

4

Modelo do Sistema com Apoios Elásticos

Neste capítulo desenvolve-se a formulação de um modelo analítico para o problema do rotor horizontal discutido no capítulo 2, adaptado com apoios elásticos (silicone). A análise é feita basicamente no regime permanente. Mostra-se o modelo utilizado na figura 4.1.

Os fenômenos incluídos na modelagem são o efeito giroscópio (rotor fora do méio), desbalanceamento do rotor e empenamento do eixo. A metodologia usada na modelagem é praticamente a mesma desenvolvida no capítulo 2, adicionando-se o tratamento do problema da inclusão de apoios elásticos no sistema.

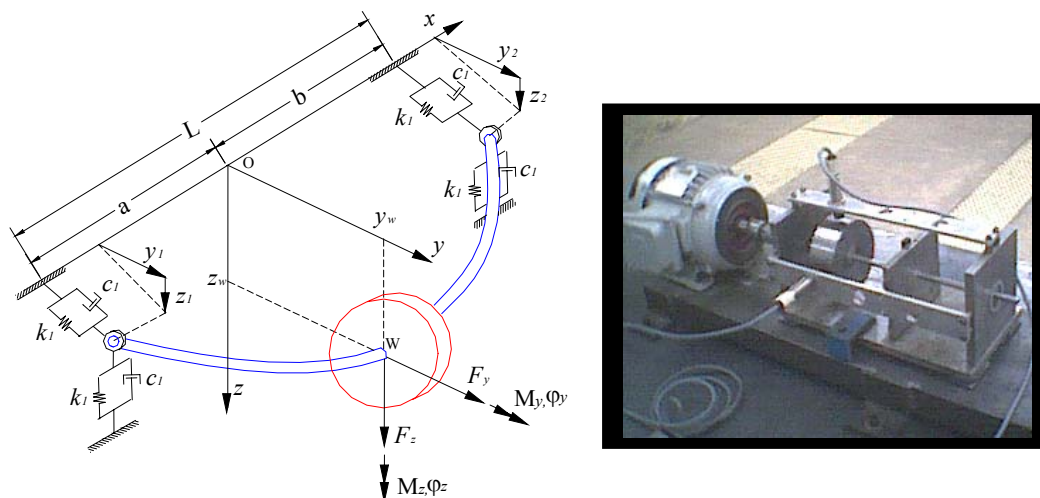


Figura 4.1: Modelo do Rotor com Apoios Elásticos

4.1.

Inclusão de Apoios Elásticos

A idéia deste trabalho é estudar a dinâmica do rotor quando são incluídos apoios elásticos nos rolamentos, comparada com a dinâmica do rotor sem os mesmos.

O trabalho parte do problema do rotor estudado no capítulo 2, cuja amplitude de movimento transversal não permitia a passagem pela frequência crítica de translação, nas condições de desbalanceamento e empenamento existentes. Neste caso podem ser incluídos apoios flexíveis nos rolamentos para atenuar o problema. A propriedade destes dispositivos, de suprimir ou atenuar as vibrações é incrementada com o aumento da elasticidade e do amortecimento dos mesmos (Bormann e Gasch [6]), produzindo também uma diminuição das velocidades críticas e frequências naturais do sistema. Por esta razão foram construídos apoios com um material muito flexível, sendo que após diversas tentativas, logrou-se a consistência mais elástica com *silicone*..

O desenho dos apoios elásticos, é mostrado na figura 4.2.

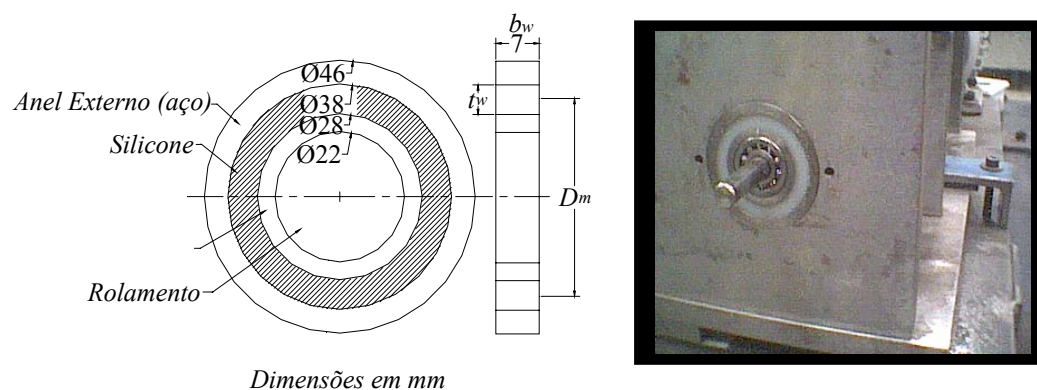


Figura 4.2: Desenho dos Apoios Elásticos

O projeto dos apoios elásticos foi feito atendendo apenas a um critério qualitativo, ou seja observando-se a forma geral deste tipo de dispositivos, como por exemplo é mostrado em Vance [33], para apoios formados por 2 O-rings (anéis de seção circular). No presente trabalho foram construídos apoios com o formato de um R-ring (anel de seção quadrada) vulcanizado na peça, sem nenhum critério específico a princípio.

4.2.

Equações de Movimento

Como foi mencionado na seção 2.1, as equações de movimento podem ser obtidas a partir da conservação da quantidade de movimento linear e angular,

Pode-se notar que as forças externas nos graus de liberdade do disco são as mesmas nos dois sistemas, isto levando em conta que os apoios não estão expostos ao meio externo.

Para ter certeza desta proposta, realizou-se uma verificação experimental, que consistiu em analisar os sistemas através de testes modais. Como a determinação da matriz de amortecimento se faz com o disco sem rotação, as equações dinâmicas estão desacopladas nos planos horizontal e vertical, o que permite fazer a análise em separado para cada plano.

No caso do sistema sem apoios elásticos, cada plano contém dois graus de liberdade, logo cada plano terá dois amortecimentos modais e o sistema no total terá quatro amortecimentos modais. Comprovou-se o resultado fazendo testes com o martelo de impacto, determinando-se experimentalmente a existência de quatro amortecimentos modais no sistema, dois em cada plano.

No caso do sistema com apoios elásticos, cada plano contém quatro graus de liberdade, indicando que cada plano poderia ter quatro amortecimentos modais, e o sistema em total poderia ter oito amortecimentos modais. Devido à inclusão dos quatro graus de liberdade pertencentes aos apoios, obtém-se uma matriz de amortecimento (C) em geral cheia.

Os testes realizados com martelo de impacto, mostraram que apesar da inclusão dos apoios elásticos no sistema, a quantidade de amortecimentos modais continua sendo a mesma que no sistema sem apoios elásticos. O qual fundamenta o modelo proposto na equação (4.7).

Efeito da Inclusão dos Apoios Elásticos nas Equações de Movimento

De acordo com o modelo mostrado na figura 4.1, o movimento dos apoios foi considerado por quatro deslocamentos, um horizontal e um vertical para cada apoio. Fazendo uma análise do desenvolvimento das equações de movimento, considerando equilíbrio nos dois planos, e o comportamento dos apoios representado pelo seu módulo complexo (e respectiva rigidez e amortecimento também complexa), considerando também que os dois apoios são idênticos, conclui-se que o efeito da inclusão dos apoios é representado por forças elásticas proporcionais aos deslocamentos dos apoios, que expressadas em forma matricial são:

velocidade constante Ω , a relação entre as coordenadas inerciais do centro de massa (s) e do centro geométrico do disco (w) é:

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_w + \mathbf{e}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y \\ \varphi_z \\ y_2 \\ z_1 \\ z \\ \varphi_y \\ z_2 \end{Bmatrix}_s = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y \\ \varphi_z \\ y_2 \\ z_1 \\ z \\ \varphi_y \\ z_2 \end{Bmatrix}_w + \begin{Bmatrix} 0 \\ \epsilon \cos(\Omega t + \beta) \\ \alpha \cos(\Omega t + \eta) \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon \sin(\Omega t + \beta) \\ -\alpha \sin(\Omega t + \eta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Derivando duas vezes a equação (4.19):

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \dot{\mathbf{x}}_w + \dot{\mathbf{e}}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi}_z \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z} \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix}_s = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi}_z \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z} \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix}_w + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\epsilon \Omega \sin(\Omega t + \beta) \\ -\alpha \Omega \sin(\Omega t + \eta) \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon \Omega \cos(\Omega t + \beta) \\ -\alpha \Omega \sin(\Omega t + \eta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_s = \ddot{\mathbf{x}}_w + \ddot{\mathbf{e}}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi}_z \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{z} \\ \ddot{\varphi}_y \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix}_s = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi}_z \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{z} \\ \ddot{\varphi}_y \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix}_w + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\epsilon \Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) \\ -\alpha \Omega^2 \cos(\Omega t + \eta) \\ 0 \\ 0 \\ -\epsilon \Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) \\ \alpha \Omega^2 \sin(\Omega t + \eta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

Substituindo as equações (4.20) e (4.21) na equação (4.18), obtemos a equação matricial de movimento com excitação externa devido ao desbalanceamento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_w + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{x}}_w + \mathbf{K}\mathbf{x}_w = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} - \mathbf{G}\dot{\mathbf{e}} \quad (4.22)$$

Da equação (4.22), com alguma manipulação, as forças de desbalanceamento (\mathbf{F}_{desb}) e de má montagem do disco (\mathbf{F}_{emp}) são:

$$\mathbf{F}_{\text{desb}} = m \epsilon \Omega^2 \{0 \quad \cos(\Omega t + \beta) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \sin(\Omega t + \beta) \quad 0 \quad 0\}^T \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{mm}} &= (I_a - I_p) \alpha \Omega^2 \{0 \quad 0 \quad \cos(\Omega t + \eta) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\sin(\Omega t + \eta) \quad 0\}^T \\ &= (I_a - I_p) \alpha \Omega^2 \{\dots \sin(\Omega t + \eta + 90^\circ) \quad \dots \cos(\Omega t + \eta + 90^\circ) \quad \dots\}^T \end{aligned} \quad (4.24)$$

Excitação Devido ao Empenamento do Eixo

$$\mathbf{F}_{\text{emp}} = \mathbf{K} \begin{Bmatrix} 0 \\ r_o \cos(\Omega t - \gamma) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_o \sin(\Omega t - \gamma) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{12} r_o \cos(\Omega t - \gamma) \\ k_{22} r_o \cos(\Omega t - \gamma) \\ k_{32} r_o \cos(\Omega t - \gamma) \\ k_{42} r_o \cos(\Omega t - \gamma) \\ k_{12} r_o \sin(\Omega t - \gamma) \\ k_{22} r_o \sin(\Omega t - \gamma) \\ -k_{32} r_o \sin(\Omega t - \gamma) \\ k_{42} r_o \sin(\Omega t - \gamma) \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

A excitação total seria:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{desb}} + \mathbf{F}_{\text{mm}} + \mathbf{F}_{\text{emp}} \quad (4.26)$$

Equação de Movimento Matricial Completa

A equação de movimento sob a forma matricial considerando excitações devidas ao desbalanceamento, má montagem do disco e empenamento do eixo, é:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{w}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{w}} + \mathbf{K} \mathbf{x}_{\mathbf{w}} = \mathbf{F}_{\text{desb}} + \mathbf{F}_{\text{mm}} + \mathbf{F}_{\text{emp}} \quad (4.27)$$

4.3.

Solução das Equações de Movimento

Solução Homogênea

Segundo a metodologia descrita na seção 2.7, a solução homogênea da equação de estado é:

$$\mathbf{X}_{(t)} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}_{(0)} \quad (4.28)$$

Sentidos da Precessão e Nutação do Disco

- As considerações são as mesmas descritas na seção 2.7.

Diagrama de Campbell

Seu aspecto com respeito aos autovalores correspondentes ao rotor, é similar ao caso sem apoios elásticos.

Modos de Vibração do Sistema

Os modos são determinados de forma exatamente igual ao descrito na seção 2.7.

Solução Particular

Se o sistema tem axissimetria, com respeito aos planos horizontal e vertical, a equações de movimento podem ser escritas em forma complexa, reduzindo a ordem do sistema pela metade.

Notação Complexa

$$r_1 = y_1 + i.z_1 \quad r = y + i.z \quad \varphi = \varphi_y + i.\varphi_z \quad r_2 = y_2 + i.z_2 \quad (4.29)$$

$$\underline{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{r}_1 \\ \ddot{r} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{r}_2 \end{Bmatrix} + \underline{\mathbf{C}} \begin{Bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{r}_2 \end{Bmatrix} + \underline{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r \\ \varphi \\ r_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_{desb} + \mathbf{F}_{mm} + \mathbf{F}_{emp} \quad (4.30)$$

Onde:

$$\underline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} m_r & & & \\ & m & & \\ & & I_a & \\ & & & m_r \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & c_{11} & -i.c_{12} & \\ & i.c_{12} & c_{22} - i.I_p.\Omega & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} k_{11} + (k_1 + i.c_1) & k_{12} & -i.k_{13} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & -i.k_{23} & k_{24} \\ i.k_{31} & i.c_{32} & k_{33} & i.k_{34} \\ 0 & k_{42} & -i.k_{43} & k_{44} + (k_1 + i.c_1) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{F}_{\text{debs}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ m_e \in \Omega^2 e^{i\beta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{i\Omega t} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{F}_{\text{mm}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (I_a - I_p) \alpha \Omega^2 e^{i(\eta+90^\circ)} \\ 0 \end{Bmatrix} e^{i\Omega t} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{F}_{\text{emp}} = \begin{Bmatrix} k_{12} \cdot r_o \cdot e^{-i\gamma} \\ k_{22} \cdot r_o \cdot e^{-i\gamma} \\ k_{32} \cdot r_o \cdot e^{i(-\gamma+90^\circ)} \\ k_{42} \cdot r_o \cdot e^{-i\gamma} \end{Bmatrix} e^{i\Omega t} \quad (4.35)$$

Caso Axisimétrico - Solução Síncrona (+)

Considerando o procedimento descrito na seção 2.7, para o caso axisimétrico e supondo a solução sendo do tipo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{i\Omega t} \quad (4.36)$$

Onde:

$$\mathbf{x} = \{r_1 \quad r \quad \varphi \quad r_2\}^T$$

Substituindo a equação (4.36) na equação na equação de movimento, e fazendo alguma manipulação:

$$\left(\underline{\mathbf{K}} - \Omega^2 \underline{\mathbf{M}} + i\Omega \underline{\mathbf{C}} \right) \cdot \mathbf{x}_0 e^{i\Omega t} = \mathbf{F}_0 e^{i\Omega t}$$

$$\mathbf{F}_0 = \begin{Bmatrix} k_{12} \cdot r_o \cdot e^{-i\gamma} \\ m_e \in \Omega^2 e^{i\beta} + k_{22} \cdot r_o \cdot e^{-i\gamma} \\ (I_a - I_p) \alpha \Omega^2 e^{i(\eta+90^\circ)} + k_{32} \cdot r_o \cdot e^{i(-\gamma+90^\circ)} \\ k_{42} \cdot r_o \cdot e^{-i\gamma} \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}_0 \quad (4.38)$$

Onde \mathbf{H} é a matriz de resposta em frequência ou matriz da função de transferência:

$$\mathbf{H} = \left(\underline{\mathbf{K}} - \Omega^2 \underline{\mathbf{M}} + i\Omega(\underline{\mathbf{C}}) \right)^{-1} \quad (4.39)$$

Sendo que o sistema é linear, pode-se também aplicar o princípio de superposição, obtendo as respostas para cada excitação em separado:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{desb}} + \mathbf{x}_{\text{mm}} + \mathbf{x}_{\text{emp}} \quad (4.40)$$

Onde:

$$\mathbf{x}_{\text{desb}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}_{\text{des}}$$

$$\mathbf{x}_{\text{mm}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}_{\text{mm}}$$

$$\mathbf{x}_{\text{emp}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}_{\text{emp}}$$

Caso Não Axisimétrico

Quando não existe axissimetria a equação de movimento tem que ser tratada como tal (não pode ser representada em notação complexa). Levando em conta as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \cos(\Omega t + \theta) &= \frac{1}{2} \left(e^{i(\Omega t + \theta)} + e^{-i(\Omega t + \theta)} \right) \\ \sin(\Omega t + \theta) &= -\frac{i}{2} \left(e^{i(\Omega t + \theta)} - e^{-i(\Omega t + \theta)} \right) \end{aligned}$$

As excitações podem ser decompostas da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_{\text{desb}} = \frac{1}{2} m \in \Omega^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) e^{i(\Omega t + \beta)} + \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) e^{-i(\Omega t + \beta)} \end{array} \right\} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{F}_{\text{mm}} = \frac{1}{2} (I_a - I_p) \alpha \Omega^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{array} \right) e^{i(\Omega t + \eta)} + \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -i \\ 0 \end{array} \right) e^{-i(\Omega t + \eta)} \end{array} \right\} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{F}_{\text{emp}} = \frac{1}{2} r_o \left\{ \begin{array}{l} -k_{11} \\ k_{22} \\ k_{23} \\ -k_{44} \\ ik_{11} \\ -ik_{22} \\ ik_{23} \\ ik_{44} \end{array} \right\} e^{i(\Omega t - \gamma)} + \left\{ \begin{array}{l} -k_{11} \\ k_{22} \\ k_{23} \\ -k_{44} \\ -ik_{11} \\ ik_{22} \\ -ik_{23} \\ -ik_{44} \end{array} \right\} e^{-i(\Omega t - \gamma)} \quad (4.43)$$

- **Solução Síncrona (+)** (procedimento da seção 2.7)

$$\mathbf{H}_s = \left(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega(\mathbf{C} + \mathbf{G}) \right)^{-1}$$

- **Solução Síncrona (-)** (procedimento da seção 2.7)

$$\mathbf{H}_{ns} = \left(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M} - i\Omega(\mathbf{C} + \mathbf{G}) \right)^{-1}$$

- **Solução Completa** (procedimento da seção 2.7)

$$\mathbf{x}_{\text{total}(j)} = \sqrt{\mathbf{a}_{(j)}^2 + \mathbf{d}_{(j)}^2} \cos \left(\Omega t + \text{tg}^{-1} \left(\frac{\mathbf{d}_{(j)}}{\mathbf{a}_{(j)}} \right) \right)$$

Um outro tipo de solução é decompondo as excitações da seguinte forma:

- Forças de Desbalanceamento:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{desb}_1} &= \left\{ 0 \quad m \in \Omega^2 \cos(\Omega t + \beta) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\} \\ \mathbf{F}_{\text{desb}_2} &= \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad m \in \Omega^2 \sin(\Omega t + \beta) \quad 0 \quad 0 \right\} \end{aligned} \quad (4.44)$$

- Forças de má montagem:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{mm}_1} &= \left\{ 0 \quad 0 \quad (I_a - I_p) \alpha \Omega^2 \cos(\Omega t + \eta) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\} \\ \mathbf{F}_{\text{mm}_2} &= \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -(I_a - I_p) \alpha \Omega^2 \sin(\Omega t + \eta) \quad 0 \right\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

- Forças de empenamento:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\text{emp}_1} &= \{k_{12}r_o \cos(\Omega t - \gamma) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \\
\mathbf{F}_{\text{emp}_2} &= \{0 \ k_{22}r_o \cos(\Omega t - \gamma) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \\
\mathbf{F}_{\text{emp}_3} &= \{0 \ 0 \ k_{32}r_o \cos(\Omega t - \gamma) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \\
\mathbf{F}_{\text{emp}_4} &= \{0 \ 0 \ 0 \ k_{42}r_o \cos(\Omega t - \gamma) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \\
\mathbf{F}_{\text{emp}_5} &= \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ k_{12}r_o \sin(\Omega t - \gamma) \ 0 \ 0 \ 0\} \\
\mathbf{F}_{\text{emp}_6} &= \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ k_{22}r_o \sin(\Omega t - \gamma) \ 0 \ 0\} \\
\mathbf{F}_{\text{emp}_7} &= \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -k_{32}r_o \sin(\Omega t - \gamma) \ 0\} \\
\mathbf{F}_{\text{emp}_8} &= \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ k_{42}r_o \sin(\Omega t - \gamma)\}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Levando em conta que:

$$\begin{aligned}
\cos(\omega.t + \theta) &= \text{Re}\left(e^{i(\omega.t + \theta)}\right) \\
\sin(\omega.t + \theta) &= \text{Im}\left(e^{i(\omega.t + \theta)}\right)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

E atendendo à solução síncrona (+):

$$\mathbf{x} = \mathbf{HF}_o e^{i(\Omega t + \theta_s)}$$

A solução para uma excitação do tipo $F(t) = F_o \cos(\omega t + \theta)$ e $F(t) = F_o \sin(\omega t + \theta)$ é respectivamente (em sistemas com um grau de liberdade):

$$\begin{aligned}
x &= HF_o \cos(\Omega t - \phi) \\
x &= HF_o \sin(\Omega t - \phi)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Onde ϕ é a fase de HF_o (que é um numero complexo).

Assim, estendendo a relação mostrada na equação (4.48) para sistemas com vários graus de liberdade, a solução total é obtida aplicando o principio de superposição, mas este procedimento é computacionalmente mais demorado.

Finalmente, ambos métodos de solução, podem ser aplicados também usando o modelo ADF, dando obviamente resultados similares.

4.4.

Discussão sobre o diagrama de Campbell

Na solução homogênea da equação de estado, os parâmetros modais do sistema estão embutidos na solução do determinante da equação característica:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad (4.49)$$

Onde a solução da equação (4.49), fornece os autovalores do sistema, que em geral são complexos e cuja parte imaginária indica a frequência natural amortecida, a qual é mostrada em função da frequência no diagrama de Campbell.

O diagrama de Campbell serve para, em uma certa velocidade de rotação, saber quais são as frequências naturais. Com isso também, *se o modo não for amortecido*, ter uma idéia das possíveis ressonâncias. Se a ressonância é causada por uma excitação síncrona, como de um desbalanceamento, então usa-se traçar uma reta de 45° para determinar as velocidades críticas.

Já no caso dos *modos serem amortecidos*, a análise é outra. Na solução particular, um indicativo para a determinação das frequências críticas do sistema é o determinante da equação característica:

$$\det(i\Omega \mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (4.50)$$

Para obter possíveis frequências críticas, examina-se este determinante em função da frequência da excitação, obtendo uma função com um ou vários máximos, pontos que são chamados de frequências críticas (maximizam a resposta em frequência), e que são calculados igualando a derivada da função determinante (4.50) a zero. Para obter as frequências críticas exatas, têm-se que analisar a resposta em cada grau de liberdade, que é constituída do cofator (numerador) e o determinante (denominador) da matriz de resposta em frequência.

É importante notar que as expressões e os resultados obtidos das equações (4.49) e (4.50) são matematicamente distintos, ou seja as frequências naturais amortecidas e as críticas em geral são diferentes, mais ainda no caso do sistema com apoios elásticos.

Só no caso de um sistema sem amortecimento é que as frequências naturais e críticas são iguais. No caso de um sistema não conservativo, fazendo uma análise modal, em principio se poderiam obter as frequências críticas a partir dos autovalores do sistema (cada modo pode ser tratado em separado como um sistema independente de um grau de liberdade), mas isto não é possível devido ao fato da matriz de estado não ser simétrica (os sistemas não conservativos em geral são melhor abordados no espaço estado), fazendo com que os autovetores não sejam ortogonais com respeito dela (têm a propriedade de biortogonalidade), o que impede o desacoplamento das equações de movimento.