

§ 46. DIE PARTIELLE INTEGRATION

Zur Berechnung eines Integrals muß dieses im allgemeinen auf ein Grundintegral zurückgeführt werden. Als erstes Verfahren hierzu haben wir in § 45 die Integration durch Substitution kennengelernt. Ein zweites Verfahren ist die Teilintegration oder partielle Integration.

Wir gehen aus von der Formel für die Differentiation des Produkts zweier Funktionen $u(x)$ und $v(x)$, die beide innerhalb des gleichen Intervalls differenzierbar sind. Dann ist

$$\frac{d}{dx} (u v) = u v' + v u'$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$u \cdot v = \int u \cdot v' dx + \int v \cdot u' dx$$

und mit Auflösung nach dem ersten Summanden der rechten Seite:

$$\boxed{\int u v' dx = u v - \int v u' dx}$$

Mit Hilfe dieser Formel kann ein zu berechnendes Integral $\int u v' dx$ auf ein anderes, unter Umständen einfacheres Integral $\int v u' dx$ zurückgeführt werden. Die Integration ist, wie die rechte Seite der Formel zeigt, jedenfalls nur teilweise ausgeführt. Das Verfahren wird daher als partielle Integration bezeichnet.

1. Beispiel: $\int x \sin x dx;$

Mit $u = x; \quad v' = \sin x,$
 $u' = 1; \quad v = -\cos x$ wird

$$\underline{\underline{\int x \sin x dx = x (-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C}}$$

2. Beispiel: $\int \sin^2 x dx$ (neue Art der Berechnung)

Mit $u = \sin x; \quad v' = \sin x;$
 $u' = \cos x; \quad v = -\cos x$ ergibt sich zunächst:

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx$$

Ersetzt man $\cos^2 x$ durch $1 - \sin^2 x$, so folgt:

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x dx$$

und hieraus:

$$2 \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x + C';$$

also ist

$$\underline{\underline{\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C}}$$

Aufgabenblatt Partielle Integration

Aufgabe 1

Bestimmen Sie mithilfe partieller Integration eine Stammfunktion zu:

a) $\int x \cos x \, dx$ b) $\int x \sin 2x \, dx$ c) $\int \sin x \cos x \, dx$

c) $\int \cos^2 x \, dx$ d) $\int x^2 \cos x \, dx$

e) $\int x e^{-x} \, dx$ f) $\int x a^x \, dx$ g) $\int e^x \cos x \, dx$

h) $\int e^{-x} \sin x \, dx$ i) $\int x \ln x \, dx$ j) $\int x^2 \ln x \, dx$

Überprüfen Sie bitte Ihre Lösungen durch anschließendes Differenzieren!

Aufgabe 2

Bestimmen Sie $\int \lg x \, dx$ und berechnen Sie die Größe des Flächenstücks, das vom Graphen der Funktion, der x-Achse und der Ordinate $x = 4$ begrenzt wird.