$\boxed{\textsf{Transformação Linear}}$

Nosso objetivo é mostrar que se $T : V \to V$ ($V$ é um $k$-espaço vetorial qualquer!) é uma função tal que $T(\vec{0}) \neq \vec{0}$, então $T$ não pode ser linear. Observe que mostrar isso é mesmo que: $T$ transf. linear $\Rightarrow T(\vec{0}) = \vec{0}$

**Notação: a)** $\vec{0} \doteq$ vetor nulo de $V$ (isto é, vetor[1] de $V$ tal que $\vec{0}+v = v+\vec{0} = v$, para todo $v \in V$)
**b)** $0 \doteq$ elemento neutro de $k$ ( isto é, elemento[2] de $k$ tal que $0 + a = a + 0 = a$, para todo $a \in k$)

**Obs.:** $\vec{0} = 0 \cdot v$, para todo $v \in V$. De fato,

$$\begin{aligned} 0 \cdot v &= (0+0) \cdot v \\ &= 0 \cdot v + 0 \cdot v \\ \therefore\ (\underbrace{0 \cdot v - 0 \cdot v}_{=\vec{0}}) &= (0 \cdot v + 0 \cdot \overbrace{v) - 0 \cdot v}^{=\vec{0}} \\ \vec{0} &= 0 \cdot v + \vec{0} \\ &= 0 \cdot v \end{aligned}$$

Enfim, nosso objetivo!
1ª **Solução**: Suponha que $T$ é linear. Então,

$$\begin{aligned} T(\vec{0}) &= T(0 \cdot \vec{0}) \\ &= 0 \cdot T(\vec{0}) \\ &= \vec{0} \qquad \text{[usamos aqui a observação acima!]} \end{aligned}$$

2ª **Solução**: Suponha que $T$ é linear. Então,

$$\begin{aligned} T(\vec{0}) &= T(\vec{0}+\vec{0}) \\ &= T(\vec{0}) + T(\vec{0}) \\ \therefore\ \vec{0} &= T(\vec{0}) + \vec{0} \\ &= T(\vec{0}) \end{aligned}$$

**Exercício:** Dê exemplo de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que não é linear mas $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Mande suas dúvidas e solução (para o Ex. acima) para o endereço: aulas.mat@gmail.com

[1] mostre que tal vetor é único!
[2] mostre que tal elemento é único!