Der Neuberg-Mineurkreis / Darij Grinberg

1. Einleitung und geometrisches Repetitorium

Den Anstoß zu dieser Arbeit gab mir ein Artikel [6] von Thébault und Mineur aus dem Jahre 1931. Dieser war in der *Mathesis* erschienen, einer Zeitschrift, die auf Elementargeometrie fokussiert war. Da ich den Artikel selber nicht auffinden konnte, konnte ich nur auf eine Zentralblatt-Rezension zurückgreifen, die nur das Resultat des Artikels ohne Beweis skizzierte. Das Resultat war ein scheinbar vergessener geometrischer Satz über Vierecke, der sofort meine Neugier weckte. Nach einiger Zeit hatte ich einen synthetischen Beweis und eine Erweiterung gefunden, um die es im folgenden gehen wird. Bevor wir jedoch zur Formulierung dieser Sachverhalte kommen, sind einige **Vorbemerkungen** angebracht. Wer in der Geometrie erfahren ist, braucht diese nur flüchtig durchzulesen.

1. *Zur Notation:* Ich benutze die Abkürzung "Kreis $P_1P_2P_3$ " für den Kreis durch drei gegebene Punkte P_1, P_2 und P_3, und allgemeiner die Abkürzung "Kreis $P_1P_2...P_n$ " für den Kreis durch n gegebene Punkte P_1, P_2, ..., P_n, falls ein solcher Kreis existiert. Den Abstand zweier Punkte P und Q bezeichnen wir mit PQ.

2. *Orientierte Strecken:* Im Folgenden werden wir orientierte Strecken verwenden. Dies bedeutet folgendes:

Eine *gerichtete Gerade* ist definiert als ein Paar $(g;\ \overrightarrow{v_g})$ aus einer Geraden g und einem Vektor $\overrightarrow{v_g}$, der zur Geraden g parallel ist und die Länge 1 hat. Die Gerade g heißt *Trägergerade* der gerichteten Gerade $(g;\ \overrightarrow{v_g})$, und der Vektor $\overrightarrow{v_g}$ heißt *Richtung* dieser gerichteten Gerade.

Für jede Gerade g existieren genau zwei Vektoren $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$, die zu dieser Geraden g parallel sind und die Länge 1 haben. Somit gibt es für die Gerade g genau zwei gerichtete Geraden, die g als Trägergerade haben, nämlich $(g;\ \overrightarrow{v_1})$ und $(g;\ \overrightarrow{v_2})$. Wir *richten* die Gerade g, indem wir eine dieser beiden gerichteten Geraden auswählen.

Sei $(g;\ \overrightarrow{v_g})$ eine gerichtete Gerade. Für zwei beliebige Punkte A und B auf ihrer Trägergeraden g bezeichnen wir mit $\overline{AB}$ die reelle Zahl λ, für die $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{v_g}$ ist. Diese Zahl λ ist eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen $\overline{AB} = \lambda$ als *orientierte Streckenlänge* der Strecke AB. Dabei ist natürlich "orientierte Streckenlänge der Strecke AB" nicht das gleiche wie "orientierte Streckenlänge der Strecke BA".

Natürlich hängt diese orientierte Streckenlänge ab von der Richtung der gerichteten Geraden $(g;\ \overrightarrow{v_g})$. Deshalb macht es nur dann Sinn, von der orientierten Streckenlänge einer Strecke AB zu sprechen, wenn A und B zwei Punkte auf einer Geraden sind, die *gerichtet* ist (und nicht etwa zwei zufällige Punkte der Ebene).

Für orientierte Strecken gelten folgende Regeln: Sei $(g;\ \overrightarrow{v_g})$ eine gerichtete Gerade.

- Für jeden Punkt A auf g ist $\overline{AA} = 0$.
- Für zwei beliebige Punkte A und B auf g gilt $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$, also $\overline{BA} = -\overline{AB}$.
- Für drei beliebige Punkte A, B und C auf g gilt $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$ und $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

- Für zwei beliebige Punkte A und B auf g gilt $\overline{AB} = AB$ oder $\overline{AB} = -AB$. (Denn nach der Definition von $\overline{AB}$ ist $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \overrightarrow{v_g}$, also $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overline{AB} \cdot \overrightarrow{v_g}\right| = \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_g}\right| = \left|\overline{AB}\right|$ (denn $\left|\overrightarrow{v_g}\right| = 1$, da der Vektor $\overrightarrow{v_g}$ die Länge 1 hat), und damit $\overline{AB} = AB$ oder $\overline{AB} = -AB$.)

- Für zwei beliebige Punkte A und B auf g gilt: $\overline{AB}^2 = AB^2$. (Dies folgt aus $\overline{AB} = AB$ oder $\overline{AB} = -AB$.)

- Für drei beliebige Punkte A, B und C auf g mit $B \neq C$ gilt:
  $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{AB}{BC}$, wenn der Punkt B innerhalb der Strecke AC liegt;
  $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = -\dfrac{AB}{BC}$, wenn der Punkt B außerhalb der Strecke AC liegt;
  $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 0$, wenn $B = A$ ist.
  Ist $B = C$ und $A \neq C$, dann schreibt man üblicherweise $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \infty$. (Hierbei wird kein Unterschied zwischen $+\infty$ und $-\infty$ gemacht.)

- Für drei beliebige Punkte A, B und C auf g gilt:
  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -AB \cdot AC$, wenn der Punkt A innerhalb der Strecke BC liegt;
  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC$, wenn der Punkt A außerhalb der Strecke BC liegt;
  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$, wenn $A = B$ oder $A = C$ ist.

Die letzten drei Regeln haben folgende Konsequenz: Die Werte von $\overline{AB}^2$, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ und $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ hängen nur von den Punkten A, B und C ab, und nicht von der Richtung der gerichteten Geraden $\left(g;\ \overrightarrow{v_g}\right)$. Das heißt: Sind A, B und C drei Punkte auf einer Geraden, dann können wir diese Gerade zwar auf zwei verschiedene Weisen richten, aber beide führen auf den gleichen Wert von $\overline{AB}^2$, auf den gleichen Wert von $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ und auf den gleichen Wert von $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$. Deshalb können wir für beliebige drei Punkte A, B und C auf einer Geraden von den Termen $\overline{AB}^2$, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ und $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ sprechen, ohne daß wir dafür erst die Gerade richten müssen (wobei aber $\overline{AB}^2$ nur eine komplizierte Schreibweise für AB^2 ist).

Eine hilfreiche Eigenschaft orientierter Strecken ist die *Eindeutigkeit des Teilverhältnisses*: Seien B_1 und B_2 zwei Punkte auf einer Geraden AC. Dann gilt $B_1 = B_2$ genau dann, wenn $\dfrac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \dfrac{\overline{AB_2}}{\overline{B_2C}}$ ist.

Wichtig ist auch der *Sekantensatz für orientierte Strecken*: Seien u und v zwei Geraden, die sich in einem Punkt P schneiden. Seien U und U' zwei Punkte auf der Geraden u, und seien V und V' zwei Punkte auf der Geraden v. Dann gilt $\overline{PU} \cdot \overline{PU'} = \overline{PV} \cdot \overline{PV'}$ genau dann, wenn es einen Kreis gibt, der die Gerade u in den Punkten U und U' schneidet und die Gerade v in den Punkten V und V' schneidet.[1] Dieser Satz

[1] Hierbei bedienen wir uns der folgenden Konvention:
Wenn ein Kreis k eine Gerade g in einem Punkt T berührt, dann sagt man, der Kreis k schneidet

ist leicht zu beweisen und ist Teil von [7], Theorem 18 (um genau zu sein, ist er die Äquivalenz der Aussagen $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_3$ in jenem Satz[2]).

3. *Projektive Geometrie und Entartungsfälle:* Um zu verstehen, was mit geometrischen Aussagen in gewissen Entartungsfällen passiert, ist es hilfreich, eine Vorstellung von der projektiven Ebene zu haben. Im Folgenden werde ich einige Grundlagen für diese Vorstellung erläutern. Die projektive Ebene ist ein strenges und abstraktes Konzept aus der projektiven Geometrie; jedoch werde ich bei den nachfolgenden Erläuterungen sehr unstreng und unformal vorgehen, da wir in diesem Artikel die projektive Ebene nur als Vorstellung und nicht als exakte Theorie verwenden werden.

Die projektive Ebene ist die Ergänzung der Euklidischen Ebene um sogenannte Fernpunkte und die sogenannte Ferngerade. Diese haben folgende Eigenschaften: Sei g eine Gerade (nicht die Ferngerade). Alle zu der Geraden g parallelen Geraden haben einen gemeinsamen "Punkt", den sogenannten *Fernpunkt* der Geraden g, der damit natürlich auch der Fernpunkt jeder zu g parallelen Geraden ist. Alle Fernpunkte liegen auf einer "Geraden", der sogennanten *Ferngeraden.* Natürlich sind Fernpunkte keine Punkte der Euklidischen Ebene, und die Ferngerade keine Gerade der Euklidischen Ebene (weshalb man z. B. nicht von der Parallelen zur Ferngeraden durch einen Punkt, oder vom Abstand zweier Fernpunkte sprechen kann), aber es hilft der Intuition, sie sich als Punkte und Geraden vorzustellen.

Noch eine hilfreiche Konvention: Ist B der Fernpunkt einer Geraden AC, dann definiert man das orientierte Teilverhältnis $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ wie folgt: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = -1$. (Natürlich ist dabei weder der Abstand $\overline{AB}$, noch der Abstand $\overline{BC}$ definiert, denn B ist ja kein wirklicher Punkt.)

Eine hilfreiche Vorstellung ist ferner, daß ein Kreis zu der Vereinigung einer Geraden mit der Ferngeraden entarten kann. Das heißt: Für jede Gerade g können wir die Vereinigung der Geraden g mit der Ferngeraden[3] als einen (entarteten) "Kreis" ansehen. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist ein Fernpunkt - nämlich der gemeinsame Fernpunkt aller zu g orthogonalen Geraden. Der Radius dieses Kreises ist nicht definiert.[4]

---

die Gerade g in den Punkten T und T.

Somit ist die Aussage "es gibt einen Kreis, der die Gerade u in den Punkten U und U' schneidet und die Gerade v in den Punkten V und V' schneidet" stärker als die Aussage "die Punkte U, U', V und V' liegen auf einem Kreis", denn in dem Fall, wenn die Punkte U und U' zusammenfallen, gilt die zweite Aussage sicher, während die erste Aussage nicht notwendigerweise gelten muß (sie ist in diesem Fall äquivalent dazu, daß es einen Kreis gibt, der die Gerade u im Punkt U berührt und die Gerade v in den Punkten V und V' schneidet).

[2] In [7], Theorem 18 wurde die zusätzliche Bedingung gestellt, daß die Punkte U, U', V und V' von P verschieden sind. Jedoch ist der Fall, wenn einige von diesen Punkten mit P übereinstimmen, leicht abzuhandeln.

[3] "Vereinigung" im mengentheoretischen Sinne, also die Menge aller Punkte, die auf der Geraden g oder auf der Ferngeraden liegen.

[4] Man beachte, daß diese Vorstellung, ein Kreis kann zu der Vereinigung einer Geraden mit der Ferngeraden entarten, *mehr Sinn macht* als die gängige Vorstellung, ein Kreis kann zu einer Geraden entarten. Denn ein Kreis schneidet "viele" Geraden (nämlich alle Sekanten) in je zwei Punkten, und daher sollte man dies auch von einem entarteten Kreis erwarten. Aber eine Gerade schneidet jede andere Gerade in nur einem Punkt. Dagegen schneidet die Vereinigung einer Geraden mit der Ferngeraden "fast jede" Gerade (nämlich jede Gerade, die nicht durch den Schnittpunkt der Geraden mit der Ferngeraden geht) in zwei Punkten.

4. *Orientierte Winkel modulo* 180°*:* Im folgenden werden wir durchweg orientierte Winkel verwenden, und zwar *orientierte Winkel modulo* 180°, auch *Kreuze* oder *Kreiswinkel* genannt. Verschiedene Einführungen in diese Art von Winkeln finden sich in [1] (mit [2] als interessante Fortsetzung), [3] (Abschnitt 1.7), [4] und [5]. Hier skizzieren wir eine mögliche (und von dem gewöhnlichen Winkelbegriff unabhängige) Definition von Kreiswinkeln, und listen deren wesentliche Eigenschaften ohne Beweis auf:

Ein *Euklidisches Geradenpaar* wird definiert als Paar $(g;\ h)$, wobei g und h zwei Geraden sind, von denen keine mit der Ferngeraden zusammenfällt. Kreiswinkel sind Äquivalenzklassen von Euklidischen Geradenpaaren, wobei zwei Euklidische Geradenpaare $(g;\ h)$ und $(g';\ h')$ genau dann als äquivalent gelten, wenn es eine gleichsinnige Kongruenzabbildung gibt, die die Gerade g auf die Gerade g' abbildet und die Gerade h auf die Gerade h' abbildet. Die Äquivalenzklasse eines Euklidischen Geradenpaares $(g;\ h)$ wird mit $\measuredangle(g;\ h)$ bezeichnet und *Kreiswinkel zwischen den Geraden g und h* genannt[5].

Ein Kreiswinkel 0° wird so definiert, daß $\measuredangle(g;\ g) = 0°$ für jede Gerade g gilt. Ferner wird Addition und Subtraktion von Kreiswinkeln definiert, sodaß die Kreiswinkel eine abelsche Gruppe bilden (mit dieser Addition, und mit dem Winkel 0° als neutrales Element), ferner $\measuredangle(g;\ h) = -\measuredangle(h;\ g)$ für beliebige Geraden g und h gilt, und schließlich

$$\begin{aligned} \measuredangle(g_1;\ g_2) + \measuredangle(g_2;\ g_3) + ... + \measuredangle(g_{n-1};\ g_n) &= \measuredangle(g_1;\ g_n) \qquad \text{und} \\ \measuredangle(g_1;\ g_2) + \measuredangle(g_2;\ g_3) + ... + \measuredangle(g_{n-1};\ g_n) + \measuredangle(g_n;\ g_1) &= 0° \end{aligned}$$

für beliebige n Geraden g_1, g_2, ..., g_n gilt. Für zwei Geraden g und h gilt genau dann $\measuredangle(g;\ h) = 0°$, wenn $g \parallel h$ ist.

Ein Kreiswinkel 90° wird so definiert, daß zwei Geraden g und h genau dann $\measuredangle(g;\ h) = 90°$ erfüllen, wenn $g \perp h$ ist. Wir stellen fest, daß dann $90° + 90° = 0°$, also $90° = -90°$ ist.

Für jeden Kreiswinkel φ und jede natürliche Zahl n definieren wir den Winkel $n\varphi$ als den Kreiswinkel $\underbrace{\varphi + \varphi + ... + \varphi}_{n \text{ Summanden}}$, den Winkel 0φ als 0°, und den Winkel $(-n)\varphi$ als $-(n\varphi)$.

Bislang haben wir nur Kreiswinkel zwischen zwei Geraden definiert. Jetzt führen wir Kreiswinkel zwischen drei Punkten ein: Für drei Punkte A, B und C in der Ebene, die $A \neq B$ und $B \neq C$ erfüllen, wird $\measuredangle ABC$ als Abkürzung für $\measuredangle(AB;\ BC)$ definiert. Dabei können unter den Punkten A, B und C sogar Fernpunkte sein, *solange* keine der zwei Geraden AB und BC mit der Ferngeraden zusammenfällt! Wichtige Eigenschaften von Kreiswinkeln sind:

- Seien u und v zwei Geraden durch einen Punkt P. Seien U und U' zwei von P verschiedene Punkte auf der Geraden u, und seien V und V' zwei von P verschiedene Punkte auf der Geraden v. Dann ist

$$\measuredangle UPV = \measuredangle U'PV' = -\measuredangle VPU = -\measuredangle V'PU' = \measuredangle(u;\ v) = -\measuredangle(v;\ u).$$

[5] wobei hier die Reihenfolge der Geraden maßgeblich ist - das heißt, der Kreiswinkel zwischen zwei Geraden g und h ist im Allgemeinen nicht das Gleiche wie der Kreiswinkel zwischen den Geraden h und g

(Dies ist trivial, denn $\measuredangle UPV = \measuredangle(u;\ v)$, $\measuredangle U'PV' = \measuredangle(u;\ v)$, $\measuredangle VPU = \measuredangle(v;\ u)$ und $\measuredangle V'PU' = \measuredangle(v;\ u)$.)

- Seien A, B und C drei Punkte in der Ebene, für die $A \neq B$ und $B \neq C$ gilt, und sodaß der Punkt B kein Fernpunkt ist. Genau dann liegen die Punkte A, B und C auf einer Geraden, wenn $\measuredangle ABC = 0°$ ist.

- Seien A, B, C_1 und C_2 vier Punkte in der Ebene, für die $A \neq B$, $B \neq C_1$ und $B \neq C_2$ gilt, und sodaß der Punkt B kein Fernpunkt ist. Genau dann liegen die Punkte B, C_1 und C_2 auf einer Geraden, wenn $\measuredangle ABC_1 = \measuredangle ABC_2$ gilt.

- *Differenzenaustauschsatz:* Für beliebige vier Geraden a, b, c und d ist $\measuredangle(a;\ b) - \measuredangle(c;\ d) = \measuredangle(a;\ c) - \measuredangle(b;\ d)$.

- *Parallelenwinkelsatz:* Seien g, h, g' und h' vier Geraden mit $g \parallel g'$. Dann gilt $\measuredangle(g;\ h) = \measuredangle(g';\ h')$ genau dann, wenn $h \parallel h'$ ist.

- *Umfangswinkelsatz:* Sind A, B, C und D vier Punkte auf der Ebene, für die die Kreiswinkel $\measuredangle ACB$ und $\measuredangle ADB$ wohldefiniert sind, dann gilt: Genau dann ist $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$, wenn die vier Punkte A, B, C und D auf einem Kreis liegen.

- *Sehnentangentenwinkelsatz:* Sind A, B und C drei Punkte auf einem Kreis, und ist t die Tangente an diesen Kreis im Punkt A, dann ist $\measuredangle(t;\ AB) = \measuredangle ACB$ und $\measuredangle(AB;\ t) = \measuredangle BCA$.

- *Mittelpunktswinkelsatz:* Sind A, B und C drei Punkte auf einem Kreis, und ist O der Mittelpunkt dieses Kreises, dann ist $\measuredangle OBA = \measuredangle BAO = 90° - \measuredangle ACB$.

- *Ähnlichkeitskriterium (ww):* Seien ABC und $A'B'C'$ zwei nicht-entartete Dreiecke, unter deren Ecken keine Fernpunkte vorkommen.[6] Dann gilt:
  Genau dann sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gleichsinnig ähnlich, wenn $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$ und $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$ ist.
  Genau dann sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegensinnig ähnlich, wenn $\measuredangle ABC = -\measuredangle A'B'C'$ und $\measuredangle ACB = -\measuredangle A'C'B'$ ist.

Der größte Vorteil von Kreiswinkeln ist - wie der von orientierten Strecken -, daß man mit ihrer Hilfe viele Fallunterscheidungen hinsichtlich von Lagebeziehungen umgehen kann.

5. *Nullkreise*: Im Zweiten Beweis von Satz 4 werden wir mit sogenannten "Nullkreisen" arbeiten. Ein *Nullkreis* ist schlichtweg ein Kreis mit Radius 0, und alles, was vom Leser verlangt wird, ist es, keine Angst davor zu haben, mit solchen Kreisen wie mit ganz gewöhnlichen Kreisen umzugehen. Konkret gelten für Nullkreise folgende Regeln:

Für jeden Punkt P (der kein Fernpunkt ist) gibt es genau einen Kreis um den Punkt P mit dem Radius 0. Diesen Kreis bezeichnen wir als den P-*Nullkreis.* Dieser Kreis geht durch genau einen Punkt, nämlich durch den Punkt P. Tangenten an diesen

[6] Ein Dreieck heißt *entartet*, wenn es eine Gerade gibt, die durch alle seine drei Ecken geht. Wir müssen hier entartete Dreiecke ausschließen, da es für entartete Dreiecke keine Kriterien für Ähnlichkeit gibt, die allein mit Winkeln auskommen.

Kreis sind alle Geraden durch den Punkt P. Die Potenz eines Punktes Q bezüglich dem P-Nullkreis ist QP^2.

2. Die Hauptresultate

Wir beginnen mit dem folgenden einfachen Satz (Fig. 1):

Satz 1: Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Die Tangente an den Kreis ABC im Punkt B schneide die Gerade CA in dem Punkt Y. Dann gilt:

$$\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = -\frac{BC^2}{AB^2}.$$

In Worten: Die in einer Ecke eines Dreiecks an den Umkreis gelegte Tangente teilt die gegenüberliegende Seite äußerlich im Verhältnis der Quadrate der beiden anliegenden Seiten.

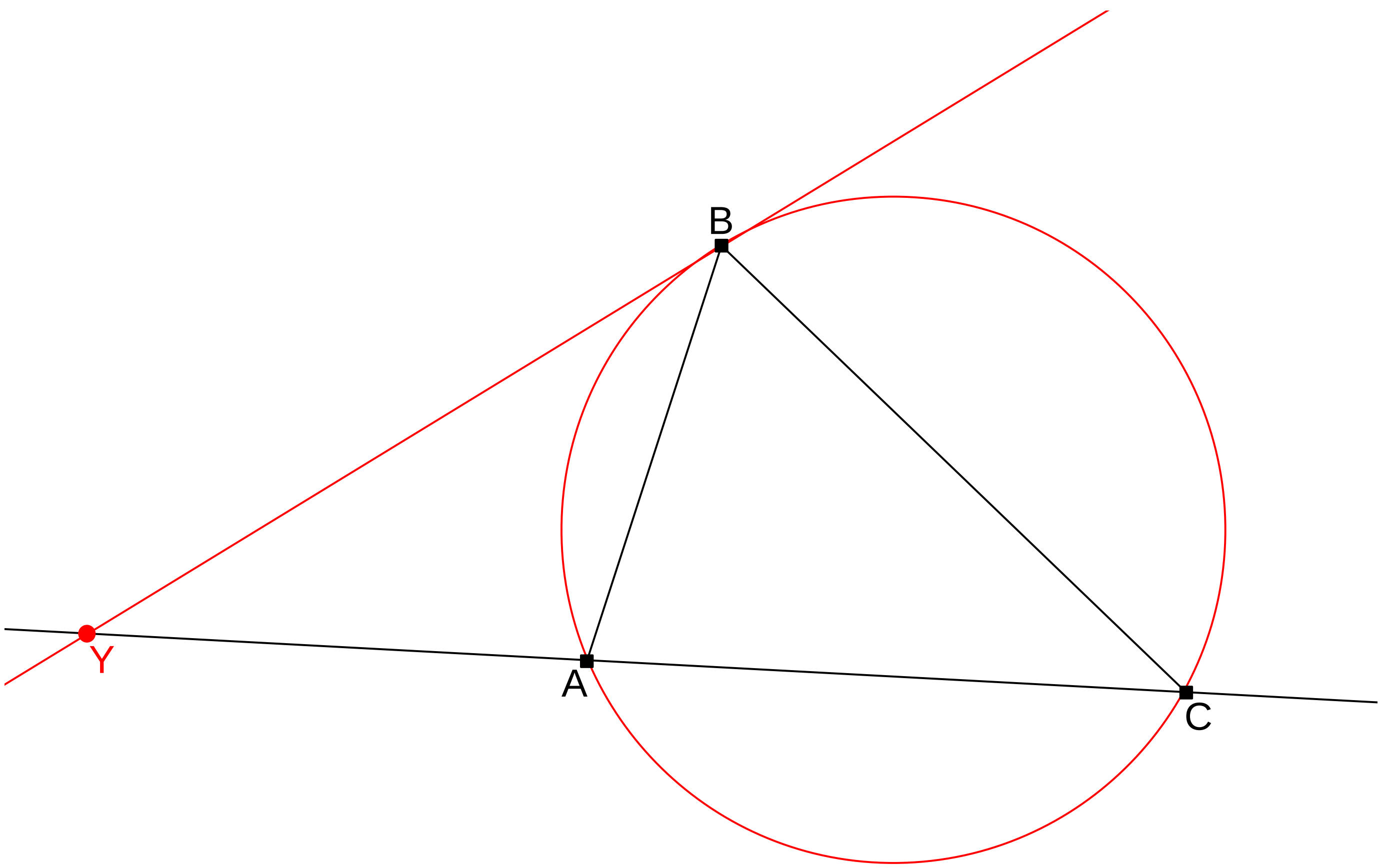

Fig. 1

Beweis: Da die Gerade BY die Tangente an den Kreis ABC im Punkt B ist, gilt laut dem Sehnentangentenwinkelsatz $\measuredangle(AB;\ BY) = \measuredangle ACB$. Wegen $\measuredangle(AB;\ BY) = \measuredangle ABY$ und $\measuredangle ACB = -\measuredangle BCY$ wird dies zu $\measuredangle ABY = -\measuredangle BCY$. Ferner ist offensichtlich $\measuredangle AYB = -\measuredangle BYC$. Also sind die Dreiecke ABY und BCY gegensinnig ähnlich (nach dem Ähnlichkeitskriterium (ww)), und es folgt

$$\frac{YC}{YB} = \frac{BC}{AB} \qquad \text{und} \qquad \frac{YB}{YA} = \frac{BC}{AB}.$$

Multiplikation dieser zwei Gleichungen ergibt

$$\frac{YC}{YB} \cdot \frac{YB}{YA} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2, \qquad \text{also} \qquad \frac{YC}{YA} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2, \qquad \text{und damit}$$

$$\frac{CY}{YA} = \frac{YC}{YA} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Da nun der Punkt Y außerhalb der Strecke CA liegt (denn sonst würde der Punkt Y innerhalb des Kreises ABC liegen, was aber unmöglich ist, da die Gerade BY diesen Kreis berührt), gilt $\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = -\frac{CY}{YA}$, also $\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = -\frac{BC^2}{AB^2}$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Betrachtet man nicht nur die Tangente an den Kreis ABC im Punkt B, sondern auch die entsprechenden Tangenten in den Punkten C und A, dann kommt man schnell auf folgendes Resultat (Fig. 2):

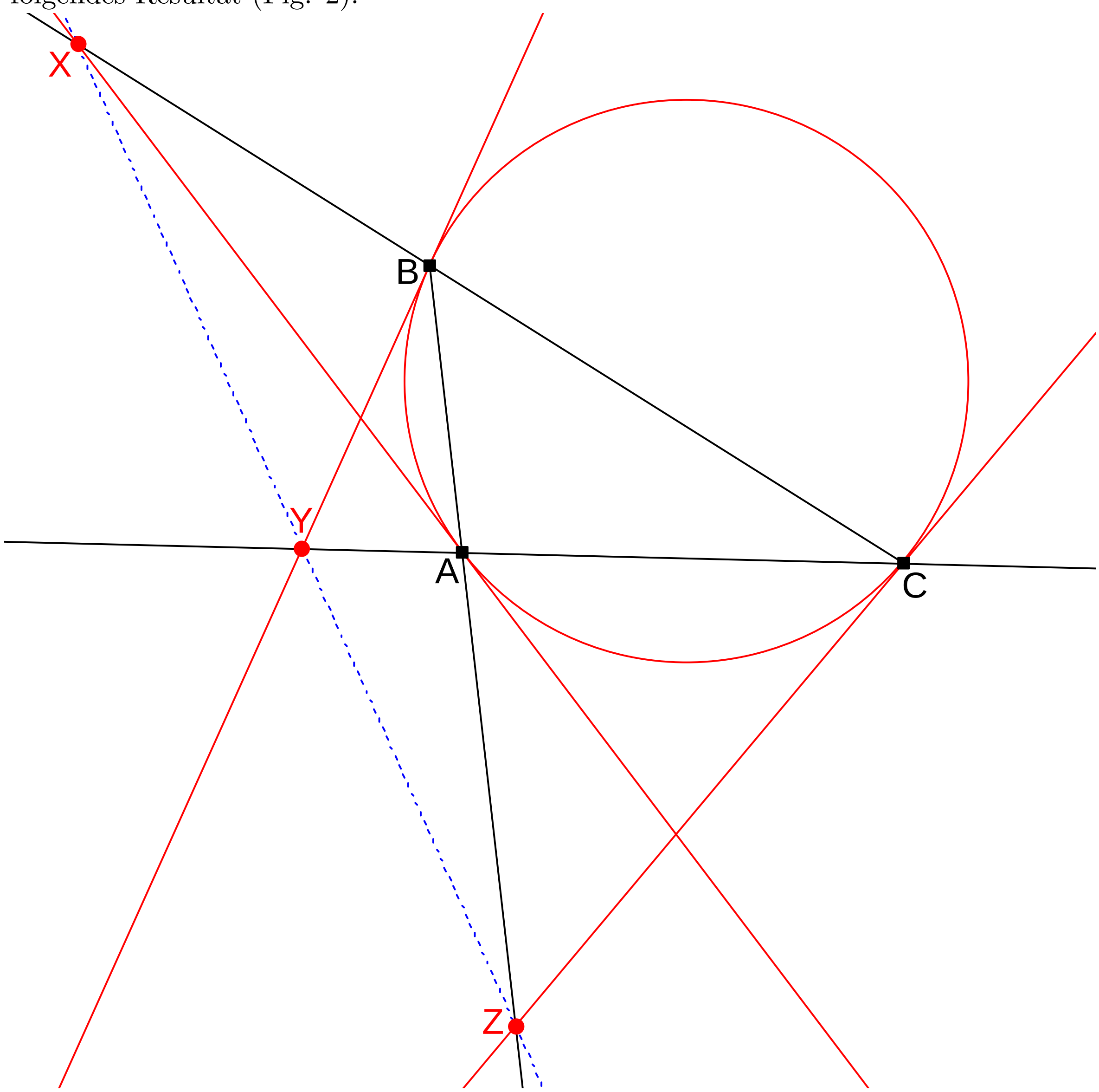

Fig. 2

Satz 2: Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Die Tangenten an den Kreis ABC

in den Punkten A, B und C schneiden die Geraden BC, CA bzw. AB in den Punkten X, Y bzw. Z.

a) Dann gilt

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = -\frac{AB^2}{CA^2}; \qquad \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = -\frac{BC^2}{AB^2}; \qquad \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = -\frac{CA^2}{BC^2}.$$

b) Die Punkte X, Y und Z liegen auf einer Geraden.

Diese Gerade heißt die **Lemoineachse** des Dreiecks ABC.

Beweis von Satz 2: Nach Satz 1 ist $\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = -\frac{BC^2}{AB^2}$. Analog zeigt man $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = -\frac{AB^2}{CA^2}$ und $\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = -\frac{CA^2}{BC^2}$. Damit ist Satz 2 **a)** bewiesen. Aus

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \left(-\frac{AB^2}{CA^2}\right) \cdot \left(-\frac{BC^2}{AB^2}\right) \cdot \left(-\frac{CA^2}{BC^2}\right) = -1$$

folgt nach dem Satz von Menelaos (angewandt auf das Dreieck ABC und die Punkte X, Y und Z auf seinen Seitengeraden BC, CA bzw. AB), daß die Punkte X, Y und Z auf einer Geraden liegen. Damit ist Satz 2 **b)** bewiesen, und der Beweis von Satz 2 ist vollständig.

Obiger Beweis von Satz 2 **b)** ist nicht der einzig mögliche; Beweise mithilfe von Polaren, dem Satz von Pascal und anderen Methoden finden sich in der Literatur zuhauf.

Nun folgt aus Satz 2, daß die Punkte auf den Seitengeraden eines Dreiecks ABC, die die Seiten jeweils äußerlich im Verhältnis der Quadrate der anliegenden Seiten teilen, auf einer Geraden liegen (diese Punkte sind nämlich die Punkte X, Y und Z). Man kann sich fragen, ob ein ähnliches Resultat gilt, wenn die Seiten eines Vierecks äußerlich im Verhältnis der Quadrate der anliegenden Seiten geteilt werden. Hier setzt das Resultat von [6] an (Fig. 3):

Satz 3, der Satz von Neuberg-Mineur: Sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck, und seien X, Y, Z und W die Punkte auf den Geraden AB, BC, CD bzw. DA, die die Seiten AB, BC, CD bzw. DA jeweils äußerlich im Verhältnis der Quadrate der beiden anliegenden Seiten teilen, d. h. für die gilt:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = -\frac{DA^2}{BC^2}; \qquad \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} = -\frac{AB^2}{CD^2}; \qquad \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZD}} = -\frac{BC^2}{DA^2}; \qquad \frac{\overline{DW}}{\overline{WA}} = -\frac{CD^2}{AB^2}.$$

Dann liegen die Punkte X, Y, Z und W auf einem Kreis.

Diesen Kreis bezeichnen wir als **Neuberg-Mineurkreis** des Vierecks $ABCD$.

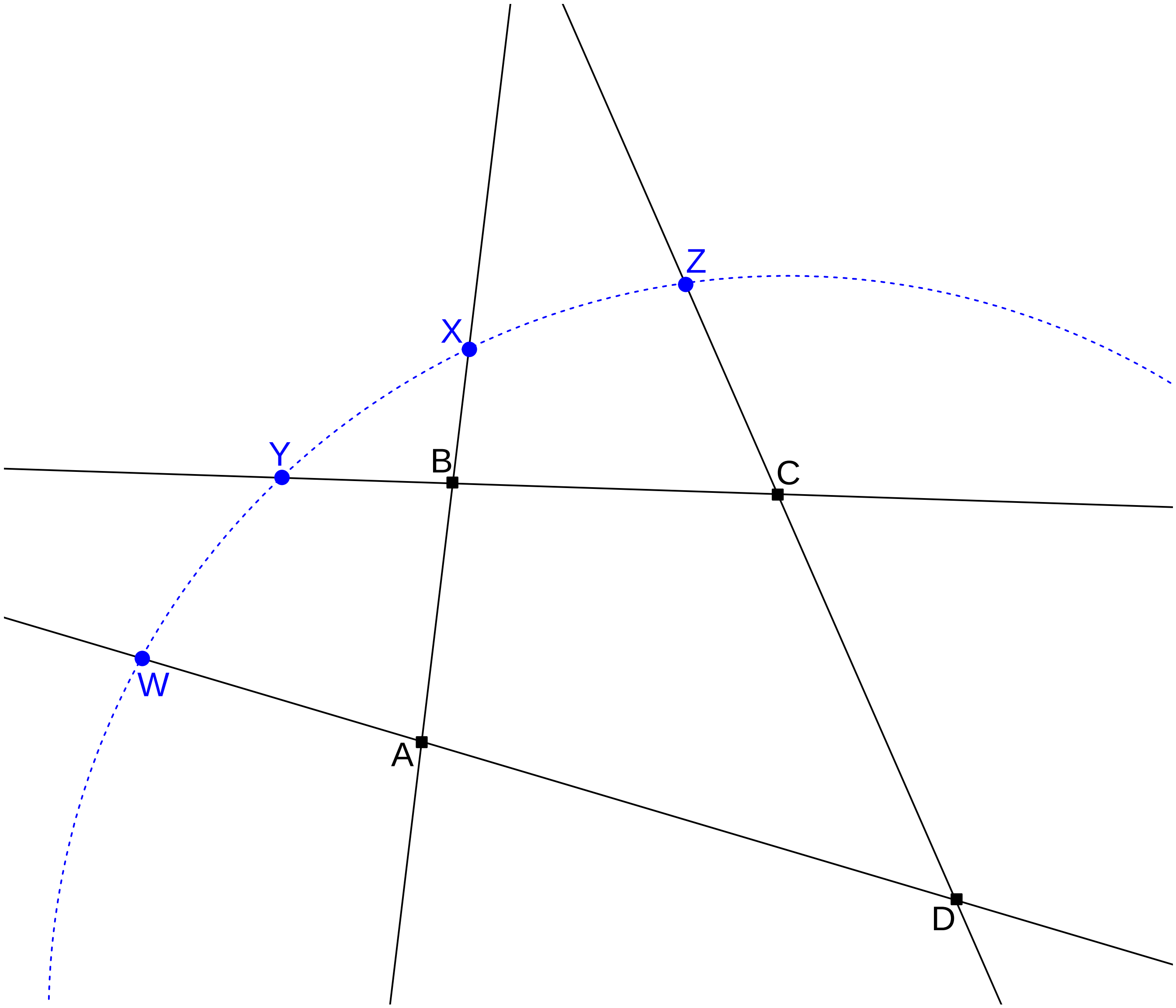

Fig. 3

Was in der Rezension von [6] nicht erwähnt wurde, aber nicht minder interessant ist (Fig. 4):

Satz 4: In der Konfiguration von Satz 3 gilt: Ist das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck, dann liegen die Punkte X, Y, Z und W auf einer Geraden.

Das heißt, bei einem Sehnenviereck entartet der Neuberg-Mineurkreis zu der Vereinigung einer Geraden mit der Ferngeraden.

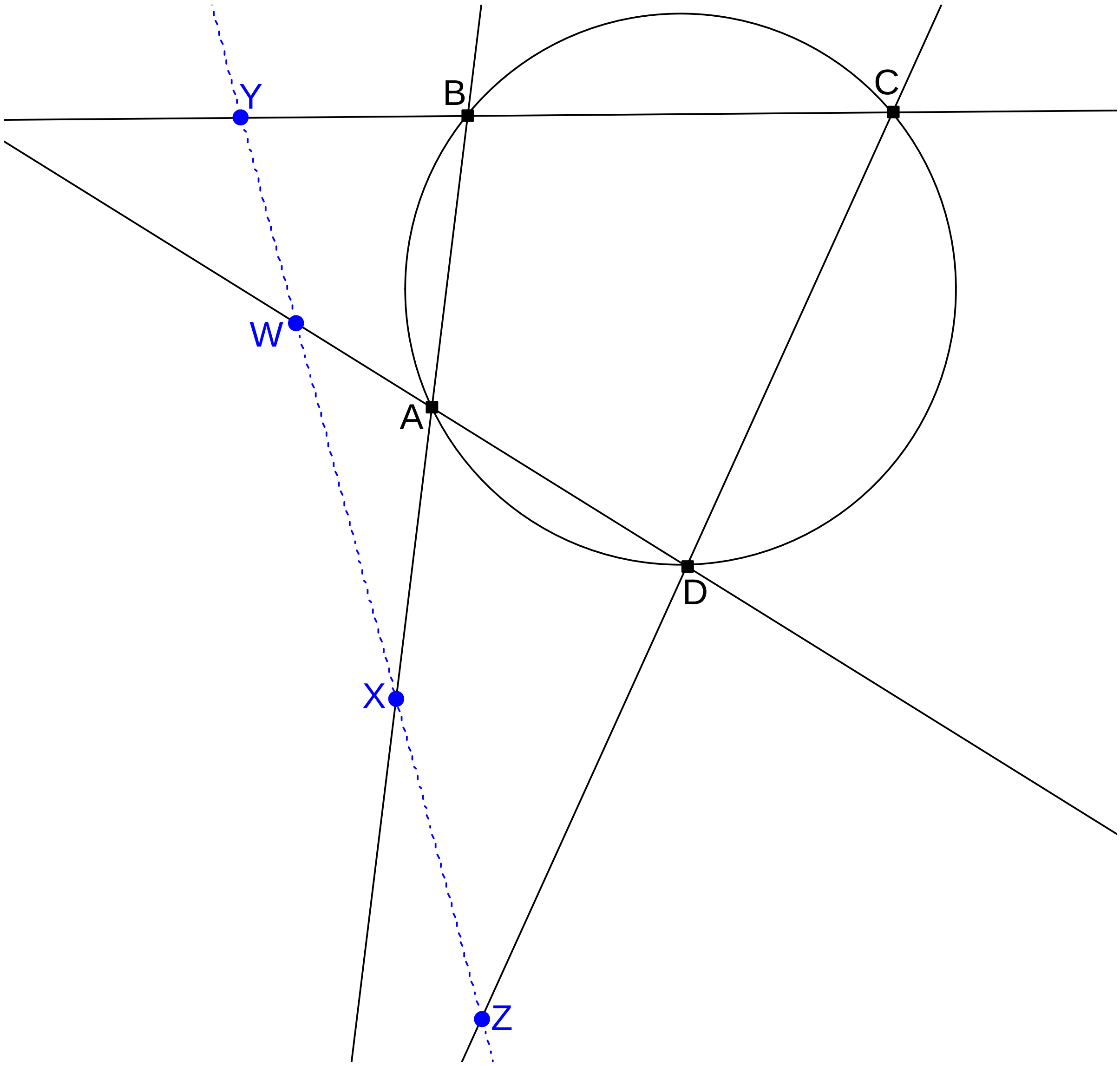

Fig. 4

3. Ein Hilfssatz über gleichsinnig ähnliche Dreiecke

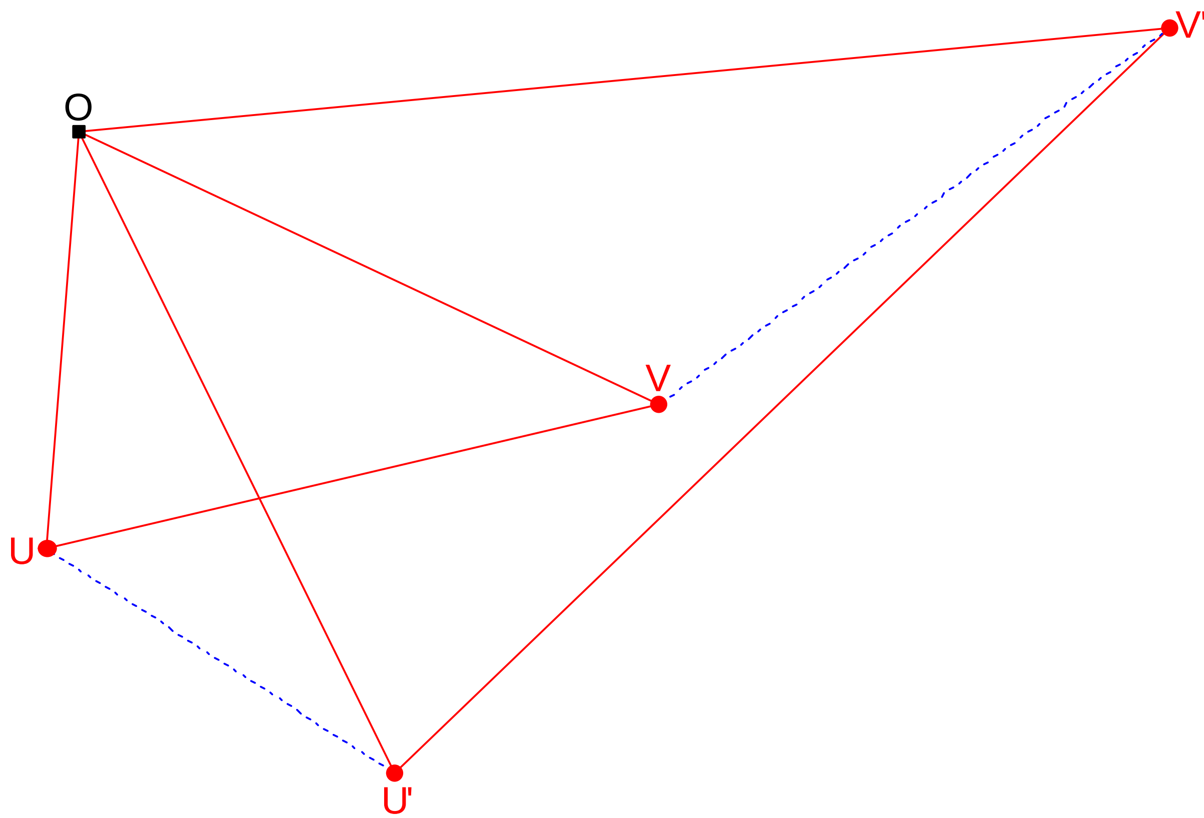

Fig. 5

Wir werden im folgenden zuerst Satz 3, dann Satz 4 nachweisen. Bevor wir aber dazu kommen, zeigen wir einen sehr einfachen Hilfssatz über gleichsinnig ähnliche Dreiecke (Fig. 5):

> **Satz 5:** Seien O, U, V, U' und V' fünf Punkte, sodaß die Dreiecke OUV und $OU'V'$ gleichsinnig ähnlich sind. Dann sind die Dreiecke OUU' und OVV' gleichsinnig ähnlich.

Beweis von Satz 5: Es ist sehr leicht, Satz 5 zu beweisen, indem man nicht-orientierte Winkel oder orientierte Winkel modulo 360° verwendet. Wir wollen aber der Konsequenz halber Kreiswinkel, also orientierte Winkel modulo 180° benutzen. Mit dieser Art von Winkeln ist Satz 5 schwieriger zu beweisen. Ein solcher Beweis verläuft folgendermaßen:

(Siehe Fig. 6.) Wir nehmen an, daß die Dreiecke OUV, $OU'V'$, OUU' und OVV' alle nicht-entartet sind.[7] Sei P der Schnittpunkt der Geraden UV und $U'V'$. Da die Dreiecke OUV und $OU'V'$ gleichsinnig ähnlich sind, ist $\measuredangle OUV = \measuredangle OU'V'$. Mit anderen Worten: $\measuredangle OUP = \measuredangle OU'P$. Daher liegen die Punkte O, P, U und U' auf einem Kreis. Somit ist $\measuredangle OUU' = \measuredangle OPU'$. Analog ist $\measuredangle OVV' = \measuredangle OPV'$. Nun ist $\measuredangle OPU' = \measuredangle OPV'$. Somit ist $\measuredangle OUU' = \measuredangle OVV'$. Analog gilt $\measuredangle OU'U = \measuredangle OV'V$. Daher sind (laut dem Ähnlichkeitskriterium (ww)) die Dreiecke OUU' und OVV' gleichsinnig ähnlich, und Satz 5 ist bewiesen.

[7] Den Fall von entarteten Dreiecken kann der Leser abhandeln. Es ist zu beachten, daß man zum Beweis der Ähnlichkeit entarteter Dreiecke nicht mit Winkeln alleine auskommt, sondern Streckenverhältnisse benötigt; hier ist die Verwendung orientierter Strecken sinnvoll.

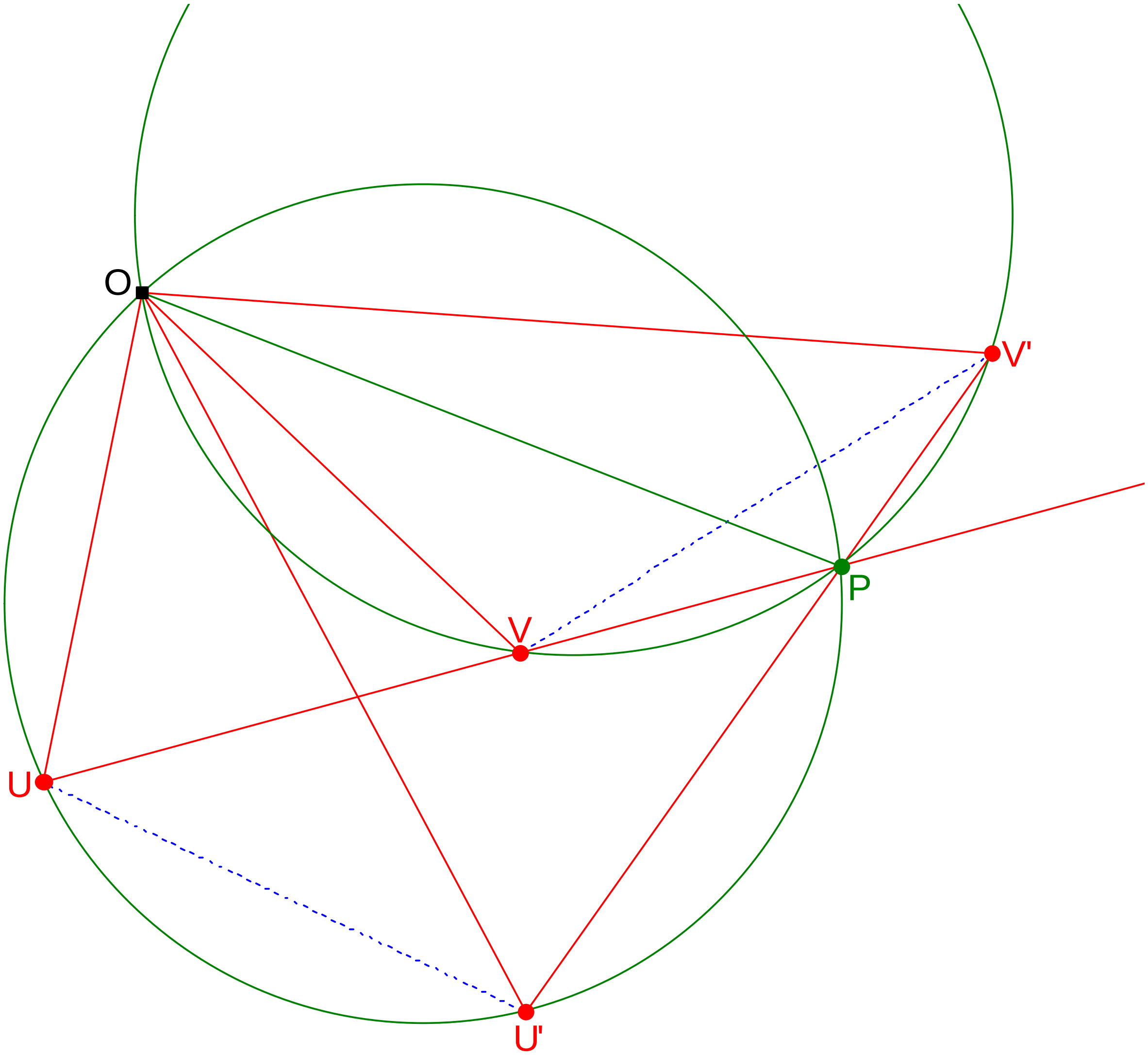

Fig. 6

4. Beweis von Satz 3

Nun kommen wir zum *Beweis von Satz 3*: In der Konfiguration von Satz 3 betrachten wir die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten des Vierecks $ABCD$. Sei also E der Schnittpunkt der Geraden AB und CD, und sei F der Schnittpunkt der Geraden BC und DA.

(Siehe Fig. 7.) Die Kreise EBC und EDA schneiden sich außer in E noch in einem weiteren Punkt; wir bezeichnen diesen Punkt mit P. [8]. Dann haben wir $\measuredangle PBC = \measuredangle PEC$ (Umfangswinkelsatz im Kreis $EBCP$) und $\measuredangle PED = \measuredangle PAD$ (Umfangswinkelsatz im Kreis $EDAP$). Damit ist $\measuredangle PBC = \measuredangle PEC = \measuredangle PED = \measuredangle PAD$, also $\measuredangle PBF = \measuredangle PBC = \measuredangle PAD = \measuredangle PAF$. Folglich liegt der Punkt P auf dem Kreis FAB. Analog liegt der Punkt P auf dem Kreis FCD. Insgesamt liegt also der Punkt P auf den Kreisen EBC, EDA, FAB und FCD. Damit haben wir gezeigt:

[8] Wenn sich die Kreise EBC und EDA im Punkt E berühren, dann setzen wir $P = E$.

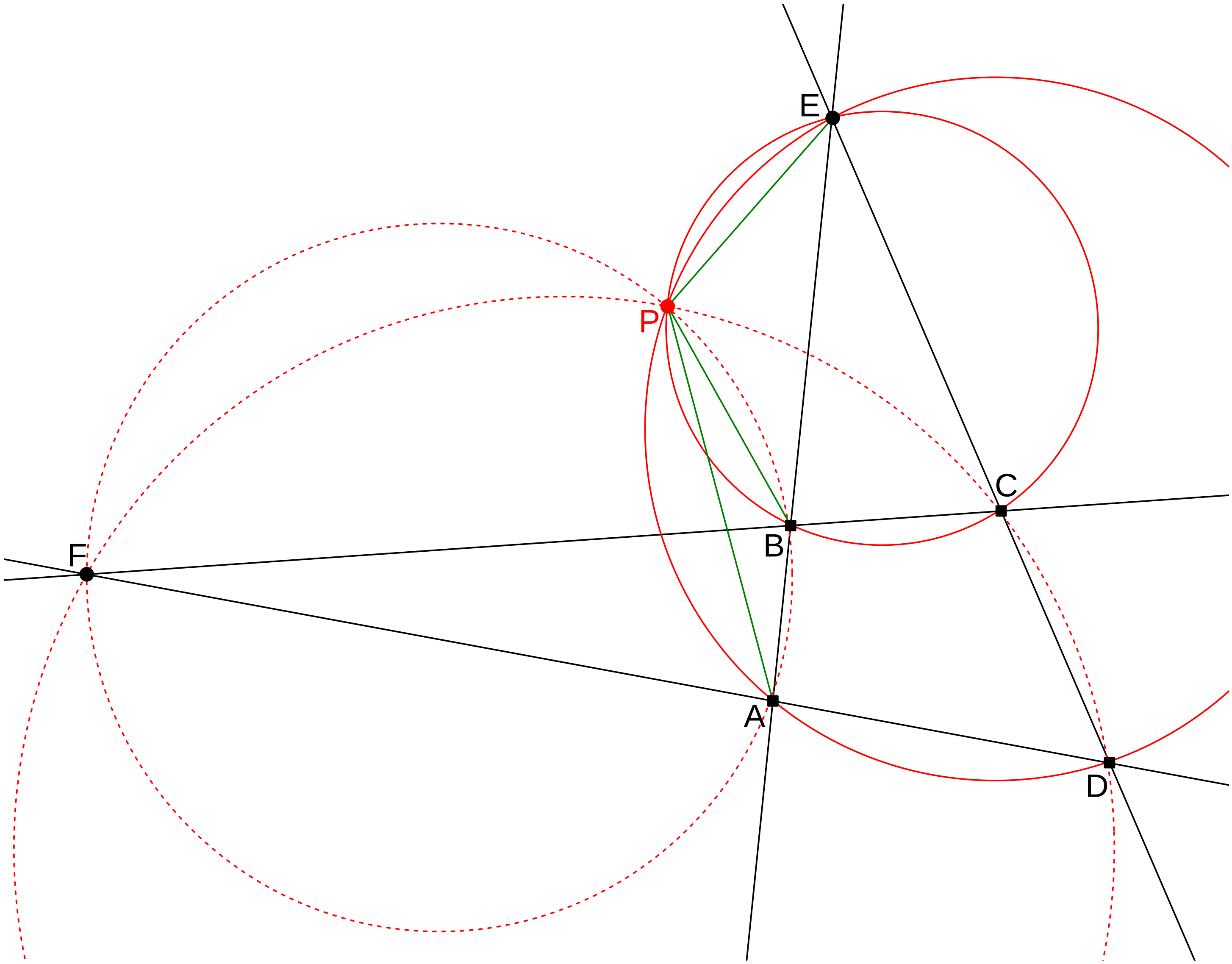

Fig. 7

Satz 6, der Satz von Steiner-Miquel: Sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck. Sei E der Schnittpunkt der Geraden AB und CD, und sei F der Schnittpunkt der Geraden BC und DA. Dann haben die Kreise EBC, EDA, FAB und FCD einen gemeinsamen Punkt P.

Dieser Punkt P heißt **Miquelpunkt** des Vierecks $ABCD$ (oder auch Miquelpunkt der vier Geraden AB, BC, CD und DA). (Siehe Fig. 8.)

In Worten: Vier beliebige Geraden in einer Ebene erzeugen vier Dreiecke (die man erhält, wenn man jeweils drei der vier Geraden betrachtet). Die Umkreise dieser Dreiecke haben einen gemeinsamen Punkt (den sogenannten Miquelpunkt der vier Geraden).

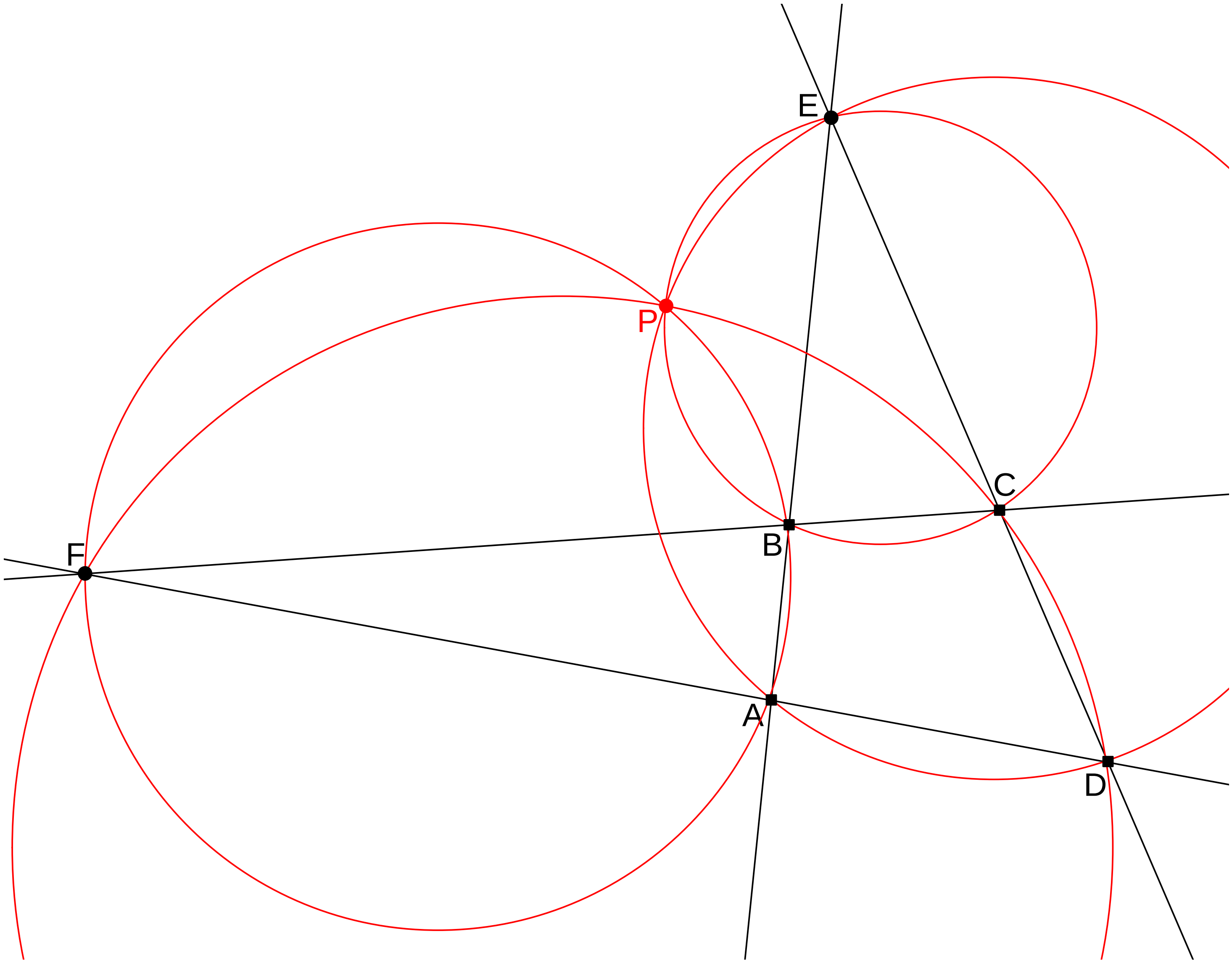

Fig. 8

(Siehe Fig. 9.) Während der Herleitung von Satz 6 hatten wir $\measuredangle PBC = \measuredangle PAD$ bewiesen. Analog ist $\measuredangle PCB = \measuredangle PDA$. Also sind die Dreiecke PBC und PAD gleichsinnig ähnlich (nach dem Ähnlichkeitskriterium (ww)). Genauso zeigt man, daß die Dreiecke PCD und PBA gleichsinnig ähnlich sind. Wir halten dies fest:

> **Satz 7:** In der Konfiguration von Satz 6 gilt: Die Dreiecke PBC und PAD sind gleichsinnig ähnlich; die Dreiecke PCD und PBA sind gleichsinnig ähnlich.

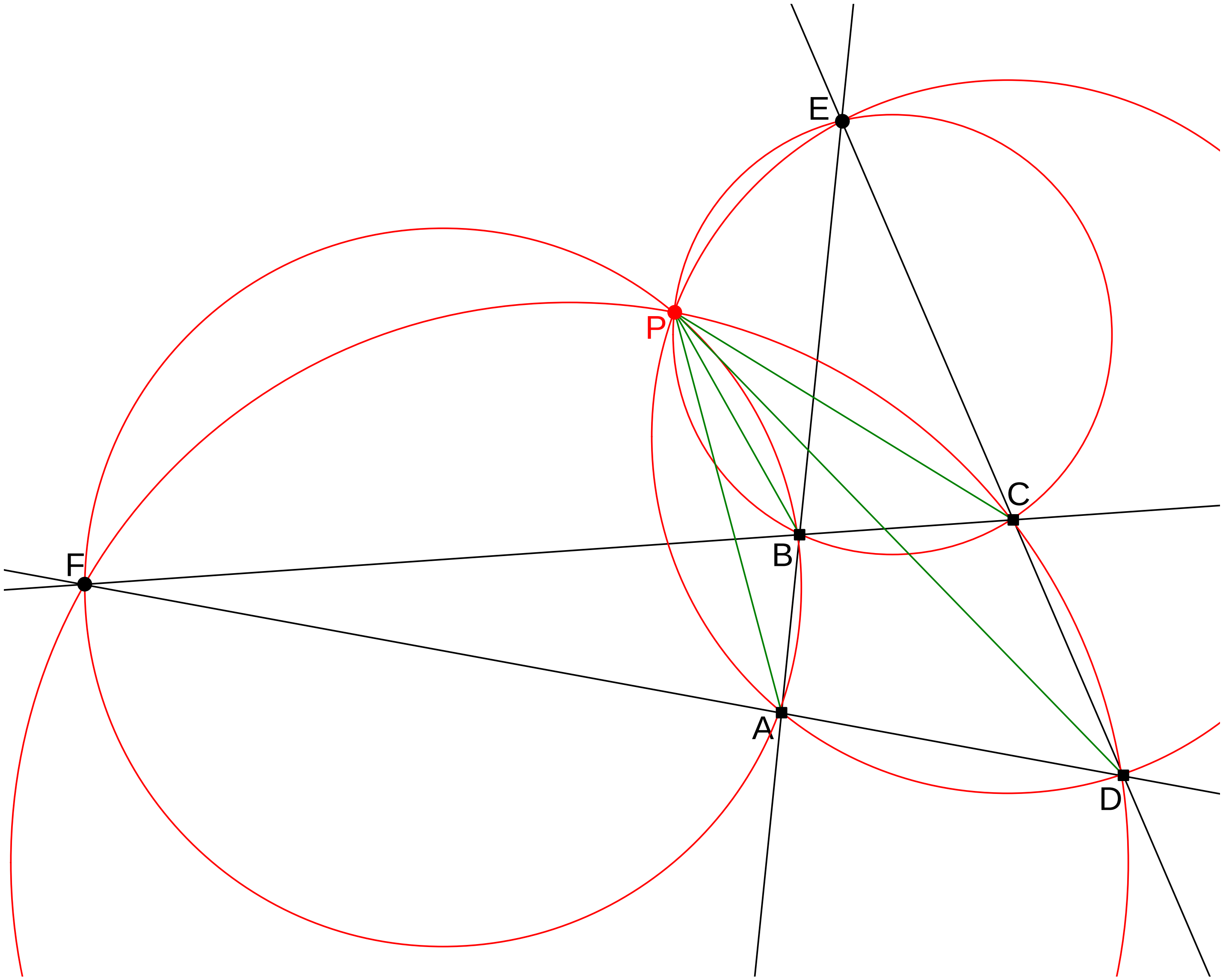

Fig. 9

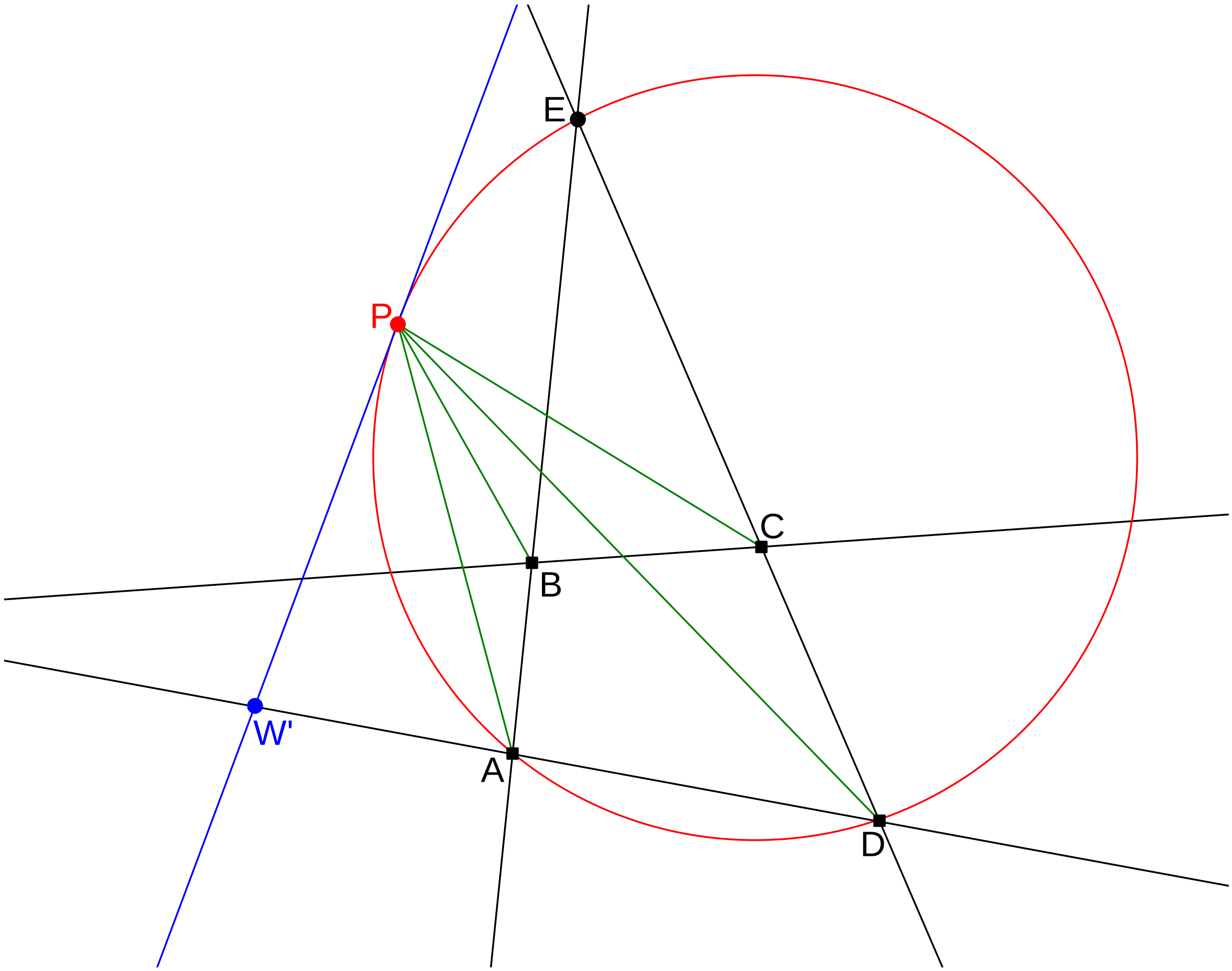

Fig. 10

(Siehe Fig. 10.) Da die Dreiecke PCD und PBA gleichsinnig ähnlich sind, gilt $\dfrac{PD}{PA} = \dfrac{CD}{BA}$, also $\dfrac{PD}{AP} = \dfrac{CD}{AB}$. Die Tangente an den Kreis $EDAP$ in dem Punkt P schneide die Gerade DA in einem Punkt W'. Dann ist der Punkt W' der Schnittpunkt der Tangente an den Kreis PDA im Punkt P mit der Geraden DA; somit gilt nach Satz 1 die Gleichung

$$\frac{\overline{DW'}}{\overline{W'A}} = -\frac{PD^2}{AP^2} = -\left(\frac{PD}{AP}\right)^2 = -\left(\frac{CD}{AB}\right)^2 = -\frac{CD^2}{AB^2} = \frac{\overline{DW}}{\overline{WA}}.$$

Also stimmen die Punkte W' und W überein. Da der Punkt W' als der Schnittpunkt der im Punkt P gelegten Tangente an den Kreis $EDAP$ mit der Geraden DA definiert wurde, folgt hieraus: Der Punkt W ist der Schnittpunkt der im Punkt P gelegten Tangente an den Kreis $EDAP$ mit der Geraden DA. Analoges kann man von den Punkten X, Y und Z sagen. Wir fassen zusammen:

Satz 8: In der Konfiguration von Satz 3 und Satz 6[9] gilt: Die Punkte X, Y, Z und W sind die Schnittpunkte der im Punkt P gelegten Tangenten

[9] Dies ist die Konfiguration, die aus dem Viereck $ABCD$, den gemäß Satz 3 definierten Punkten X, Y, Z und W und den gemäß Satz 6 definierten Punkten E, F und P besteht.

an die Kreise $FABP$, $EBCP$, $FCDP$ bzw. $EDAP$ mit den Geraden AB, BC, CD bzw. DA. (Siehe Fig. 11.)

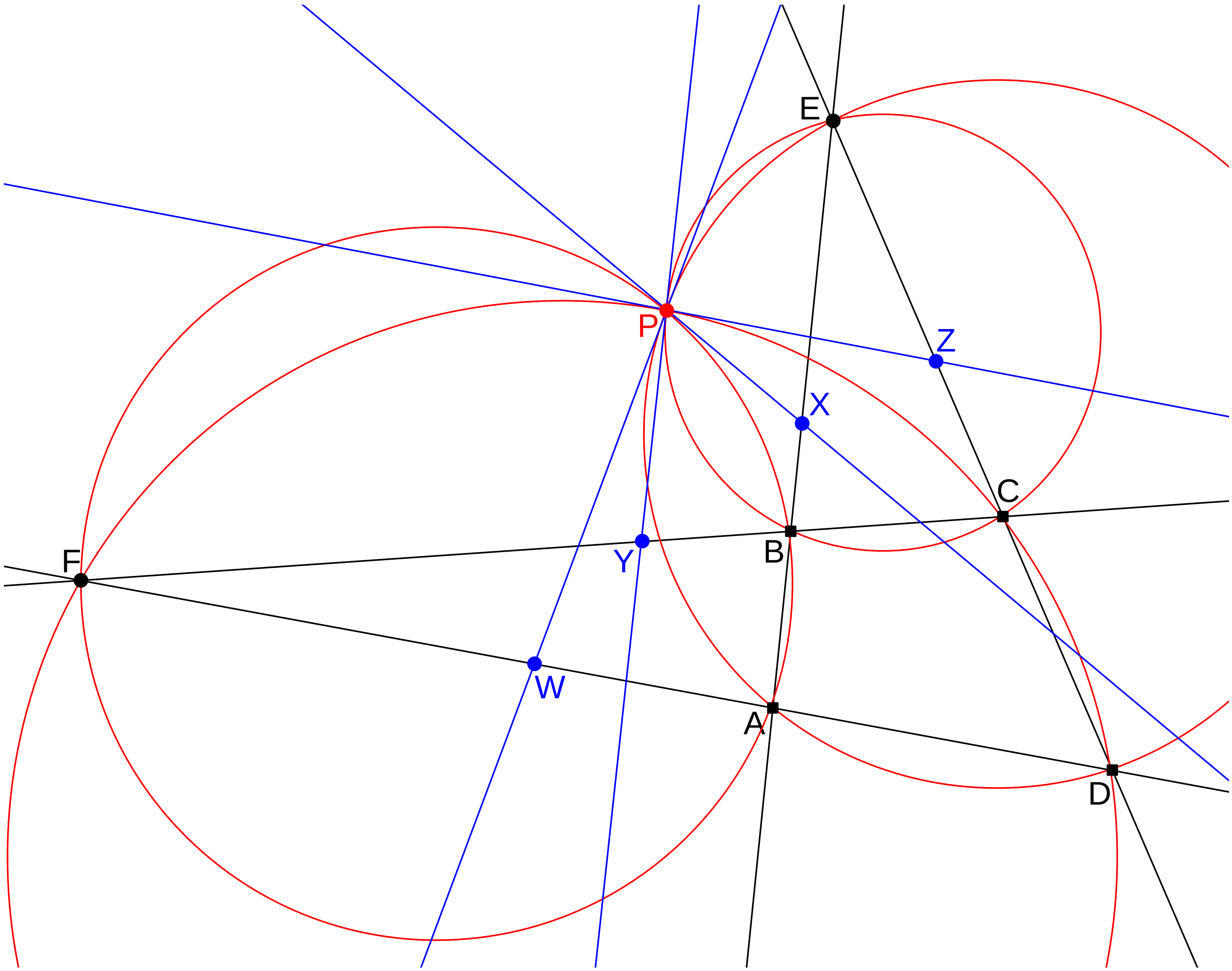

Fig. 11

(Siehe Fig. 12.) Die Dreiecke PCD und PBA sind (nach Satz 7) gleichsinnig ähnlich. Laut Satz 8 gilt jedoch: Der Punkt Z ist der Schnittpunkt der Tangente an den Kreis PCD in P mit der Geraden CD; der Punkt X ist der Schnittpunkt der Tangente an den Kreis PBA in P mit der Geraden BA. Also sind die Punkte Z und X einander entsprechende Punkte in den Dreiecken PCD und PBA. Bekanntlich erzeugen entsprechende Punkte in ähnlichen Dreiecken ähnliche Teildreiecke; da die Dreiecke PCD und PBA gleichsinnig ähnlich sind, sind also die Dreiecke PCZ und PBX gleichsinnig ähnlich. Daher gilt $\measuredangle CZP = \measuredangle BXP$.

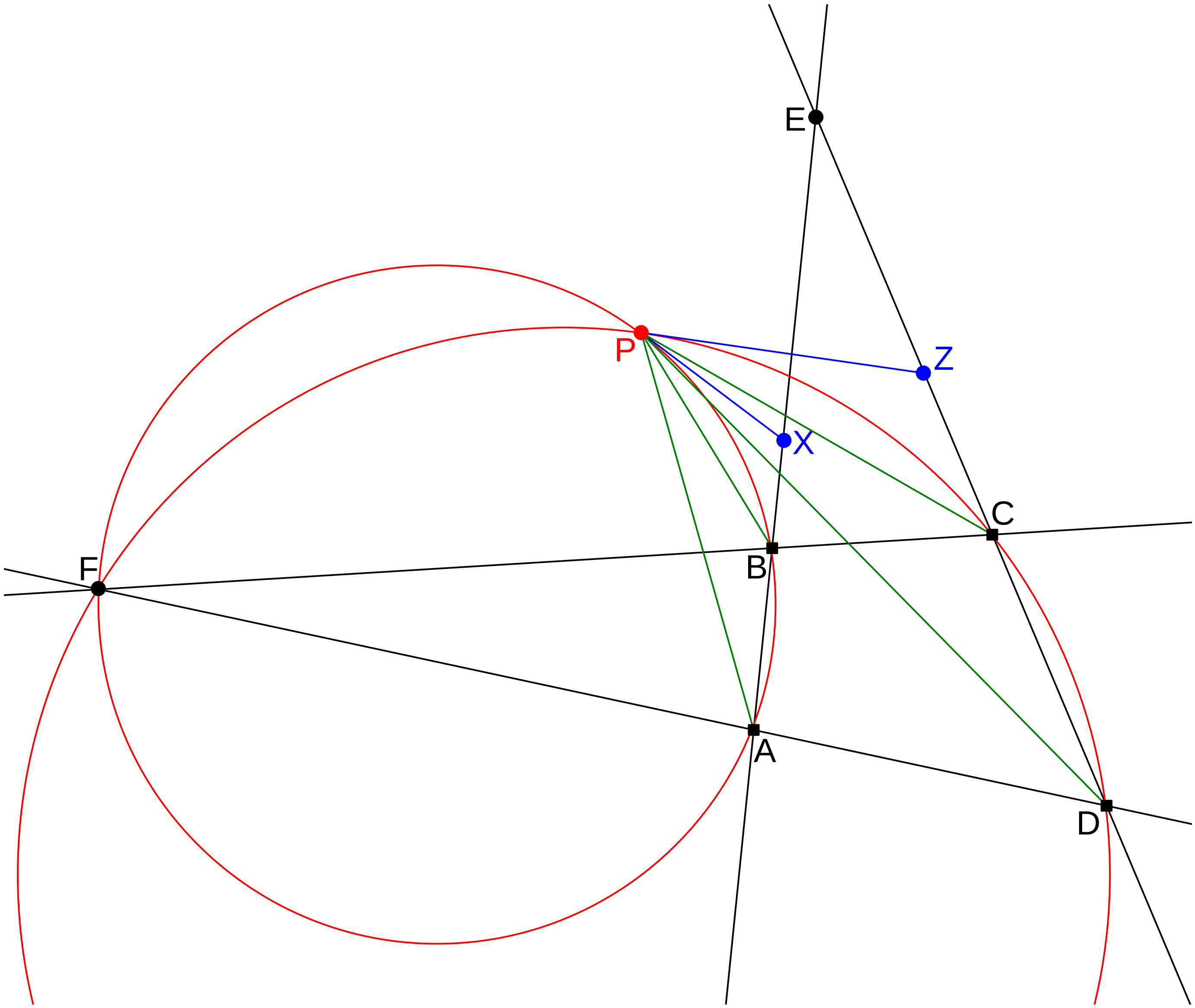

Fig. 12

Die Gleichung $\measuredangle CZP = \measuredangle BXP$ läßt sich umschreiben als $\measuredangle EZP = \measuredangle EXP$; also liegt der Punkt P auf dem Kreis EZX. Analog liegt der Punkt P auf dem Kreis FYW. Wir fassen zusammen:

Satz 9: In der Konfiguration von Satz 3 und Satz 6 gilt: Der Punkt P liegt auf den Kreisen EZX und FYW. (Siehe Fig. 13.)

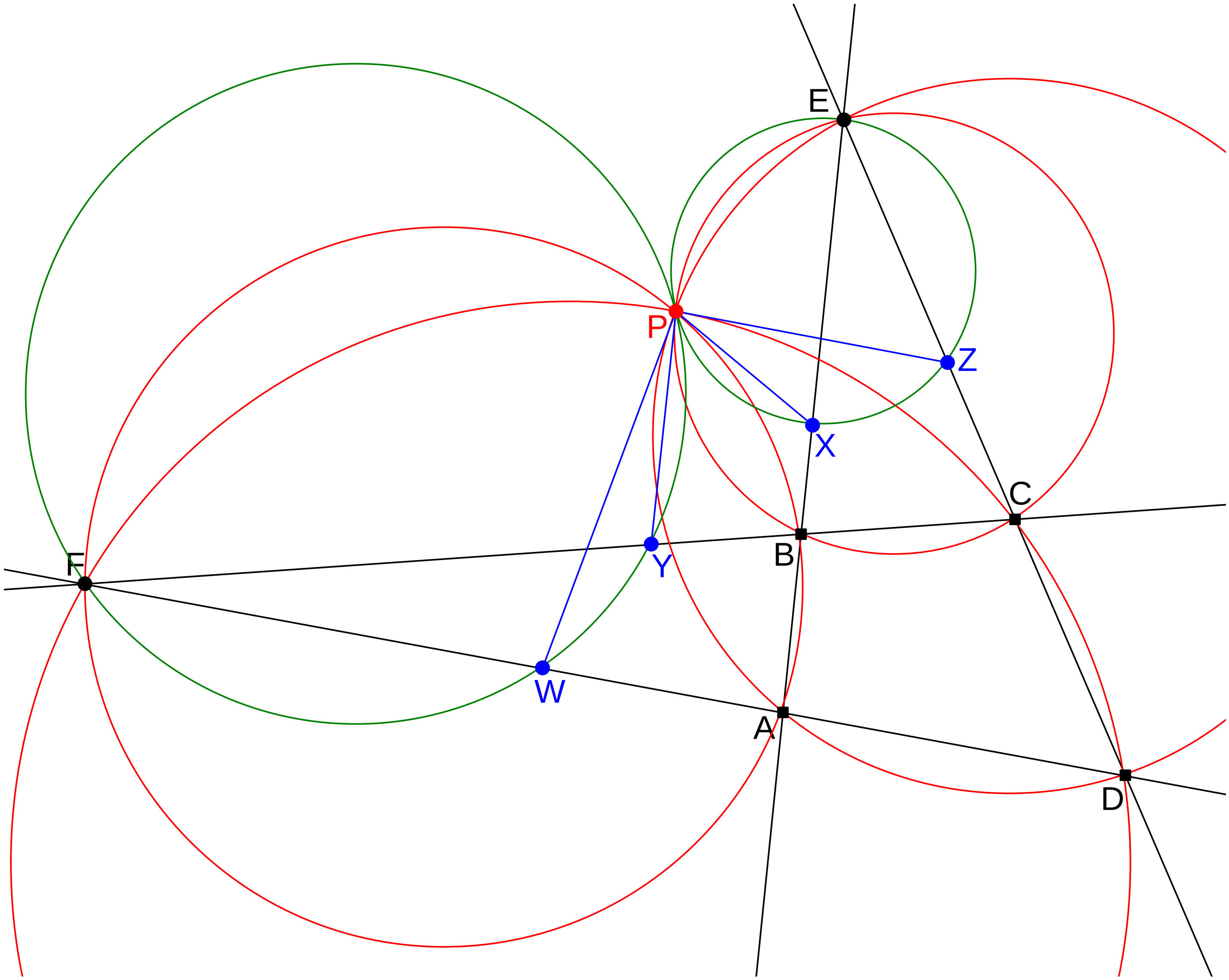

Fig. 13

Es gilt aber mehr:

Satz 10: In der Konfiguration von Satz 3 und Satz 6 gilt: Die Kreise EZX und FYW berühren sich im Punkt P.

Beweis: Seien t_1 und t_2 die Tangenten an die Kreise EZX bzw. FYW in dem Punkt P. Wir wollen zeigen, daß diese zwei Tangenten t_1 und t_2 zusammenfallen.

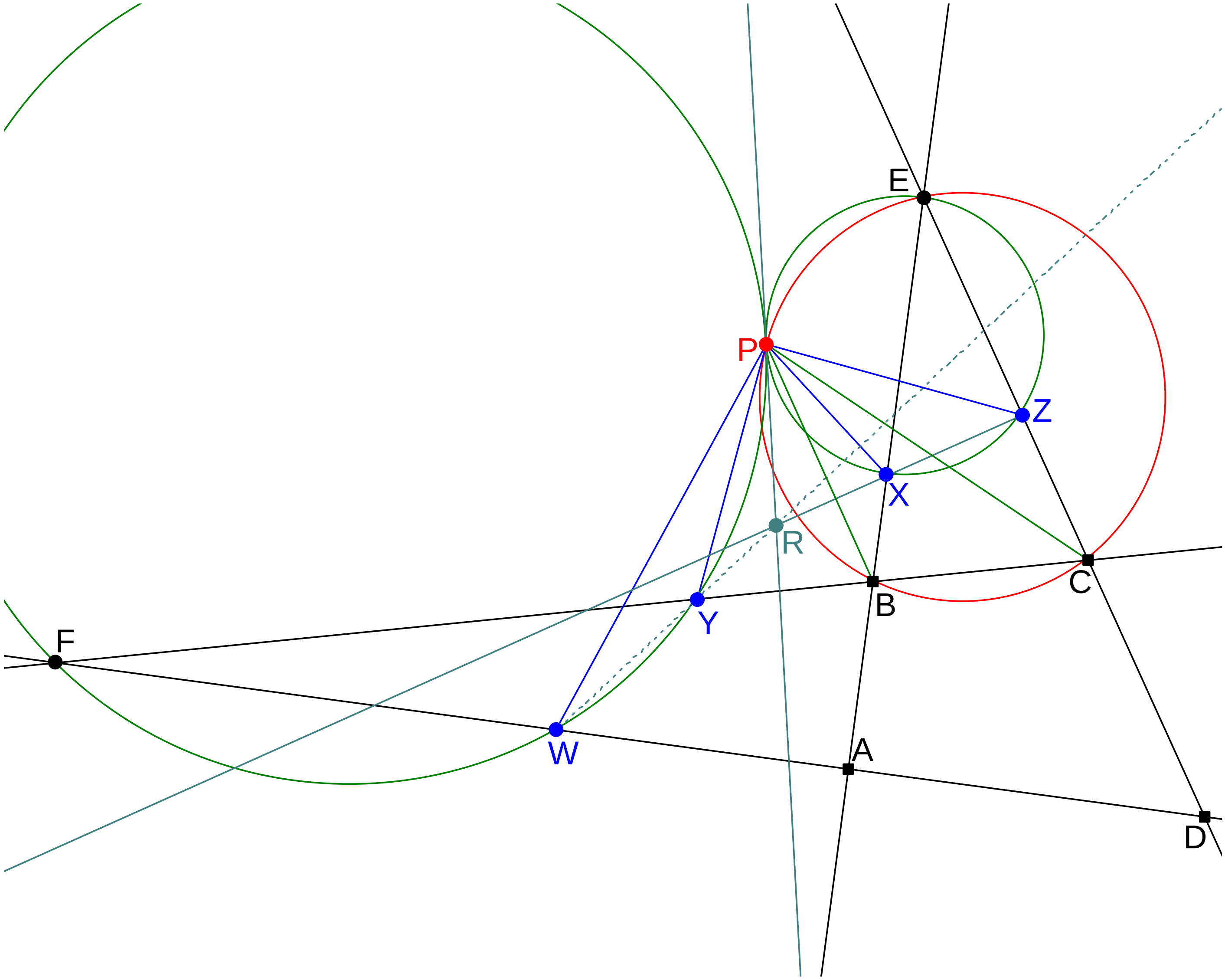

Fig. 14

Da die Gerade t_1 die Tangente an den Kreis EZX im Punkt P ist, gilt nach dem Sehnentangentenwinkelsatz $\measuredangle(t_1;\ EP) = \measuredangle PXE$. Da die Gerade t_2 die Tangente an den Kreis FYW im Punkt P ist, gilt nach dem Sehnentangentenwinkelsatz $\measuredangle(FP;\ t_2) = \measuredangle FYP$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\measuredangle(t_1;\ t_2) &= \measuredangle(t_1;\ EP) + \measuredangle(EP;\ FP) + \measuredangle(FP;\ t_2)\\
&= \measuredangle PXE + \measuredangle EPF + \measuredangle FYP\\
&= \measuredangle PXE + \measuredangle EPF - \measuredangle PYF. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Doch wir haben

$$\measuredangle PXE = \measuredangle(PX;\ AB) = \measuredangle(PX;\ BP) + \measuredangle(BP;\ AB). \qquad (2)$$

Da (wegen Satz 8) die Gerade PX die Tangente an den Kreis $FABP$ im Punkt P ist, gilt nach dem Sehnentangentenwinkelsatz $\measuredangle(PX;\ BP) = \measuredangle PFB$, und offensichtlich ist $\measuredangle(BP;\ AB) = \measuredangle PBA$. Somit wird (2) zu $\measuredangle PXE = \measuredangle PFB + \measuredangle PBA$. Analog ist

$\measuredangle PYF = \measuredangle PEB + \measuredangle PBC$, und damit

$$\begin{aligned} & \measuredangle PXE + \measuredangle EPF - \measuredangle PYF \\ = \; & (\measuredangle PFB + \measuredangle PBA) + \measuredangle EPF - (\measuredangle PEB + \measuredangle PBC) \\ = \; & \measuredangle PFB + \measuredangle PBA + \measuredangle EPF + (-\measuredangle PEB) + (-\measuredangle PBC) \\ = \; & \measuredangle PFB + \measuredangle PBA + \measuredangle EPF + \measuredangle BEP + \measuredangle CBP \\ = \; & \measuredangle PFB + \measuredangle CBP + \measuredangle PBA + \measuredangle BEP + \measuredangle EPF \\ = \; & \measuredangle (PF;\ BC) + \measuredangle (BC;\ BP) + \measuredangle (BP;\ AB) + \measuredangle (AB;\ PE) + \measuredangle (PE;\ PF) \\ = \; & 0^\circ. \end{aligned} \tag{3}$$

In (1) eingesetzt ergibt dies $\measuredangle (t_1;\ t_2) = 0^\circ$. Also sind die Geraden t_1 und t_2 parallel. Da diese Geraden t_1 und t_2 beide durch den Punkt P gehen, fallen sie also zusammen (denn zwei parallele Geraden mit einem gemeinsamen Punkt müssen zusammenfallen). Da diese Geraden t_1 und t_2 die Tangenten an die Kreise EZX bzw. FYW im Punkt P sind, bedeutet dies: Die Kreise EZX und FYW haben in ihrem Schnittpunkt P eine gemeinsame Tangente. Folglich müssen sich diese zwei Kreise im Punkt P berühren. Damit ist Satz 10 bewiesen.

(Siehe Fig. 14.) Die gemeinsame Tangente der Kreise EZX und FYW in ihrem Berührpunkt P schneide die Gerade XZ in einem Punkt R. Dann ist der Punkt R der Schnittpunkt der Tangente an den Kreis PZX in P mit der Geraden XZ.

Da die Dreiecke PCZ und PBX gleichsinnig ähnlich sind, folgt aus Satz 5, daß die Dreiecke PCB und PZX gleichsinnig ähnlich sind. Der Punkt Y ist der Schnittpunkt der Tangente an den Kreis PCB in P mit der Geraden BC (laut Satz 8); der Punkt R ist der Schnittpunkt der Tangente an den Kreis PZX in P mit der Geraden XZ. Also sind die Punkte Y und R einander entsprechende Punkte in den Dreiecken PCB und PZX. Bekanntlich erzeugen entsprechende Punkte in ähnlichen Dreiecken ähnliche Teildreiecke. Da die Dreiecke PCB und PZX gleichsinnig ähnlich sind, sind also die Dreiecke PBY und PXR gleichsinnig ähnlich. Laut Satz 5 sind also die Dreiecke PBX und PYR gleichsinnig ähnlich. Daraus folgt $\measuredangle PYR = \measuredangle PBX$.

Wir haben oben gezeigt, daß die Dreiecke PCB und PZX gleichsinnig ähnlich sind. Analog sind die Dreiecke PAB und PWY gleichsinnig ähnlich, und hieraus folgt $\measuredangle WYP = \measuredangle ABP$. Damit ist $\measuredangle WYR = \measuredangle WYP + \measuredangle PYR = \measuredangle ABP + \measuredangle PBX = \measuredangle ABX = 0^\circ$ (denn die Punkte A, B und X liegen auf einer Geraden). Also liegen die Punkte W, Y und R auf einer Geraden, d. h. der Punkt R liegt auf der Geraden YW. Doch wir hatten den Punkt R als Schnittpunkt der gemeinsamen Tangente der Kreise EZX und FYW in ihrem Berührpunkt P mit der Geraden XZ definiert. Also gilt:

> **Satz 11:** In der Konfiguration von Satz 3 und Satz 6 gilt: Die gemeinsame Tangente der Kreise EZX und FYW in ihrem Berührpunkt P und die Geraden XZ und YW schneiden sich in einem Punkt R. (Siehe Fig. 15.)

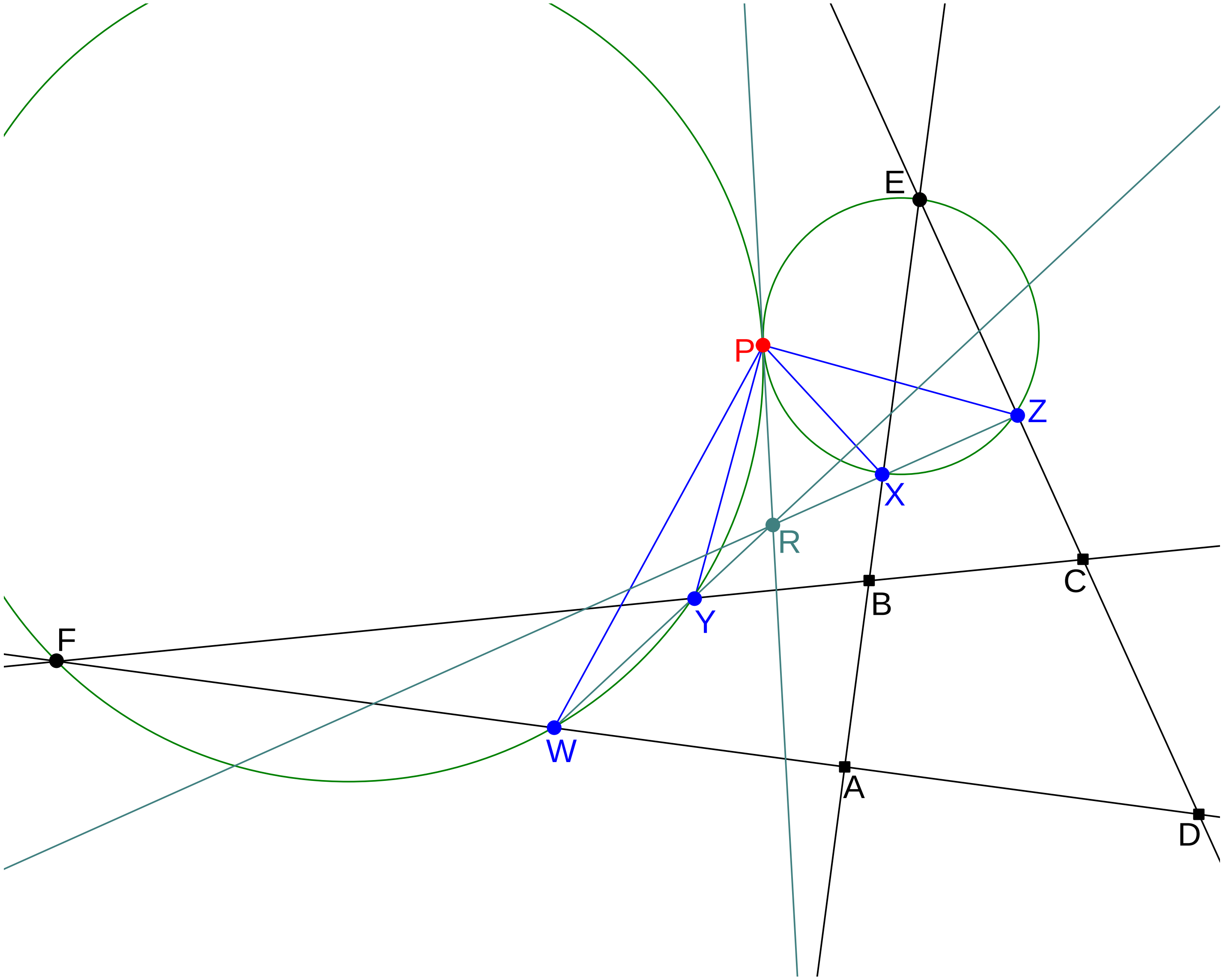

Fig. 15

Der Kreis EZX schneidet die Gerade XZ in den Punkten X und Z, und schneidet die Gerade RP in den Punkten P und P (denn er berührt die Gerade RP im Punkt P). Die beiden Geraden XZ und RP schneiden sich im Punkt R. Nach dem Sekantensatz für orientierte Strecken ist also $\overline{RX} \cdot \overline{RZ} = \overline{RP} \cdot \overline{RP}$. Analog ist $\overline{RY} \cdot \overline{RW} = \overline{RP} \cdot \overline{RP}$. Somit ist $\overline{RX} \cdot \overline{RZ} = \overline{RY} \cdot \overline{RW}$. Da die zwei Geraden XZ und YW sich im Punkt R schneiden, gibt es somit nach dem Sekantensatz für orientierte Strecken einen Kreis, der die Gerade XZ in den Punkten X und Z schneidet, und die Gerade YW in den Punkten Y und W schneidet. Das heißt, die Punkte X, Y, Z und W liegen auf einem Kreis. Damit ist Satz 3 bewiesen.

5. Zwei Beweise von Satz 4

(Siehe Fig. 16.) Jetzt wollen wir noch Satz 4 zeigen. Dies ist auf zwei Arten möglich:

Erster Beweis von Satz 4: Der folgende Beweis von Satz 4 setzt dort an, wo unser Beweis von Satz 3 aufgehört hat - das heißt, wir werden alle unsere obigen Hilfsresultate, die wir zum Beweis von Satz 3 gezeigt haben, weiterverwenden können, aber auch die zusätzliche Bedingung von Satz 4, daß das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist. Wir betrachten also im Folgenden die Konfiguration von Satz 3 und Satz 6 im Spezialfall, wenn das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist. Das heißt: Wir betrachten ein Sehnenviereck $ABCD$, die Punkte X, Y, Z und W, den Schnittpunkt E der Geraden AB und CD, den Schnittpunkt F der Geraden BC und DA, und den Miquelpunkt P des Sehnenvierecks $ABCD$.

Da das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, liegen die Punkte A, B, C und D auf einem Kreis. Somit gilt nach dem Umfangswinkelsatz $\measuredangle DCB = \measuredangle DAB$. Nach dem Umfangswinkelsatz im Kreis $EBCP$ ist $\measuredangle EPB = \measuredangle ECB$, und nach dem Umfangswinkelsatz im Kreis $FABP$ ist $\measuredangle BPF = \measuredangle BAF$. Damit ist

$$\begin{aligned} \measuredangle EPF &= \measuredangle EPB + \measuredangle BPF = \measuredangle ECB + \measuredangle BAF = \measuredangle DCB + \measuredangle BAD \\ &= \measuredangle DAB + \measuredangle BAD = \measuredangle DAD = 0^\circ. \end{aligned}$$

Also liegt der Punkt P auf der Geraden EF. Wir halten dies als interessantes Nebenergebnis fest:

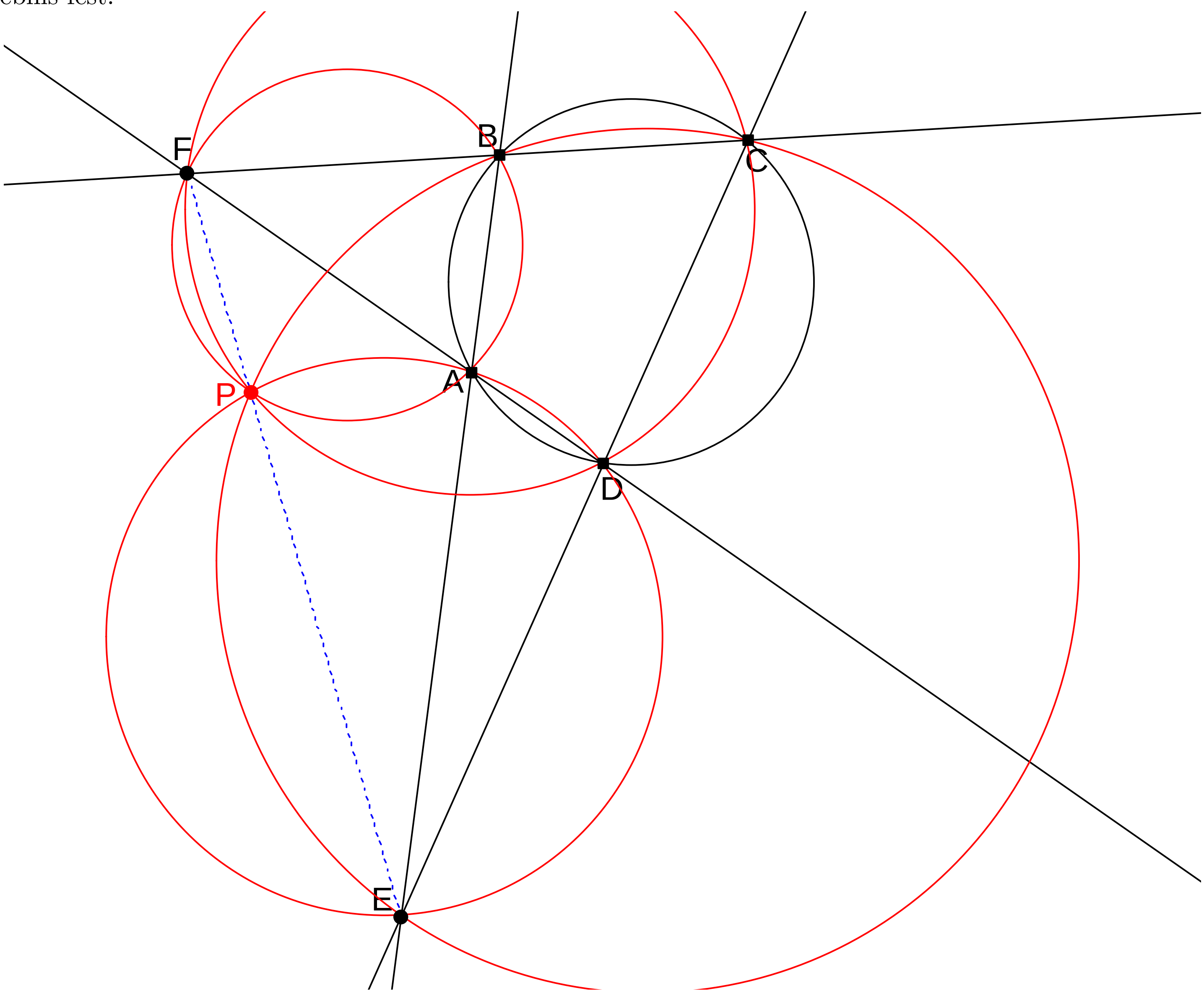

Fig. 16

Satz 12: In der Konfiguration von Satz 6 gilt: Ist das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck, dann liegt der Miquelpunkt P auf der Geraden EF.

In Worten: Der Miquelpunkt eines Sehnenvierecks liegt auf der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten des Sehnenvierecks. (Siehe Fig. 16.)

(Siehe Fig. 17.) Nach (3) ist $\measuredangle PXE + \measuredangle EPF - \measuredangle PYF = 0°$, also wegen $\measuredangle EPF = 0°$ einfach $\measuredangle PXE - \measuredangle PYF = 0°$, und damit $\measuredangle PXE = \measuredangle PYF$. Mit anderen Worten, $\measuredangle PXB = \measuredangle PYB$. Also liegen die Punkte P, B, X und Y auf einem Kreis, und nach dem Umfangswinkelsatz ist also $\measuredangle PXY = \measuredangle PBY$. Analog liegen die Punkte P, A, W und X auf einem Kreis, und nach dem Umfangswinkelsatz folgt daraus $\measuredangle PAW = \measuredangle PXW$. Doch seit Längerem wissen wir, daß $\measuredangle PBC = \measuredangle PAD$ ist. Somit ist $\measuredangle PXY = \measuredangle PBY = \measuredangle PBC = \measuredangle PAD = \measuredangle PAW = \measuredangle PXW$. Also liegen die Punkte W, X und Y auf einer Geraden. Analog liegen die Punkte X, Y und Z auf einer Geraden. Daher liegen alle vier Punkte X, Y, Z und W auf einer Geraden, womit Satz 4 bewiesen ist.

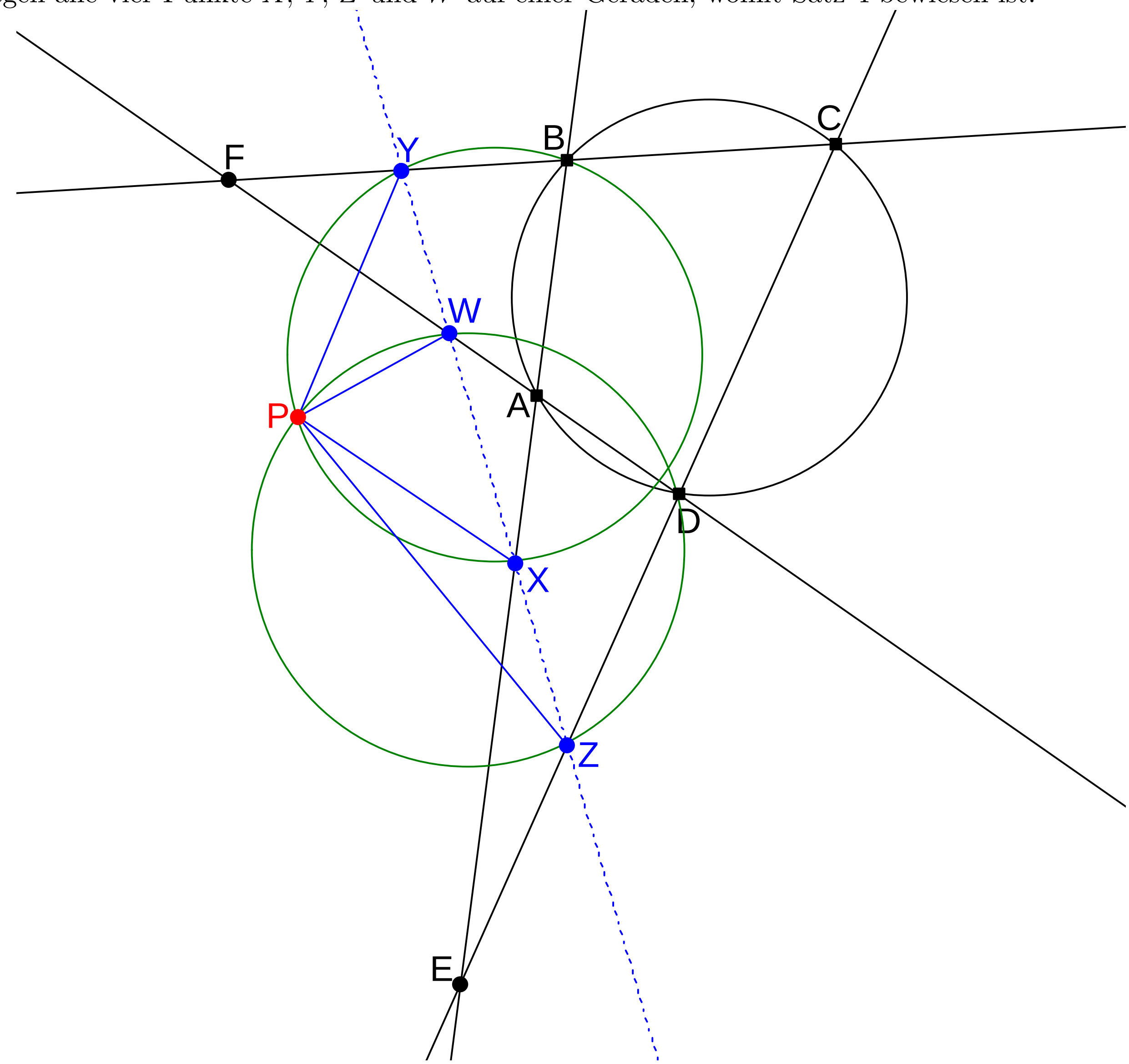

Fig. 17

Zweiter Beweis von Satz 4: Der folgende Beweis von Satz 4 ist unabhängig von unserem obigen Beweis von Satz 3. Wir werden bei diesem Beweis den Begriff der Potenzgeraden zweier Kreise verwenden. Wir arbeiten in der Konfiguration von Satz 3 unter der zusätzlichen Annahme, daß das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist. Wir zeigen zuerst einen Hilfssatz:

Satz 13: In der Konfiguration von Satz 3 gilt: Sei G der Schnittpunkt der Geraden AC und BD.

Ist das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck, dann sind die Punkte X, Y, Z und W die Schnittpunkte der im Punkt G gelegten Tangenten an die Kreise GAB, GBC, GCD bzw. GDA mit den Geraden AB, BC, CD bzw. DA.

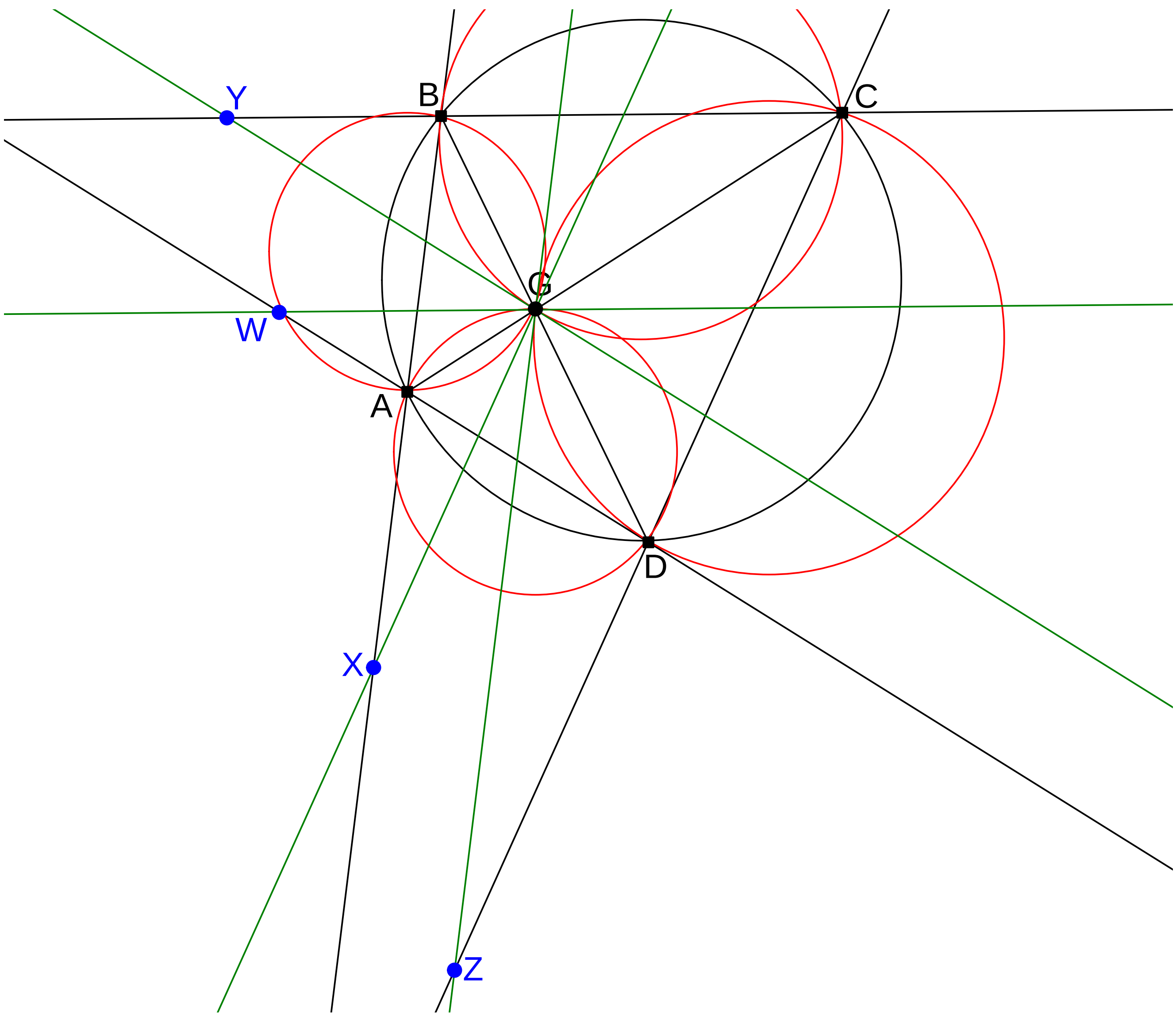

Fig. 18

Beweis von Satz 13: (Siehe Fig. 19.) Wir arbeiten unter der Annahme, daß das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist.

Da das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, liegen die Punkte A, B, C und D auf einem Kreis. Nach dem Umfangswinkelsatz ist also $\measuredangle CAD = \measuredangle CBD$. Wegen

$\measuredangle CAD = \measuredangle GAD$ und $\measuredangle CBD = -\measuredangle GBC$ wird dies zu $\measuredangle GAD = -\measuredangle GBC$. Analog ist $\measuredangle GDA = -\measuredangle GCB$. Somit sind die Dreiecke GAD und GBC gegensinnig ähnlich (nach dem Ähnlichkeitskriterium (ww)). Daher ist $\frac{GA}{GB} = \frac{AD}{BC}$. Mit anderen Worten: $\frac{GA}{BG} = \frac{DA}{BC}$.

Die Tangente an den Kreis GAB im Punkt G schneide die Gerade AB in einem Punkt X'. Laut Satz 1 gilt dann

$$\frac{\overline{AX'}}{\overline{X'B}} = -\frac{GA^2}{BG^2} = -\left(\frac{GA}{BG}\right)^2 = -\left(\frac{DA}{BC}\right)^2 = -\frac{DA^2}{BC^2} = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}.$$

Also stimmen die Punkte X und X' überein. Da der Punkt X' der Schnittpunkt der im Punkt G gelegten Tangente an den Kreis GAB mit der Geraden AB ist, folgt hieraus: Der Punkt X ist der Schnittpunkt der im Punkt G gelegten Tangente an den Kreis GAB mit der Geraden AB. Analog beweist man entsprechende Eigenschaften der Punkte Y, Z und W. Damit ist Satz 13 nachgewiesen.

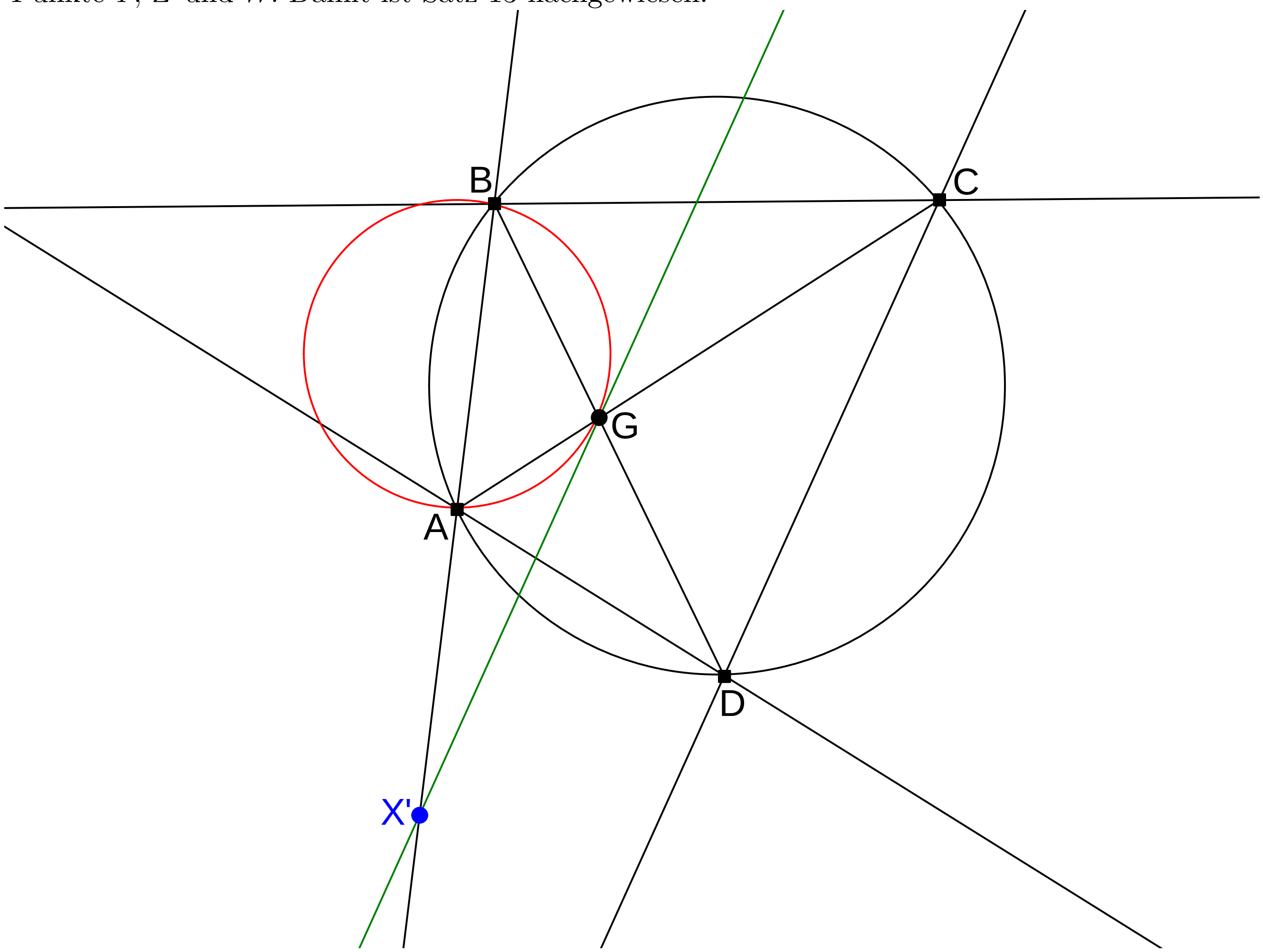

Fig. 19

Laut dem Satz 13 ist der Punkt X der Schnittpunkt der im Punkt G gelegten Tangente an den Kreis GAB mit der Geraden AB. Folglich schneidet der Kreis GAB die Gerade AB in den Punkten A und B und die Gerade GX in den Punkten G und G (denn er berührt die Gerade GX im Punkt G). Laut dem Sekantensatz für orientierte Strecken ist also $\overline{XA} \cdot \overline{XB} = \overline{XG} \cdot \overline{XG}$ (denn der Punkt X ist der Schnittpunkt der

Geraden AB und GX). Nun ist $\overline{XA} \cdot \overline{XB}$ die Potenz des Punktes X bezüglich dem Umkreis des Sehnenvierecks $ABCD$, während $\overline{XG} \cdot \overline{XG} = \overline{XG}^2 = XG^2$ die Potenz des Punktes X bezüglich dem G-Nullkreis ist. Somit hat der Punkt X gleiche Potenzen bezüglich dem Umkreis des Sehnenvierecks $ABCD$ und dem G-Nullkreis. Das heißt, der Punkt X liegt auf der Potenzgeraden des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$ und des G-Nullkreises. Analog liegen die Punkte Y, Z und W ebenfalls auf dieser Potenzgeraden. Daher liegen die Punkte X, Y, Z und W auf einer Geraden, nämlich auf der Potenzgeraden des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$ und des G-Nullkreises. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Aus diesem Zweiten Beweis von Satz 4 können wir eine zusätzliche Aussage herleiten: Sei O der Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$. Da die Potenzgerade zweier Kreise stets senkrecht auf der Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte steht, muß die Potenzgerade des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$ und des G-Nullkreises senkrecht stehen auf der Verbindungsgeraden des Mittelpunktes des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$ (also des Punktes O) und des Mittelpunktes des G-Nullkreises (also des Punktes G). Das heißt, diese Potenzgerade steht senkrecht auf der Geraden OG. Damit haben wir bewiesen:

> **Satz 14:** In der Konfiguration von Satz 3 gilt: Sei G der Schnittpunkt der Geraden AC und BD.
>
> Wir nehmen an, das Viereck $ABCD$ ist ein Sehnenviereck. Dann liegen die Punkte X, Y, Z und W auf einer Geraden, nämlich auf der Potenzgeraden des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$ und des G-Nullkreises. Diese Potenzgerade steht senkrecht auf der Geraden OG, wobei O der Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$ ist. (Siehe Fig. 20.)

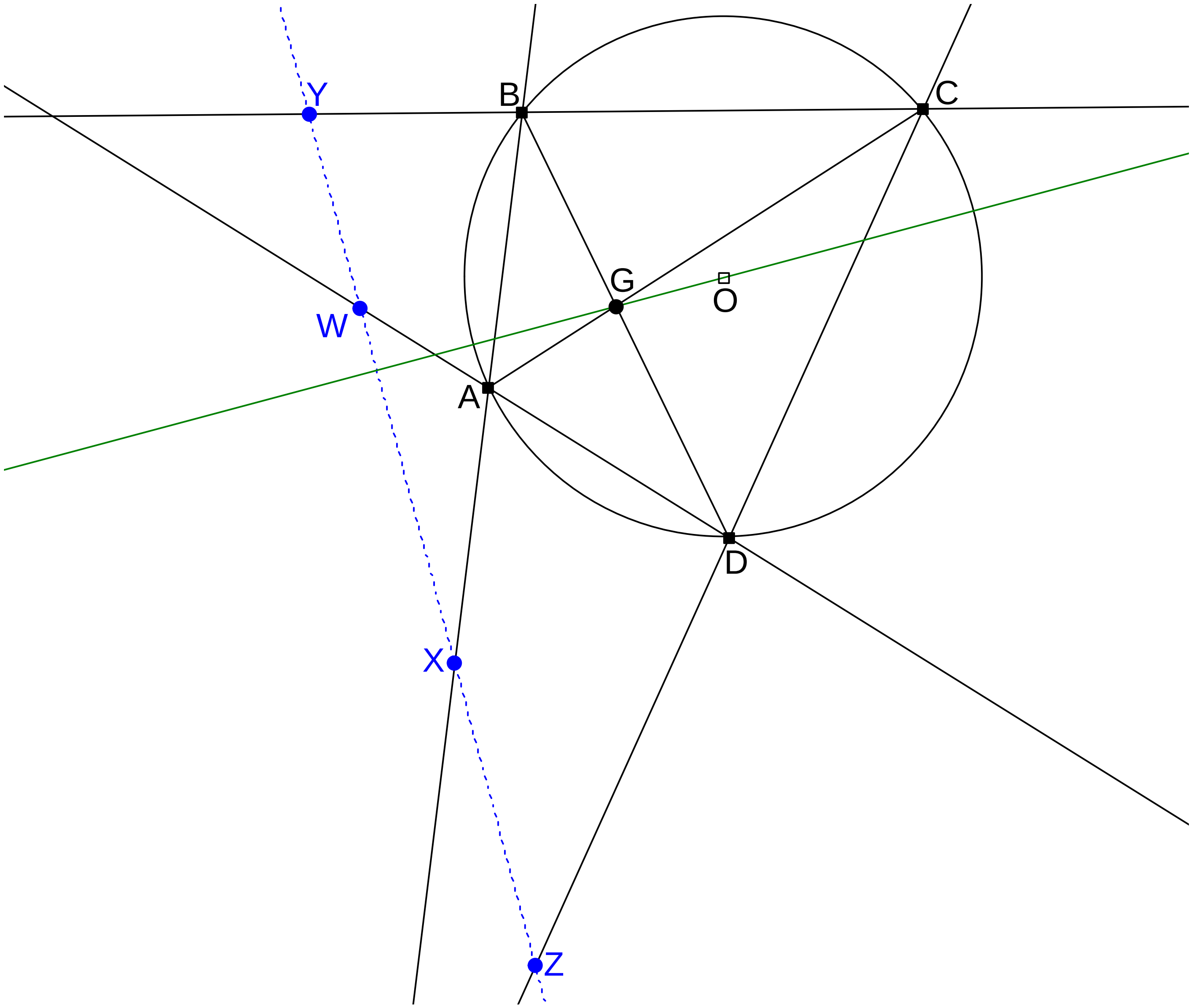

Fig. 20

Literaturhinweise

[1] R. A. Johnson: *Directed Angles in Elementary Geometry*, American Mathematical Monthly 24 (1917) Nr. 3, S. 101-105.

[2] R. A. Johnson: *Directed Angles and Inversion, With a Proof of Schoute's Theorem*, American Mathematical Monthly 24 (1917) Nr. 7, S. 313-317.

[3] Kiran S. Kedlaya, *Geometry Unbound*, version of 17 Jan 2006.
`http://www-math.mit.edu/~kedlaya/geometryunbound/`

[4] Jan van Yzeren, *Pairs of Points: Antigonal, Isogonal, and Inverse*, Mathematics Magazine 5/1992, S. 339-347.

[5] Darij Grinberg: *Orientierte Winkel modulo* 180° *und eine Lösung der* $\sqrt{\text{WURZEL}}$-*Aufgabe* κ *22 von Wilfried Haag.*
`http://www.stud.uni-muenchen.de/~darij.grinberg/Dreigeom/Inhalt.html`

[6] V. Thébault, A. Mineur: *Sur une propriété du quadrilatère*, [J] Mathesis 45, 1931, S. 384-386.

[7] Darij Grinberg: *Isogonal conjugation with respect to a triangle* (version 23 September 2006).
http://www.stud.uni-muenchen.de/~darij.grinberg/
oder, gleichwertig: http://de.geocities.com/darij_grinberg/