p$
E’: $p \vee 1 \Leftrightarrow 1 \quad \forall\, p$
4) E: $p \wedge \sim p = 0 \quad \forall\, p$
E’: $p \vee \sim p = 1 \quad \forall\, p$

EXERCÍCIO:

Usando a tabela verdade demonstre as proposições abaixo:

1) $p \rightarrow q = \sim p \vee q$;
2) $p \dot{\vee} q = (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$;
3) $p \leftrightarrow q = (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$.

Você sabe o que acabou de fazer? Você provou que a condicional, a disjunção exclusiva e a bicondicional podem ser "escritas" em função apenas dos símbolos $\sim$, $\vee$ e $\wedge$. Isso é muito importante para o que segue.

10. DEMONSTRAÇÕES DE PROPOSIÇÕES SEM O USO DA TABELA VERDADE

Usaremos as propriedades abaixo, que você já conhece, para simplificar proposições e demonstrar alguns resultados (observe a **"jóia"** da dualidade "embelezando" da propriedade 1) até a 16)) :

1) $p \wedge \sim p = 0 \quad \forall p$
2) $p \vee \sim p = 1 \quad \forall p$
3) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \quad \forall p, q$
4) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \quad \forall p, q$
5) $p \wedge 1 = p \quad \forall p$
6) $p \vee 0 = p \quad \forall p$
7) $p \wedge 0 = 0 \quad \forall p$
8) $p \vee 1 = 1 \quad \forall p$
9) $p \wedge p = p \quad \forall p$
10) $p \vee p = p \quad \forall p$
11) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) \quad \forall p, q, r$
12) $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r) \quad \forall p, q, r$
13) $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \quad \forall p, q, r$
14) $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad \forall p, q, r$
15) $\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q \quad \forall p, q$
16) $\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q \quad \forall p, q$
17) $\sim (p \rightarrow q) = p \wedge \sim q \quad \forall p, q$
18) $\sim (p \leftrightarrow q) = \sim p \leftrightarrow q \quad \forall p, q$
19) $p \rightarrow q = \sim p \vee q \quad \forall p, q$
20) $p \dot{\vee} q = (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \quad \forall p, q$
21) $p \leftrightarrow q = (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \quad \forall p, q$

EXERCÍCIOS DE CLASSE:

1) Demonstre a propriedade 17) acima usando a 19) e a 16);

2) Usando propriedades das operações lógicas, simplificar o máximo possível as expressões e em seguida classificá–las em tautologia, contradição ou contingência:

a) $\sim (\sim p \wedge \sim q)$;

b) $\sim (p \vee \sim q)$;
c) $\sim (\sim p \rightarrow q)$;
d) $\sim (p \rightarrow \sim q)$;
e) $\sim (\sim p \leftrightarrow \sim q)$;
f) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$;
g) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim (p \wedge q)] \wedge p$;
h) $\sim (\sim p \rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$;
i) $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$;
j) $[\sim (p \rightarrow q) \vee \sim (p \vee q)] \vee (r \rightarrow q)$;
k) $[(q \wedge p) \vee \sim (q \rightarrow p)] \wedge \{ q \rightarrow [\sim p \wedge \sim (\sim p)] \}$

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE LÓGICA MATEMÁTICA

I) Usando a tabela verdade, verificar se as proposições abaixo são tautologias, contradições ou contingências:

a) $s: (p \wedge \sim p) \rightarrow (p \vee q)$
b) $r: [p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
c) $t: (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
d) $c: \sim p \wedge (p \wedge \sim q)$
e) $u: \sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q)$
f) $v: (p \vee q) \rightarrow p$

II) Demonstre as propriedades da conjunção usando a tabela verdade:

a) Idempotência: $p \wedge p = p \qquad \forall p$
b) Comutatividade: $p \wedge q = q \wedge p \qquad \forall p, q$
c) Associatividade: $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) \qquad \forall p, q, r$
d) Elemento Neutro: $p \wedge 1 = 1 \wedge p = p \qquad \forall p$
e) Elemento Absorvente: $p \wedge 0 = 0 \wedge p = 0 \quad \forall p$
f) $p \wedge \sim p = 0 \quad \forall p$

III) Demonstre as propriedades da disjunção usando a tabela verdade:

a) Idempotência: $p \vee p = p \qquad \forall p$
b) Comutatividade: $p \vee q = q \vee p \qquad \forall p, q$
c) Associatividade: $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r) \qquad \forall p, q, r$
d) Elemento Neutro: $p \vee 0 = 0 \vee p = p \qquad \forall p$
e) Elemento Absorvente: $p \vee 1 = 1 \vee p = 1 \qquad \forall p$
f) $p \vee \sim p = 1 \quad \forall p$

IV) Demonstre as propriedades "mistas" usando a tabela verdade, $\forall$ p, q, r:

a) Distributividade da conjunção em relação à disjunção: $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
b) Distributividade da disjunção em relação à conjunção: $(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

c) $p \rightarrow q = \sim p \vee q \qquad \forall\, p, q$
d) $p \dot{\vee} q = (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \quad \forall\, p, q$
e) $p \leftrightarrow q = (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \quad \forall\, p, q$

V) Demonstre as negações abaixo usando a tabela verdade:

a) $\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$
b) $\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$
c) $\sim (p \rightarrow q) = p \wedge \sim q$
d) $\sim (p \leftrightarrow q) = \sim p \leftrightarrow q$
e) $\sim (p \leftrightarrow q) = p \leftrightarrow \sim q$

VI) A proposição composta $(p \leftrightarrow q) \wedge \sim q$ tem valor lógico V; então o valor lógico da proposição p:

a) só pode ser V
b) pode ser V ou F
c) só pode ser F
d) depende do valor de q
e) não pode ser determinado a partir dessa proposição.

VII) Se p é uma proposição verdadeira, então:

a) $p \wedge q$ é verdadeira, qualquer que seja q
b) $p \vee q$ é verdadeira, qualquer que seja q
c) $p \wedge q$ é verdadeira, só se q for falsa
d) $p \rightarrow q$ é falsa, qualquer que seja q
e) $p \leftrightarrow q$ é falsa, qualquer que seja q

VIII) Considere ao proposições:

p: $2{,}4333... \in Q$
q: $-3^2 = 9$
r: $\sqrt{(-5)^2} = -5$

Assinale V ou F nas proposições a seguir:

a) $p \wedge q$	( )	f) $\sim q \wedge r$	( )
b) $p \vee r$	( )	g) $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$	( )
c) $q \rightarrow r$	( )	h) $\sim q \leftrightarrow (p \rightarrow r)$	( )
d) $p \leftrightarrow r$	( )	i) $(\sim p \wedge \sim r) \rightarrow (p \rightarrow q)$	( )
e) $\sim p \rightarrow \sim q$	( )	j) $\sim (\sim q \vee p) \vee (r \rightarrow p)$	( )

IX) Sendo:

p: $6{,}143143... \in Q$
q: todo racional possui inverso

A única proposição falsa é:

a) $p \vee q$
b) $p \wedge \sim q$
c) $p \to q$
d) $(p \wedge q) \to p$
e) $\sim(\sim p)$

X) Construir a tabela verdade da proposição ***s*** e dizer se a proposição ***s*** é tautologia, contradição ou contingência: ***s***: $(\sim p \wedge q) \leftrightarrow (p \to \sim q)$.

XI) Quais das implicações abaixo são verdadeiras, se $x \in R$?

(01) $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$
(02) $x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$
(04) $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x$
(08) $x \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x-2}{x-2} = 1$
(16) $x < y \Rightarrow -x < -y$
(32) $x > y \Rightarrow x^2 > y^2$

XII) Dê o valor lógico de cada proposição abaixo:

a) $\exists!\, x \in N;\ x^2 = 9$
b) $\exists\, x \in N;\ x^2 = 9$
c) $\forall\, x \in N,\ x^2 = 9$
d) $\forall\, x \in R,\ x \geq x$
e) $\exists\, x \in R;\ x \geq x$
f) $\exists!\, x \in R;\ x \geq x$
g) $\exists\, x \in R;\ x^2 = -4$
h) $\exists!\, x \in R;\ x^2 = -4$
i) $\forall\, x \in R,\ x^2 = -4$
j) $\forall\, x \in R, \exists\, y \in R;\ y = 1/x$

XIII) Negar as proposições abaixo:

a) $\forall\, x \in R,\ x + 2 = 7$
b) $\exists\, x \in R;\ x^2 - 2x \leq 4$
c) $\forall\, x \in R, \exists\, y \in R;\ y = 1/x$
d) $\exists\, x \in R;\ \forall\, y \in R,\ y > x$
e) $\exists\, x \in R;\ \forall\, y \in R,\ y > x \ \wedge\ 2x = 5y$
f) $\exists\, x \in R;\ \forall\, y \in R,\ y + x = 7 \ \vee\ x = 5y$
g) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0;\ \forall\, x \in X,\ |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
h) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0;\ \forall\, x \in X,\ 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$
i) $\exists\, x \in R;\ \forall\, y \in Z, \exists\, \varepsilon > 0;\ |x - y| \geq \varepsilon$

XIV) Utilizando propriedades das operações lógicas, isto é, **sem utilizar a tabela verdade**, simplificar o máximo possível as expressões abaixo e em seguida classificá–las em tautologia, contradição ou contingência: **(use as propriedades da página 18)**

a) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$;
b) $\sim(p \vee \sim q)$;
c) $\sim(\sim p \rightarrow q)$;
d) $\sim(p \rightarrow \sim q)$;
e) $\sim(\sim p \leftrightarrow \sim q)$;
f) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$;
g) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim(p \wedge q)] \wedge p$;
h) $\sim(\sim p \rightarrow q) \vee \sim(\sim p \vee q)$;
i) $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$;
j) $[\sim(p \rightarrow q) \vee \sim(p \vee q)] \vee (r \rightarrow q)$;
k) $[(q \wedge p) \vee \sim(q \rightarrow p)] \wedge \{q \rightarrow [\sim p \wedge \sim(\sim p)]\}$

XV) Considere as seguintes proposições: p: $\sqrt{2} \in Q \vee 4 \in (R - Q)$
q: $-5 \in Z \wedge 3$ é um número primo
r: $(-3 \in N) \rightarrow$ (6 é divisor de 12)

Determinar o valor lógico da proposição:

(a) $(p \vee \sim r) \rightarrow \sim q$

(b) $(p \wedge r) \leftrightarrow (p \dot{\vee} q)$

XVI) **Apenas** para o item (a) abaixo você pode usar a tabela verdade

(a) Sendo p e q proposições lógicas, demonstrar a propriedade: $(p \rightarrow q) = (\sim p \vee q)$

(b) Usando propriedades das operações lógicas, simplificar o máximo possível a expressão:
$[(q \wedge p) \vee \sim(q \rightarrow p)] \wedge \{q \rightarrow [\sim p \wedge \sim(\sim p)]\}$ e em seguida classificá–la em tautologia, contradição ou nem tautologia nem contradição.

XVII) Negar as proposições:

a) $\exists x \in R; \forall y \in Z, \exists \varepsilon > 0; |x - y| \geq \varepsilon$
b) $\forall x \in R, \exists y \in Q; \forall \varepsilon > 0, |y - x| < \varepsilon$

XVIII) **Apenas** para resolver o item (a) abaixo você pode usar a tabela verdade

(a) Sendo p e q proposições lógicas, demonstrar a propriedade: $\sim(p \vee q) = (\sim p \wedge \sim q)$

(b) Usando propriedades das operações lógicas, simplificar o máximo possível a expressão:
$\{[(p \wedge p) \vee (p \rightarrow q)] \wedge \sim r\} \vee \{[\sim(\sim q) \vee r] \wedge \sim(q \wedge \sim r)\}$ e em seguida classificá–la em tautologia, contradição ou nem tautologia nem contradição.

(c) Dada a proposição condicional "$\sqrt{5} \in (R - Q) \rightarrow \sqrt{5} \in R$" determinar sua recíproca, sua inversa, sua contrapositiva, e encontrar os valores lógicos destas 4 condicionais.

XIX) A proposição $[(p \leftrightarrow q) \rightarrow \sim q]$ tem valor lógico F; qual o valor lógico da proposição p ?

a) só pode ser V
b) pode ser V ou F
c) só pode ser F
d) depende do valor de q
e) não pode ser determinado a partir dessa proposição.

XX) Jair está machucado ou não quer jogar. Mas Jair quer jogar. Logo,

a) Jair não está machucado nem quer jogar.
b) Jair não quer jogar nem está machucado.
c) Jair não está machucado e quer jogar.
d) Jair está machucado e não quer jogar.
e) Jair está machucado e quer jogar.

XXI) Há três suspeitos de um crime: o cozinheiro, a governanta e o mordomo. Sabe-se que o crime foi efetivamente cometido pôr um ou mais de um deles, já que podem ter agido individualmente ou não. Sabe-se, ainda, que: A) se o cozinheiro é inocente, então a governanta é culpada, B) ou o mordomo é culpado ou a governanta é culpada, mas não os dois, C) o mordomo não é inocente. Logo:

a) a governanta e o mordomo são os culpados
b) somente o cozinheiro é inocente
c) somente a governanta é culpada
d) somente o mordomo é culpado
e) o cozinheiro e o mordomo são os culpados

XXII) José quer ir ao cinema assistir ao filme "Fogo contra Fogo", mas não tem certeza se o mesmo está sendo exibido. Seus amigos, Maria, Luís e Júlio têm opiniões discordantes sobre se o filme está ou não em cartaz. Se Maria estiver certa, então Júlio está enganado. Se Júlio estiver enganado, então Luís está enganado. Se Luís estiver enganado, então o filme não está sendo exibido. Ora, ou o filme "Fogo contra Fogo" está sendo exibido ou José não irá ao cinema. Verificou-se que Maria está certa. Logo:

a) O filme "Fogo contra Fogo" está sendo exibido
b) Luís e Júlio não estão enganados
c) Júlio está enganado, mas não Luís
d) Luís está enganado, mas não Júlio
e) José não irá ao cinema

XXIII) Se Nestor disse a verdade, Júlia e Raul mentiram. Se Raul mentiu, Lauro falou a verdade. Se Lauro falou a verdade, há um leão feroz nesta sala. Ora, não há um leão feroz nesta sala. Logo:

a) Nestor e Júlia disseram a verdade
b) Nestor e Lauro mentiram
c) Raul e Lauro mentiram
d) Raul mentiu ou Lauro disse a verdade
e) Raul e Júlia mentiram

XXIV) Se Vera viajou, nem Camile nem Carla foram ao casamento. Se Carla não foi ao casamento, Vanderléia viajou. Se Vanderléia viajou, o navio afundou. Ora, o navio não afundou. Logo,

a) Vera não viajou e Carla não foi ao casamento
b) Camile e Carla não foram ao casamento
c) Carla não foi ao casamento e Vanderléia não viajou
d) Carla não foi ao casamento ou Vanderléia viajou
e) Vera e Vanderléia não viajaram

XXV) Se $X \geq Y$, então $Z > P$ ou $Q \leq R$. Se $Z > P$, então $S \leq T$. Se $S \leq T$, então $Q \leq R$. Ora, $Q > R$, logo:

a) $S > T$ e $Z \leq P$
b) $S \geq T$ e $Z > P$
c) $X \geq Y$ e $Z \leq P$
d) $X > Y$ e $Z \leq P$
e) $X < Y$ e $S < T$

XXVI) Ou $A = B$, ou $B = C$, mas não ambos. Se $B = D$, então $A = D$. Ora, $B = D$. Logo:

a) $B \neq C$ b) $B \neq A$ c) $C = A$ d) $C = D$ e) $D \neq A$

XXVII) Se Beraldo briga com Beatriz, então Beatriz briga com Bia. Se Beatriz briga com Bia, então Bia vai ao bar. Se Bia vai ao bar, então Beto briga com Bia. Ora, Beto não briga com Bia. Logo,

a) Bia não vai ao bar e Beatriz briga com Bia
b) Bia vai ao bar e Beatriz briga com Bia
c) Beatriz não briga com Bia e Beraldo não briga com Beatriz
d) Beatriz briga com Bia e Beraldo briga com Beatriz
e) Beatriz não briga com Bia e Beraldo briga com Beatriz

XXVIII) Se Flávia é filha de Fernanda, então Ana não é filha de Alice. Ou Ana é filha de Alice, ou Ênia é filha de Elisa. Se Paula não é filha de Paulete, então Flávia é filha de Fernanda. Ora, nem Ênia é filha de Elisa nem Inês é filha de Isa.

a) Paula é filha de Paulete e Flávia é filha de Fernanda.
b) Paula é filha de Paulete e Ana é filha de Alice.
c) Paula não é filha de Paulete e Ana é filha de Alice.
d) Ênia é filha de Elisa ou Flávia é filha de Fernanda.
e) Se Ana é filha de Alice, Flávia é filha de Fernanda.

XXIX) Ou Anaís será professora, ou Anelise será cantora, ou Anamélia será pianista. Se Ana for atleta, então Anamélia será pianista. Se Anelise for cantora, então Ana será atleta. Ora, Anamélia não será pianista. Então:

a) Anaís será professora e Anelise não será cantora
b) Anaís não será professora e Ana não será atleta
c) Anelise não será cantora e Ana será atleta
d) Anelise será cantora ou Ana será atleta
e) Anelise será cantora e Anamélia não será pianista

XXX) Se $a = b + p$, então $a = z + r$. Se $a = z + r$, então $a = w - r$. Por outro lado, $a = b + p$, ou $a = 0$. Se $a = 0$, então $a + u = 5$. Ora, $a + u \neq 5$. Logo,

a) $w - r = 0$
b) $a \neq b + p$
c) $a = w - r$
d) $z + r \neq w - r$
e) $b + p \neq w - r$

XXXI) Se o jardim não é florido, então o gato mia. Se o jardim é florido, então o passarinho não canta. Ora, o passarinho canta. Logo:

a) o jardim é florido e o gato mia
b) o jardim é florido e o gato não mia
c) o jardim não é florido e o gato mia
d) o jardim não é florido e o gato não mia
e) se o passarinho canta, então o gato não mia

XXXII) Chama-se tautologia a toda proposição que é sempre verdadeira, independentemente da verdade dos termos que a compõem. Um exemplo de tautologia é:

a) se João é alto, então João é alto ou Guilherme é gordo
b) se João é alto, então João é alto e Guilherme é gordo
c) se João é alto ou Guilherme é gordo, então Guilherme é gordo
d) se João é alto ou Guilherme é gordo, então João é alto e Guilherme é gordo
e) se João é alto ou não é alto, então Guilherme é gordo

XXXIII) Sabendo que duas ou mais proposições (costuma-se denominar como um conjunto de proposições) são chamadas ***inconsistentes*** se e somente se a **conjunção** de todas elas for uma contradição (caso contrário o conjunto é chamado ***consistente***). Julgue cada conjunto de proposições abaixo em consistente ou inconsistentes.

a) $p; \sim p$
b) $\sim (p \vee \sim q); p \vee \sim r ; q \rightarrow r$
c) $\sim (p \vee q); r \wedge \sim q ; r \rightarrow s$
d) $\sim (p \vee r); r \vee q ; q \rightarrow p$
e) $\sim p \vee \sim q ; \sim r ; \sim p \rightarrow r$

LÓGICA DE ARGUMENTAÇÃO

CONCEITO DE ARGUMENTO:

Argumento é um conjunto formado por certas proposições, chamadas ***premissas***, consideradas como verdadeiras e uma outra proposição chamada de conclusão. Normalmente o argumento tem a forma:

Premissa 1
Premissa 2
.
.
.
Premissa n
____

Conclusão

EXEMPLO:

Magno é legal (Premissa 1)
Maria é bonita ou Magno não é legal (Premissa 2)
____

Maria é bonita (Conclusão)

A lógica de argumentação é uma ciência composta por regras usadas para a decisão sobre a validade de argumentos (essas regras estão relacionadas com as tabelas que estudamos).

- **IMPORTANTE:**

a) Se as premissas (assumidas sempre como verdadeiras) nos levarem a uma conclusão sempre verdadeira, o argumento é dito **válido**.

b) Se as premissas (assumidas sempre como verdadeiras) nos levarem a uma conclusão falsa (no sentido de que não possamos afirmar com toda certeza seu valor lógico a partir das premissas **ou** que seu valor lógico é com toda certeza falso), o argumento é dito **não válido**. Ou simplesmente, o argumento é chamado de **não válido** se não for válido, como definido no item a) acima. Ou ainda, um argumento é falso se houver alguma possibilidade da conclusão assumir o valor lógico falso.

Vamos resolver alguns exercícios para que você possa compreender melhor a lógica de argumentação.

TESTE A VALIDADE DOS SEGUINTES ARGUMENTOS:

1) Magno é legal (Premissa 1)
Se Maria é bonita então Magno não é legal (Premissa 2)

Maria não é bonita (Conclusão)

2) Magno é legal (Premissa 1)
Se Maria é bonita então Magno não é legal (Premissa 2)

Maria é bonita (Conclusão)

3) Magno é legal (Premissa 1)
Maria é bonita ou Magno não é legal (Premissa 2)

Maria é bonita (Conclusão)

4) Magno é legal (Premissa 1)
Maria é bonita ou Magno não é legal (Premissa 2)

Maria não é bonita (Conclusão)

5) Magno não é legal (Premissa 1)
Maria é bonita e Magno não é legal (Premissa 2)

Maria é bonita (Conclusão)

6) Magno não é legal (Premissa 1)
Maria é bonita e Magno não é legal (Premissa 2)

Maria não é bonita (Conclusão)

7) Maria é bonita (Premissa 1)
Se Maria é bonita então Magno não é legal (Premissa 2)

Magno não é legal (Conclusão)

8) Maria é bonita (Premissa 1)
Se Maria é bonita então Magno não é legal (Premissa 2)

Magno é legal (Conclusão)

9) $2 < 3$ (Premissa 1)
Se $4 + 1 = 5$ então $2 < 3$ (Premissa 2)

$4 + 1 = 5$ (Conclusão)

10) $2 < 3$ (Premissa 1)
Se $4 + 1 = 5$ então $2 < 3$ (Premissa 2)

$4 + 1 \neq 5$ (Conclusão)

11) Sobre os seguintes argumentos que seguem, podemos afirmar:

1º argumento:
Este argumento não é incorreto

Logo este argumento é correto

2 º argumento:
Se este argumento for correto, então ele não será inválido

Assim, se ele for inválido, então ele será incorreto

a) são ambos não válidos   b) são ambos válidos   c) o 1º é válido e o 2º não é válido

d) o 1º não é válido e o 2º é válido   e) Nada é possível afirmar

12) Considere os seguintes argumentos:

I. Se 7 é menor que 4, então 7 não é primo.

Mas 7 não é menor que 4, logo 7 é primo

II. Se Londres está na Dinamarca, então Paris não está na França.

Mas Paris está na França, portanto Londres está na Dinamarca.

III. Se 5 é um número primo, então 5 não divide 15.

Mas 5 divide 15, logo 5 não é um número primo.

A validade dos argumentos I, II e III forma, respectivamente, a seguinte seqüência:

a) Válido, Válido, Válido

b) Não-Válido, Não-Válido, Válido

c) Válido, Não-Válido, Válido

d) Válido, Válido, Não-Válido

e) Não-Válido, Não-Válido, Não-Válido

13) Considere os argumentos abaixo:

I. Se 6 não é par, então 3 não é primo.

Mas 6 é par.

Logo 3 é primo.

II. Se faz frio, Margarete fica em casa.

Margarete não ficou em casa.

Logo não fez frio.

a) são ambos não válidos b) são ambos válidos c) I é válido e o II não é válido

d) o I não é válido e o II é válido e) Nada é possível afirmar

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Existem alguns argumentos válidos muito utilizados, chamados ***argumentos básicos***, são eles (verifique a validade de cada um deles):

a) Adição:

i) $$\begin{array}{c} p \\ \hline p \vee q \end{array}$$

ii) $$\begin{array}{c} p \\ \hline q \vee p \end{array}$$

b) Simplificação:

i) $$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline p \end{array}$$

ii) $$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline q \end{array}$$

c) Conjunção:

i) $$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$$

i) $$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline q \wedge p \end{array}$$

d) Absorção:

$$\frac{p \rightarrow q}{p \rightarrow (p \wedge q)}$$

e) Modus Ponens

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

f) Modus Tollens

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \sim q \end{array}}{\sim p}$$

g) Silogismo disjuntivo:

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \end{array}}{q}$$

h) Silogismo hipotético:

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}$$

i) Dilema construtivo:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \vee r \\ \hline q \vee s \end{array}$$

j) Dilema destrutivo:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \sim q \vee \sim s \\ \hline \sim p \vee \sim r \end{array}$$

2ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE LÓGICA MATEMÁTICA

1) Classificando os argumentos que seguem em válido (V) e não-válido (N), a seqüência correta obtida, para os argumentos 1, 2 e 3, nesta ordem, é:

argumento 1:	argumento 2:	argumento 3:
Nenhum F é G	Todo F é G	Algum F é G
Todo G é H	Nenhum G é H	Algum G é H
Nenhum F é H	Nenhum F é H	Algum F é H

a) N, V, N b) N, V, V c) V, V, N d) V, N, V

2) Julgue cada argumento abaixo em válido ou não-válido

a) $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim p \\ \hline \sim q \end{array}$

b) $\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \\ \hline p \end{array}$

c) $p \vee q$
$\sim q$
$p \rightarrow r$

---

r

d) Se $x = 0$ e $y = z$, então $y > 1$
$\sim (y > 1)$

$y = z$

e) $\sim p \rightarrow q$
p

$\sim q$

f) Se 8 é par, então 3 não divide 7
Ou 5 não é primo ou 3 divide 7
5 é primo

---

8 não é par

g) Se trabalho, então não posso estudar
Trabalho ou passo em Física
Trabalho

Passo em Física

h) $p \vee q$
$\sim q$
$p \rightarrow (r \wedge s)$

$s \wedge r$

i) $(r \wedge \sim t) \rightarrow \sim s$
$p \rightarrow s$
$p \wedge q$

$t \vee \sim r$

j) $t \rightarrow (p \wedge s)$
$q \rightarrow \sim p$
$r \rightarrow \sim s$
$q \vee r$

---

t

l) $p \wedge \sim q$
$p \rightarrow \sim r$
$q \vee \sim s$

$\sim s \wedge \sim r$

m) $(r \wedge s) \vee t$
$r \rightarrow \sim p$
$t \rightarrow (q \vee u)$
$\sim q \wedge \sim u$

$\sim p$

n) $(r \wedge s) \vee p$
$q \rightarrow \sim p$
$t \rightarrow \sim p$
$q \vee t$

$\sim s \vee \sim r$

o) $x > y \vee x < 6$
$x > y \rightarrow x > 4$
$x > 4 \rightarrow (x = 5 \wedge x < 7)$
$x < 6 \rightarrow (x = 5 \wedge x < 7)$
$(x = 5 \wedge x < 7) \rightarrow (z > x \vee y < z)$
$x > y \rightarrow \sim (y < z \vee z > x)$

$x < 6$

3) A partir das seguintes premissas:

Premissa 1: "X é A e B, ou X é C";

Premissa 2: "Se Y não é C, então X não é C" ;

Premissa 3: "Y não é C"
Conclui-se corretamente que X é:

a) B
b) não A ou C
c) não A ou não B
d) A e não B
e) não A e não B

4) Considere as seguintes premissas (onde X, Y, Z e P são conjuntos não vazios):

Premissa 1: "X está contido em Y e em Z, ou X está contido em P"
Premissa 2: "X não está contido em P"

Pode-se, então, concluir que, necessariamente:

a) Y está contido em Z
b) X está contido em Z
c) Y está contido em Z ou em P
d) X não está contido nem em P nem em Y
e) X não está contido nem em Y e nem em Z

5) Sabe-se que existe pelo menos um A que é B. Sabe-se, também, que todo B é C. Segue-se, portanto, necessariamente que

a) todo C é B
b) todo C é A
c) algum A é C
d) nenhum C é A
e) algum A não é C

6) Se é verdade que "Alguns A são R" e que "Nenhum G é R", então é necessariamente verdadeiro que

a) algum A não é G
b) algum A é G
c) nenhum A é G
d) algum G é A
e) nenhum G é A

ÁLGEBRA DE BOOLE E CIRCUITOS DE CHAVEAMENTO

Por volta de 1850, um matemático inglês chamado **George Boole**, escreveu um livro chamado "Investigações sobre as leis do pensamento humano" buscando regras "algébricas" para os raciocínios lógicos, semelhantes às regras algébricas comuns usadas nos raciocínios numéricos. Boole foi ridicularizado na época pelo fato de que ninguém via aplicação prática para o seu trabalho.

Mas, em 1938, o Matemático americano (e Engenheiro Elétrico) Claude Shannon, em sua tese de mestrado no Instituto de Tecnologia de Massachusets (M.I.T) apresentou uma abordagem extremamente elegante que relacionava uma Álgebra Booleana (com apenas dois elementos, genericamente designados por "0" e "1") com os circuitos digitais (desligados correspondendo ao "0" e ligados correspondendo ao "1").

Prezados alunos, ao longo dos mais de 25 anos de ensino eu escuto a pergunta (feita por alguns alunos) "professor, onde é que eu vou aplicar esse conhecimento?" Espero que a narração que fiz acima possa ajudar vocês a compreender melhor que, nem sempre a prática antecede à teoria...
Vamos estudar um pouco sobre esse "casamento" perfeito entre Álgebra Booleana e os circuitos digitais.

DEFINIÇÃO: Seja $B \neq \varnothing$ um conjunto com três operações: duas binárias "$\vee$"= "join" (ou junção) e "$\wedge$"= "meet" (ou encontro) e uma operação singular " ' " = complementação Booleana, e no qual destacam-se, pelo menos, os elementos **distintos** "0" e "1". Diz-se que $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ é uma álgebra Booleana se e somente se, os **oito axiomas** abaixo são satisfeitos:

(1) $x \vee y = y \vee x, \forall x, y \in B$;
(2) $x \wedge y = y \wedge x, \forall x, y \in B$;
(3) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \forall x, y, z \in B$;
(4) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \forall x, y, z \in B$;
(5) $x \vee 0 = x, \forall x \in B$;
(6) $x \wedge 1 = x, \forall x \in B$;
(7) $\forall x \in B, \exists x' \in B; x \wedge x' = 0$;
(8) $\forall x \in B, \exists x' \in B; x \vee x' = 1$;

EXEMPLOS:

I) $B = \{0,1\}$, $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ com as tábuas abaixo é uma Álgebra Booleana:

TABELA 1

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

TABELA 2

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

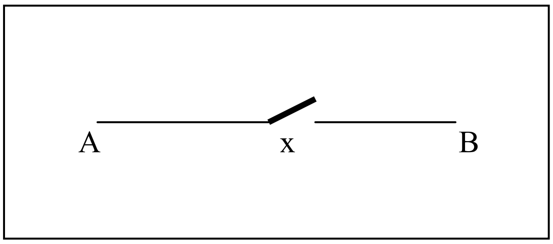
Onde naturalmente 0’ = 1 e 1’ = 0.

$\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ é uma álgebra de Boole. Esta álgebra é conhecida como álgebra dos interruptores e é a mais útil das álgebras Booleanas. É o fundamento matemático da análise e projeto dos circuitos de interruptores (circuitos de chaveamento) que compõem os sistemas digitais.

Vamos visualizar em termos de circuitos elétricos com interruptores (ou chaves):

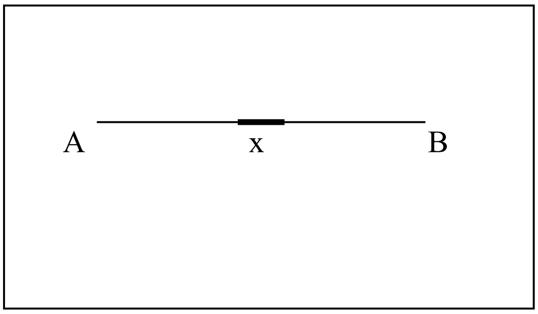
CIRCUITOS COM APENAS UMA CHAVE

Chave aberta (interruptor desligado):



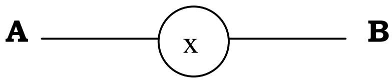
Como a corrente não atravessa do ponto A ao ponto B, designaremos a chave aberta por x = 0 (zero).

Chave fechada (interruptor ligado):



Como a corrente atravessa do ponto A ao ponto B, a chave fechada será designada por x = 1 (um).

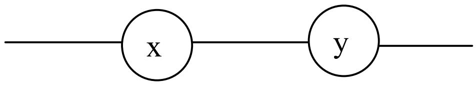
<u>Convenção</u>: ao representarmos circuitos com uma ou mais chaves e não quisermos determinar se a chave está aberta ou fechada, desenharemos um círculo para representar tal chave, assim:



representa um interruptor (chave) que pode estar ligado ou desligado.

CIRCUITOS COM DUAS CHAVES

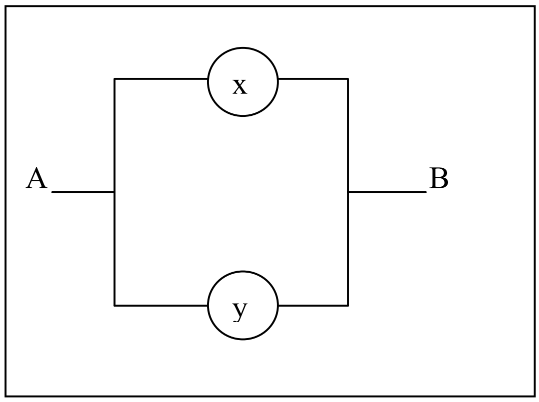
CIRCUITOS EM SÉRIE **(Funciona exatamente como a TABELA 1 acima. Verifique!)**



Sua função Booleana ou polinômio Booleano é $f(x,y) = x \wedge y$ **.**

ATENÇÃO: ***Observe que, de acordo com a Tabela 1, as chaves podem estar, ao todo, em 4 posições, isto é: um-um; um-zero, zero-um e zero-zero.***

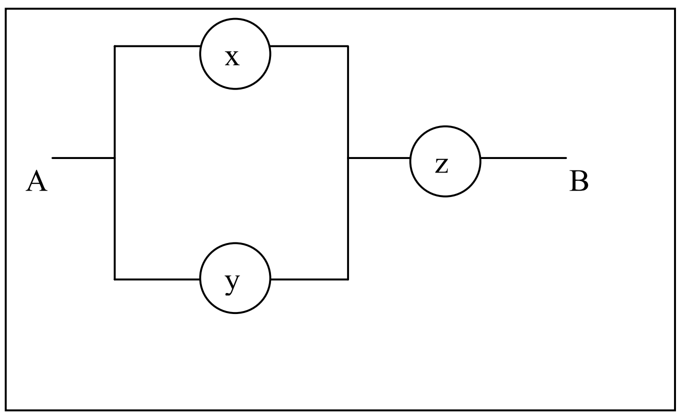
CIRCUITOS EM PARALELO: **(Funciona exatamente como a TABELA 2 acima. Verifique!)**



Sua função Booleana ou polinômio Booleano é $f(x,y) = x \vee y$ **.**

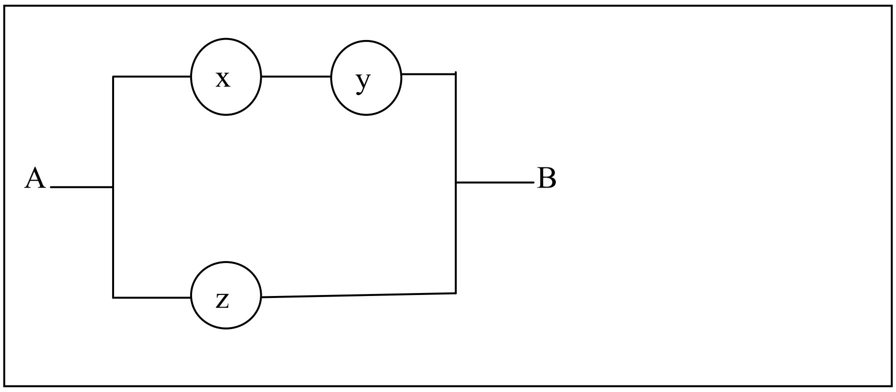
Determine a função Booleana ou polinômio Booleano que representa os circuitos abaixo:

a)



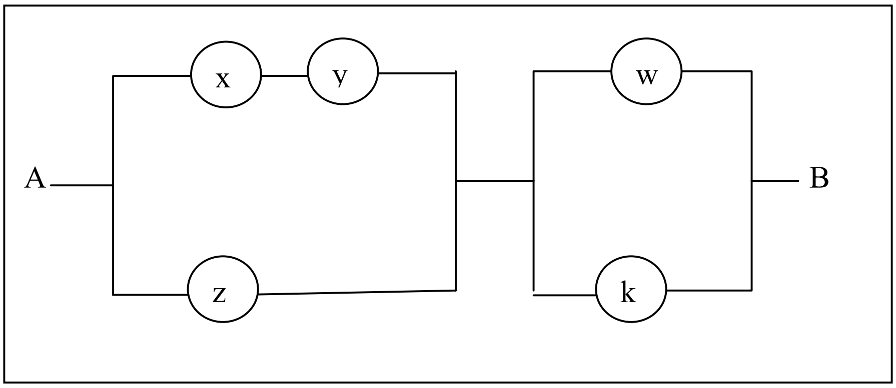
RESPOSTA: $f(x,y,z) = (x \vee y) \wedge z$

b)



RESPOSTA: $f(x,y,z)=(x\wedge y)\vee z$

c)



RESPOSTA: $f(x,y,z,w,k)=\left[(x\wedge y)\vee z\right]\wedge(w\vee k)$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: A ***álgebra dos circuitos digitais*** possui **apenas** dois elementos: 0 (zero = desligado) e 1 (um = ligado), mas ***existem outras*** álgebras Booleanas que possuem mais de dois elementos. Veja um exemplo abaixo;

Prove que se $B=\{1,2\}$, então $\wp(B)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$, com as tabelas abaixo, é uma Álgebra de Boole, mais precisamente, $\langle \wp(B),\cup,\cap,',\varnothing,\{1,2\}\rangle$, é uma Álgebra Booleana (note que $\wp(B)$ possui quatro elementos):

$\cup$	$\varnothing$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$

$\cap$	$\varnothing$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{1,2\}$	$\varnothing$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
$\{1\}$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\varnothing$
$\{2\}$	$\varnothing$	$\{2\}$	$\varnothing$	$\{2\}$

$'$	
$\varnothing$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\varnothing$
$\{1\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{1\}$

Assim, $\langle \wp(B),\cup,\cap,',\varnothing,\{1,2\}\rangle$ é uma Álgebra de Boole com ***quatro*** elementos, onde o "0" é indicado por $\varnothing$ e o "1" é indicado por $\{1,2\}$. Os outros dois elementos são $\{1\}$ e $\{2\}$.

DUALIDADE NUMA ÁLGEBRA DE BOOLE

DEFINIÇÃO: Por ***dual*** de uma proposição com relação a uma álgebra Booleana B, entendemos a proposição obtida pela substituição de $\vee$ *por* $\wedge$, $\wedge$ *por* $\vee$, 1 *por* 0 e 0 *por* 1.

EXEMPLOS:

a) A proposição dual de $y \vee x' = 0$ é $y \wedge x' = 1$;

b) Dualize: $(x \wedge y') \vee (x' \wedge y \wedge z) \vee (y \wedge z')$. **Resposta:** $(x \vee y') \wedge (x' \vee y \vee z) \wedge (y \vee z')$.

As propriedades abaixo devem ser demonstradas com base nos **oito axiomas** dados no início do estudo da álgebra Booleana (pois, como você viu acima, nem toda Álgebra Booleana possui apenas dois elementos).

RESULTADOS IMPORTANTES:

a) Se $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1 \rangle$ é uma álgebra de Boole e $x' \in B$ é o complemento Booleano de $x \in B$, então x' é único;

b) $(x')' = x$;

c) $x \vee x = x$;

Demonstração de c): $x = x \vee 0 = x \vee (x' \wedge x) = (x \vee x') \wedge (x \vee x) = 1 \wedge (x \vee x) = x \vee x$, usando os axiomas citados na definição de álgebra de Boole. São eles: (5); (7), (3), (8) e (6).

d) $x \wedge x = x$.

Faça as outras demonstrações como exercício.

<u>OBSERVAÇÃO IMPORTANTE</u>: Se valer uma fórmula (isto é, se ela for verdadeira) a dual dessa fórmula também vale. Tome como exemplo as fórmulas c) e d) dadas acima, na página 8 (no tópico "alguns resultados importantes"):

c) $x \vee x = x$;

d) $x \wedge x = x$.

Outros resultados importantes:

Se $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1 \rangle$ é uma álgebra de Boole então $\forall x, y, z \in B$ temos:

(i) $x \wedge 0 = 0$; (O "0" é o elemento absorvente da operação $\wedge$)
(ii) $x \vee 1 = 1$; (O "1" é o elemento absorvente da operação $\vee$)
(iii) $0' = 1$;
(iv) $1' = 0$;
(v) $x \wedge (x \vee y) = x$; (Primeira lei da absorção, muito importante em outras demonstrações)
(vi) $x \vee (x \wedge y) = x$; (Segunda lei da absorção, muito importante em outras demonstrações)
(vii) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$; (Associatividade da operação $\vee$)
(viii) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$; (Associatividade da operação $\wedge$)
(ix) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$;
(x) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

<u>EXERCÍCIO</u>: **Demonstre apenas (i), (ii), (v) e (vi).**

FORMA NORMAL CONJUNTIVA, DISJUNTIVA E COMPLEMENTAR

Voltaremos agora a estudar ***apenas*** a Álgebra dos circuitos digitais, recorde as tabelas estudadas anteriormente. Lembre do exemplo da página 4:

I) $B = \{0,1\}$, $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1 \rangle$ com as tábuas abaixo é uma Álgebra Booleana:

TABELA 1

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

TABELA 2

p	q	p ∨ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Onde naturalmente 0' = 1 e 1' = 0.

$\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1 \rangle$ é uma álgebra de Boole. Esta álgebra é conhecida como álgebra dos interruptores e é a mais útil das álgebras Booleanas. É o fundamento matemático da análise e projeto dos circuitos de interruptores (circuitos de chaveamento) que compõem os sistemas digitais.

Observe as expressões Booleanas: $f_1(x, y, z) = (x \vee y) \wedge z$ e $f_2(x, y, z) = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.
Elas são representações distintas da mesma função (basta você utilizar a distributividade...)
Existem formas canônicas (ou padrões clássicos) no estudo da álgebra Booleana; são elas as **formas normais conjuntiva (fnc), disjuntiva (fnd) complementar (g)**.
A explicação da origem dessas fórmulas é belíssima, e será feita em sala de aula onde faremos também diversos exercícios.

EXEMPLO 1:

Ache a **fnc**, a **fnd** e **g** de $f(x, y) = x \wedge (x \vee y')$.

Primeiro passo: Faça a tabela verdade:

x	**y**	**y'**	**x ∨ y'**	**x ∧ (x ∨ y')**
1	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**0**

A forma normal disjuntiva "só utiliza" os resultados iguais a "1", assim:

$fnd(x, y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$.

A função complementar “só considera” os resultados iguais a “0”, deste modo:

$g(x,y)=(x'\wedge y)\vee(x'\wedge y')$.

A forma normal conjuntiva “só considera” os resultados iguais a “0”, mas usando a negação de cada parte; para você entender melhor, observe:

$$fnc(x,y)=\left[g(x,y)\right]'=\left[(x'\wedge y)\vee(x'\wedge y')\right]'=(x'\wedge y)'\wedge(x'\wedge y')'=(x\vee y')\wedge(x\vee y)$$

<u>EXEMPLO 2</u>:

Determinar a **fnc**, a **fnd** e **g** de $f(x,y,z)=(x\vee y)\wedge(x\vee y')\wedge(x'\vee z)$.

x	y	z	x'	y'	x ∨ y	x ∨ y’	x' ∨ z	$f(x,y,z)$
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	0

$$fnd(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y'\wedge z)$$

$$g(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z)\vee(x'\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y'\wedge z)\vee(x'\wedge y'\wedge z').$$

$$fnc(x,y,z)=(x'\vee y'\vee z)\wedge(x'\vee y\vee z)\wedge(x\vee y'\vee z')\wedge(x\vee y'\vee z)\wedge(x\vee y\vee z')\wedge(x\vee y\vee z).$$

MAPA DE KARNAUGH

Processo figurativo que permite simplificar funções booleanas (conseqüentemente também permite simplificar circuitos de chaveamento) **dadas na forma normal disjuntiva** (**fnd**). Detalharemos o processo em sala de aula.

EXERCÍCIOS

1º) Construa um circuito de chaveamento que depende de dois interruptores satisfazendo a:

(1) a corrente passa quando as duas chaves estão desligadas;
(2) a corrente não passa quando pelo menos uma das chaves está ligada;
(3) determine a fnd, simplifique esse circuito pelo método de Karnaugh e esboce o circuito simplificado.

2º) Um farol é controlado por um circuito de chaveamento que depende de duas chaves satisfazendo a:

(1) o farol acende quando apenas uma chave está desligada;
(2) o farol não acende quando ambas as chaves estão desligadas ou ambas ligadas;
(3) determine a fnd, simplifique esse circuito pelo método de Karnaugh e esboce o circuito simplificado.

3º) Uma lâmpada é controlada por um circuito que depende de 3 interruptores de modo que:

(1) a lâmpada acende se pelo menos 2 interruptores estão ligados;
(2) a lâmpada não acende se pelo menos 2 interruptores estão desligados;
(3) determine a fnd, simplifique esse circuito pelo método de Karnaugh e esboce o circuito simplificado.

4º) O sistema de comunicação interna de uma fábrica é controlado por um circuito de chaveamento que depende de três interruptores x, y e z, satisfazendo às seguintes condições:

(1) o sistema não é ligado se x está desligado;
(2) o sistema não é ligado se pelo menos 2 interruptores estão desligados;
(3) o sistema é ligado nos demais casos.

(a) Encontrar uma função Booleana (FND OU FNC, a que você preferir…) que represente tal circuito;
(b) **Simplificar**, pelo método de Karnaugh, a função encontrada. **Desenhe o circuito simplificado.**

5º) Construir um circuito de chaveamento com o menor número de chaves possível, definido pelo mapa de Karnaugh: (**Desenhe o circuito simplificado)**

	x ∧ y	x ∧ y’	x’ ∧ y’	x’ ∧ y
z ∧ w		√	√	
z ∧ w’		√	√	
z’ ∧ w’				
z’ ∧ w	√			√

LISTA DE LÓGICA MATEMÁTICA

1) Dadas as funções Booleanas abaixo, na forma normal disjuntiva, simplifique-as, quando possível, utilizando o processo de minimização conhecido como mapa de Karnaugh

a) $f(x,y)=(x\wedge y)\vee(x'\wedge y)$

b) $f(x,y)=(x\wedge y)\vee(x'\wedge y')\vee(x\wedge y')$

c) $f(x,y)=(x\wedge y')\vee(x'\wedge y)$

d) $f(x,y)=(x'\wedge y)\vee(x'\wedge y')\vee(x\wedge y')$

e) $f(x,y,z)=(x\wedge y'\wedge z)\vee(x'\wedge y'\wedge z)$

f) $f(x,y,z)=(x'\wedge y\wedge z)\vee(x'\wedge y\wedge z')$

g) $f(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y'\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z')$

h) $f(x,y,z)=(x'\wedge y'\wedge z)\vee(x\wedge y'\wedge z)\vee(x'\wedge y'\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z')$

i) $f(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z)\vee(x'\wedge y\wedge z')$

j) $f(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y'\wedge z)\vee(x'\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z')$

l) $f\left(x,y,z\right)=\left(x\wedge y\wedge z\right)\vee\left(x\wedge y'\wedge z'\right)\vee\left(x'\wedge y'\wedge z\right)\vee\left(x'\wedge y\wedge z'\right)$

m) $f\left(x,y,z\right)=\left(x\wedge y\wedge z\right)\vee\left(x\wedge y'\wedge z\right)\vee\left(x\wedge y'\wedge z'\right)\vee\left(x'\wedge y'\wedge z'\right)\vee\left(x'\wedge y\wedge z'\right)$

n) $f\left(x,y,z,w\right)=\left(x\wedge y'\wedge z\wedge w'\right)\vee\left(x'\wedge y'\wedge z\wedge w'\right)$

o) $f\left(x,y,z,w\right)=\left(x\wedge y\wedge z'\wedge w'\right)\vee\left(x\wedge y'\wedge z'\wedge w'\right)\vee\left(x\wedge y\wedge z'\wedge w\right)\vee\left(x\wedge y'\wedge z'\wedge w\right)$

p) $f\left(x,y,z,w\right)=\left(x\wedge y'\wedge z\wedge w\right)\vee\left(x'\wedge y'\wedge z\wedge w\right)\vee\left(x\wedge y'\wedge z\wedge w'\right)\vee\left(x'\wedge y'\wedge z\wedge w'\right)\vee$
$\left(x\wedge y'\wedge z'\wedge w'\right)\vee\left(x'\wedge y'\wedge z'\wedge w'\right)\vee\left(x\wedge y'\wedge z'\wedge w\right)\vee\left(x'\wedge y'\wedge z'\wedge w\right)$

q) $f\left(x,y,z,w\right)=\left(x\wedge y\wedge z\wedge w\right)\vee\left(x\wedge y\wedge z\wedge w'\right)\vee\left(x\wedge y'\wedge z\wedge w\right)\vee\left(x\wedge y'\wedge z\wedge w'\right)\vee$
$\left(x'\wedge y'\wedge z'\wedge w'\right)\vee\left(x'\wedge y\wedge z'\wedge w'\right)\vee\left(x'\wedge y'\wedge z'\wedge w\right)\vee\left(x'\wedge y\wedge z'\wedge w\right)$

r) $f\left(x,y,z,w\right)=\left(x\wedge y\wedge z\wedge w\right)\vee\left(x\wedge y\wedge z\wedge w'\right)\vee\left(x\wedge y\wedge z'\wedge w'\right)\vee\left(x\wedge y\wedge z'\wedge w\right)\vee$
$\left(x'\wedge y\wedge z\wedge w\right)\vee\left(x'\wedge y\wedge z\wedge w'\right)\vee\left(x'\wedge y\wedge z'\wedge w'\right)\vee\left(x'\wedge y\wedge z'\wedge w\right)$

s) $f\left(x,y,z,w\right)=\left(x\wedge y\wedge z\wedge w\right)\vee\left(x'\wedge y\wedge z\wedge w\right)\vee\left(x\wedge y'\wedge z\wedge w'\right)\vee\left(x'\wedge y'\wedge z\wedge w'\right)\vee$
$\left(x\wedge y'\wedge z'\wedge w'\right)\vee\left(x'\wedge y'\wedge z'\wedge w'\right)\vee\left(x\wedge y\wedge z'\wedge w\right)\vee\left(x'\wedge y\wedge z'\wedge w\right)$

2) Construa um circuito de chaveamento que depende de 3 interruptores sabendo que:

(1) apenas 2 chaves ligadas, desliga o circuito;
(2) apenas 1 interruptor ligado, liga o circuito;
(3) 3 chaves ligadas, liga o circuito;
(4) 3 chaves desligadas, desliga o circuito;
(5) determine a fnd, simplifique esse circuito pelo método de Karnaugh e esboce o circuito simplificado.