Seja V um k-espaço vetorial (k um corpo qualquer).

1. Se $v \in V$ e $v \neq 0$, então o conjunto $\{v\}$ é Linearmente Independente.
Solução: Faremos a prova por redução ao absurdo!
Suponha que existe $\alpha \in k$ tal que $\alpha.v = 0$ e $\alpha \neq 0$ (isto é o mesmo que supor que o conjunto $\{v\}$ é L.D., ou seja, que não é L.I). Dado que $\alpha \neq 0$ e k é um corpo, então existe $\beta \in k$ tal que $\beta.\alpha = 1$ ($\beta = \alpha^{-1}$). Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha.v \\ &= \alpha^{-1}.(\alpha.v) \quad \text{(multiplicação por } \alpha^{-1}) \\ &= (\alpha^{-1}.\alpha).v \\ &= 1.v \\ &= v \end{aligned}$$

E isto é um absurdo, pois estamos supondo que $v \neq 0$. E o absurdo está em supor que existe $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha.v = 0$

Perguntas: (i) Vale a recíproca deste exercício? Ou seja, se o conjunto $\{v\}$ é LI, então $v \neq 0$?
(ii) Você daria uma solução diferente da nossa, i.e., sem fazer redução ao aburdo?
Obs.: Caso tenha alguma dúvida, ou queira enviar respostas às perguntas acima, você pode escrever para o endereço: aulas.mat@gmail.com