$$\mathrm{R}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) \overset{def}{=} \beta_1 \mathrm{q}^{na-1} + \beta_2 \mathrm{q}^{na-2} + \cdots + \beta_{na}\,, \tag{5.25}$$

este restul, unic determinate.

Evident, cîtul este nenul numai dacă $nb > na$. În acest caz, introducînd (5.23) în (5.21), expresia ieşirii se obține din 3 surse de semnal (ultima fiind chiar zgomotul alb la momentul curent):

$$y \equiv \mathrm{q}^{na-nb}\mathrm{Q}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\left[u + \mathbf{g}^T\mathbf{v}_e\right] + \frac{\mathrm{q}^{-nb}\mathrm{R}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}\left[u + \mathbf{g}^T\mathbf{v}_e\right] + e\,. \tag{5.26}$$

Le vom analiza pe rînd pe fiecare.

Dacă $nb > na$, atunci primul termen din exprimarea (5.26) a ieşirii este nebanal. El poate fi exprimat numai cu ajutorul intrării şi zgomotelor, fără a face apel la stările sistemului. Pentru aceasta, se definesc următoarele entități:

- vectorul *intrărilor virtuale*:

$$\mathbf{u}_{\mathrm{Q}}[n] \overset{def}{\equiv} \left[u[n] \quad u[n-1] \quad \cdots \quad u[n+na-nb+1]\right]^T \in \mathbb{R}^{nb-na}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,; \tag{5.27}$$

- matricea *zgomotelor virtuale*:

$$\mathbf{V}_{e,\mathrm{Q}}[n] \overset{def}{\equiv} \left[\mathbf{v}_e[n] \quad \mathbf{v}_e[n-1] \quad \cdots \quad \mathbf{v}_e[n+na-nb+1]\right]^T \in \mathbb{R}^{ng\times(nb-na)}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{5.28}$$

Atunci, din (5.26), rezultă:

$$\begin{aligned} \mathrm{q}^{na-nb}\mathrm{Q}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\left[u + \mathbf{g}^T\mathbf{v}_e\right][n] &= \mathbf{d}^T\mathbf{u}_{\mathrm{Q}}[n-1] + \mathbf{d}^T\mathbf{V}_{e,\mathrm{Q}}^T[n-1]\mathbf{g} = \\ &= \mathbf{d}^T\left(\mathbf{u}_{\mathrm{Q}}[n-1] + \mathbf{V}_{e,\mathrm{Q}}^T[n-1]\mathbf{g}\right),\ \forall n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned} \tag{5.29}$$

unde $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{nb-na}$ este vectorul coeficienților cîtului (5.24):

$$\mathbf{d} \overset{def}{=} \left[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_{nb-na}\right]^T. \tag{5.30}$$

Revenind la (5.29), ea arată încercarea de a pune în evidență termenul de forma $\mathbf{d}^T\mathbf{v}_y$ în exprimarea ieşirii. Ar trebui adăugat şi ultimul termen din (5.26) (zgomotul alb), prin extinderea vectorilor $\mathbf{g}$ şi $\mathbf{v}_e$ din (5.18), astfel:

$$\mathbf{g}_e \overset{def}{=} \left[1 \quad c_1 - a_1 \quad c_2 - a_2 \quad \cdots\right]^T = \left[1 \quad \mathbf{g}^T\right]^T; \tag{5.31}$$

$$\mathbf{w}_e[n] \overset{def}{=} \left[\frac{1}{\mathrm{Q}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}e[n-nb+na] \quad \frac{1}{\mathrm{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}e[n-1] \quad \frac{1}{\mathrm{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}e[n-2] \quad \cdots\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{5.32}$$

Ei vor avea dimensiunea $nge \overset{def}{=} 1 + \max\{na, nc\}$. Astfel,

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{Q}}[n] &\overset{def}{=} \mathrm{q}^{na-nb}\mathrm{Q}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\left[u + \mathbf{g}^T\mathbf{v}_e\right][n] + e[n] = \mathbf{d}^T\mathbf{u}_{\mathrm{Q}}[n-1] + \mathbf{d}^T\mathbf{W}_{e,\mathrm{Q}}^T[n-1]\mathbf{g}_e = \\ &= \mathbf{d}^T\left(\mathbf{u}_{\mathrm{Q}}[n-1] + \mathbf{W}_{e,\mathrm{Q}}^T[n-1]\mathbf{g}_e\right),\ \forall n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned} \tag{5.33}$$

unde $\mathbf{W}_{e,\mathrm{Q}}$ se defineşte ca în (5.28), dar cu $\mathbf{w}_e$ în loc de $\mathbf{v}_e$. Evident, termenul (5.33) se reduce la valoarea curentă a zgomotului alb dacă $nb \le na$, deoarece, în acest caz, $\mathrm{Q} \equiv 0$.

Rămîne de exprimat, într-o manieră convenabilă, termenul al doilea din relația (5.26), cu evidențierea stărilor sistemului şi, eventual, completarea componentei de zgomot exogen. Pentru aceasta, se pleacă de la expresia operatorului care precede suma de semnale:

$$\frac{\mathrm{q}^{-nb}\,\mathrm{R}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}=\mathrm{q}^{na-nb}\,\frac{\beta_1\,\mathrm{q}^{na-1}+\beta_2\,\mathrm{q}^{na-2}+\cdots+\beta_{na}}{\mathrm{q}^{na}+a_1\,\mathrm{q}^{na-1}+a_2\,\mathrm{q}^{-2}+\cdots+a_{na}}\,. \tag{5.34}$$

Doar raportul de polinoame este interesant pentru discuţia care urmează. Acesta se descompune în fracţii simple:

$$\frac{\mathrm{R}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{q}^{na}\,\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}=\sum_{i=1}^{N_r}\frac{A_i}{\mathrm{q}-\rho_i}+\sum_{j=1}^{N_c}\frac{B_j^0\,\mathrm{q}+C_j^0}{\mathrm{q}^2-2\,\mathrm{Re}\left(\kappa_j\right)+\left|\kappa_j\right|^2}\,, \tag{5.35}$$

unde $\{\rho_i\}_{i\in\overline{1,N_r}}\subset\mathbb{R}$ sunt cele N_r rădăcini reale ale polinomului $\mathrm{q}^{na}\,\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)$, în timp ce $\left\{\left(\kappa_j,\overline{\kappa}_j\right)\right\}_{j\in\overline{1,N_c}}\subset\mathbb{C}$ sunt cele N_c perechi de rădăcini complex conjugate ale acestuia. Evident,

$$N_r+2N_c=na\,, \tag{5.36}$$

iar coeficienţii $\{A_i\}_{i\in\overline{1,N_r}}$, $\{B_j^0\}_{j\in\overline{1,N_c}}$ şi $\{C_j^0\}_{j\in\overline{1,N_c}}$ au valori reale unic determinate de polinomul $\mathrm{R}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)$ (de la numărător).

Cea de-a doua sumă din descompunerea (5.35) (referitoare la perechile de rădăcini complexe) verifică următoarea proprietate remarcabilă:

$$\sum_{j=1}^{N_c}\frac{B_j^0\,\mathrm{q}+C_j^0}{\mathrm{q}^2-2\,\mathrm{Re}\left(\kappa_j\right)+\left|\kappa_j\right|^2}=\sum_{j=1}^{N_c}\left(\frac{B_j}{\mathrm{q}-\kappa_j}+\frac{\overline{B}_j}{\mathrm{q}-\overline{\kappa}_j}\right), \tag{5.37}$$

unde coeficienţii $\{B_j\}_{i\in\overline{1,N_c}}$ au valori complexe unic determinate:

$$B_j=\frac{B_j^0}{2}-\jmath\,\frac{C_j^0+B_j^0\,\mathrm{Re}\left(\kappa_j\right)}{2\,\mathrm{Im}\left(\kappa_j\right)}\,,\quad \forall\, j\in\overline{1,N_c}\,. \tag{5.38}$$

Aşadar,

$$\frac{\mathrm{R}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{q}^{na}\,\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}=\sum_{i=1}^{N_r}\frac{A_i}{\mathrm{q}-\rho_i}+\sum_{j=1}^{N_c}\left(\frac{B_j}{\mathrm{q}-\kappa_j}+\frac{\overline{B}_j}{\mathrm{q}-\overline{\kappa}_j}\right). \tag{5.39}$$

Fiecare dintre cele două sume ale exprimării (5.39) furnizează accesul la stările procesului ecologic.

Pentru prima sumă, se defineşte următoarea stare generică:

$$x_i^r\equiv\frac{1}{\mathrm{q}-\rho_i}\left[u+\mathbf{g}^T\mathbf{v}_e\right],\quad \forall\, i\in\overline{1,N_r}\,. \tag{5.40}$$

Mai precis, starea (5.40) verifică următoarea relaţie recursivă:

$$x_i^r[n+1]=\rho_i x_i^r[n]+u+\mathbf{g}^T\mathbf{v}_e\,,\quad \forall\, n\in\mathbb{N}\,,\ \forall\, i\in\overline{1,N_r}\,. \tag{5.41}$$

Aceasta este însă o colecţie de ecuaţii cu diferenţe de ordinul I. Grupîndu-le, se poate scrie că:

$$\begin{bmatrix}x_1^r\\ \vdots\\ x_{N_r}^r\end{bmatrix}[n+1]=\underbrace{\mathrm{diag}\left(\rho_1,\ldots,\rho_{N_r}\right)}_{\mathbf{A}^r}\begin{bmatrix}x_1^r\\ \vdots\\ x_{N_r}^r\end{bmatrix}[n]+\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u[n]+\begin{bmatrix}\mathbf{g}^T\\ \vdots\\ \mathbf{g}^T\end{bmatrix}\mathbf{v}_e[n],\quad \forall\, n\in\mathbb{N}\,. \tag{5.42}$$

Matricea sistemului, notată prin $\mathbf{A}^r$ este diagonală şi are dimensiunea $N_r \times N_r$. Stările reale (5.42), grupate la rîndul lor în vectorul $\mathbf{x}^r$, produc atunci următoarea ieşire:

$$y^r[n] = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_{N_r} \end{bmatrix} \mathbf{x}^r[n], \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5.43}$$

A doua sumă din (5.39) conduce la stările cu valori complexe de mai jos:

$$x_j^c \equiv \frac{1}{\mathrm{q} - \kappa_i}\left[u + \mathbf{g}^T \mathbf{v}_e\right], \quad \forall\, j \in \overline{1, N_c}. \tag{5.44}$$

Acestora le corespunde ieşirea:

$$y^r[n] = \sum_{j=1}^{N_c}\left(B_j x_j^c + \bar{B}_j \bar{x}_j^c\right) = 2\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{N_c} B_j x_j^c\right), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{5.45}$$

care are valori reale, grație proprietății (5.37).

Faptul că stările x_j^c au valori complexe nu este convenabil. Ar trebui ca ele să aibă tot valori reale, ca şi în cazul primei sume din (5.39). Se poate ajunge la un sistem de stări reale, apelînd la un artificiu de calcul. Fiecare stare x_j^c şi rădăcină κ_i se exprimă cu ajutorul părților reală (Re) şi imaginară (Im). Astfel, relația recursivă asociată definiției (5.44) devine:

$$\begin{bmatrix} x_j^{c,\mathrm{Re}}[n+1] = \kappa_j^{\mathrm{Re}} x_j^{c,\mathrm{Re}}[n] - \kappa_j^{\mathrm{Im}} x_j^{c,\mathrm{Im}}[n] + u[n] + \mathbf{g}^T \mathbf{v}_e[n] \\ x_j^{c,\mathrm{Im}}[n+1] = \kappa_j^{\mathrm{Re}} x_j^{c,\mathrm{Im}}[n] + \kappa_j^{\mathrm{Im}} x_j^{c,\mathrm{Re}}[n] + u[n] + \mathbf{g}^T \mathbf{v}_e[n] \end{bmatrix}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, j \in \overline{1, N_c}, \tag{5.46}$$

cu notații naturale.Fiecare ecuație cu diferențe în care stările iau valori complexe se poate înlocui, aşadar, cu o pereche de ecuații cu diferențe, stările avînd valori reale. Matricial, ecuațiile (5.46) se rescriu după cum urmează:

$$\begin{bmatrix} x_1^{c,\mathrm{Re}} \\ x_1^{c,\mathrm{Im}} \\ \vdots \\ x_{N_c}^{c,\mathrm{Re}} \\ x_{N_c}^{c,\mathrm{Im}} \end{bmatrix}[n+1] = \underbrace{\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} \kappa_1^{\mathrm{Re}} & -\kappa_1^{\mathrm{Im}} \\ \kappa_1^{\mathrm{Im}} & \kappa_1^{\mathrm{Re}} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \kappa_{N_c}^{\mathrm{Re}} & -\kappa_{N_c}^{\mathrm{Im}} \\ \kappa_{N_c}^{\mathrm{Im}} & \kappa_{N_c}^{\mathrm{Re}} \end{bmatrix}\right)}_{\mathbf{A}^c} \begin{bmatrix} x_1^{c,\mathrm{Re}} \\ x_1^{c,\mathrm{Im}} \\ \vdots \\ x_{N_c}^{c,\mathrm{Re}} \\ x_{N_c}^{c,\mathrm{Im}} \end{bmatrix}[n] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u[n] + \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T \\ \mathbf{g}^T \\ \vdots \\ \mathbf{g}^T \\ \mathbf{g}^T \end{bmatrix} \mathbf{v}_e[n], \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5.47}$$

De această dată, matricea sistemului (notată cu $\mathbf{A}^c$) este bloc diagonală şi are dimensiunea $2N_c \times 2N_c$. Ieşirea corespunzătoare (5.45) admite de asemenea o exprimare matricială, în raport cu vectorul stărilor $\mathbf{x}^c$:

$$y^r[n] = 2\sum_{j=1}^{N_c}\left(B_j^{\mathrm{Re}} x_j^{c,\mathrm{Re}}[n] - B_j^{\mathrm{Im}} x_j^{c,\mathrm{Im}}[n]\right) = 2\begin{bmatrix} B_1^{\mathrm{Re}} & -B_1^{\mathrm{Im}} & \cdots & B_{N_c}^{\mathrm{Re}} & -B_{N_c}^{\mathrm{Im}} \end{bmatrix} \mathbf{x}^c[n], \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5.48}$$

Nu rămîne decît să fie cuplate sistemele (5.42) şi (5.47):

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}^r \\ \hline \mathbf{x}^c \end{bmatrix}[n+1]}_{\mathbf{x}[n+1]\in\mathbb{R}^{na}} &= \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^r & \mathbf{0}_{N_r \times 2N_c} \\ \hline \mathbf{0}_{N_c \times 2N_r} & \mathbf{A}^c \end{array}\right]}_{\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{na\times na}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}^r \\ \hline \mathbf{x}^c \end{bmatrix}[n]}_{\mathbf{x}[n]\in\mathbb{R}^{na}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_r} \\ \hline \mathbf{1}_{2N_c} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^{na}} u[n] + \\ &+ \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_r} \\ \hline \mathbf{1}_{2N_c} \end{bmatrix} \mathbf{g}^T\right)}_{\mathbf{F}\in\mathbb{R}^{na\times\max\{na,nc\}}} \times \underbrace{\mathbf{v}_e[n]}_{\mathbf{v}_{\mathbf{x}}[n]\in\mathbb{R}^{\max\{na,nc\}}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Ecuaţia (5.49) pune clar în evidenţă mărimile şi dimensiunile lor, conform definiţiei (5.15). Se observă că vectorul zgomotelor endogene are aceeaşi dimensiune cu cel al stărilor (na) numai dacă $na \geq nc$. Altfel, există mai multe surse de zgomot intern decît stări. Acest fenomen este natural, deoarece, în cazul multor sisteme, în afara zgomotelor care afectează direct stările lor interne, apar şi interferenţe cauzate de evoluţia acestora. Ori, interferenţele sunt încadrate în mod tradiţional la categoria „perturbaţii”.

În ceea ce priveşte ieşirea, trebuie grupate ecuaţiile (5.26), (5.33), (5.43) şi (5.48). Astfel,

$$\begin{aligned} y \equiv y^r + y^c + y_Q &\equiv \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_{N_r} \end{bmatrix} \mathbf{x}^r + 2\begin{bmatrix} B_1^{\mathrm{Re}} & -B_1^{\mathrm{Im}} & \cdots & B_{N_c}^{\mathrm{Re}} & -B_{N_c}^{\mathrm{Im}} \end{bmatrix} \mathbf{x}^c + \\ &+ \mathbf{d}^T \left(\mathbf{u}_{\mathrm{Q}}[n-1] + \mathbf{W}_{e,\mathrm{Q}}^T[n-1]\mathbf{g}_e \right) \equiv \\ &\equiv \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cccc} A_1 & \cdots & A_{N_r} & 2B_1^{\mathrm{Re}} & -2B_1^{\mathrm{Im}} & \cdots & 2B_{N_c}^{\mathrm{Re}} & -2B_{N_c}^{\mathrm{Im}} \end{array} \right]}_{\mathbf{c}^T \in \mathbb{R}^{na}} \mathbf{x} + \\ &+ \mathbf{d}^T \underbrace{\left(\mathbf{u}_{\mathrm{Q}}[n-1] + \mathbf{W}_{e,\mathrm{Q}}^T[n-1]\mathbf{g}_e \right)}_{\mathbf{v}_y \in \mathbb{R}^{\max\{1, nb-na\}}}. \end{aligned} \qquad (5.50)$$

Avînd în vedere raţionamentul anterior legat de construcţia ieşirii parţiale y_Q, se observă că parametrul $\mathbf{d}$ este:

- scalar şi unitar, dacă $na > nb$;
- scalar şi nu neapărat unitar, dacă $na = nb$;
- vectorial, dacă $na < nb$.

Similar, zgomotul exogen are următoarele caracteristici:

- se reduce la zgomotul alb din momentul curent, dacă $na > nb$;
- este dat de un zgomot colorat unidimensional, dacă $na = nb$;
- revine la o colecţie de cel puţin două zgomote colorate, dacă $na < nb$.

Valoarea curentă a zgomotului alb intervine de fapt în toate cele 3 forme ale zgomotului exogen, dar nu intervine în zgomotul endogen (unde suferă o întîrziere de cel puţin un pas). Această proprietate corespunde realităţii şi ilustrează faptul că zgomotele de măsură însoţesc instantaneu datele achiziţionate, în timp ce zgomotele interne suportă întîrzierile intrinseci ale procesului. De asemenea, dacă $na < nb$, în componenţa zgomotului exogen se regăsesc şi valori regresate în timp ale intrării modelului ARMAX (a se revedea definiţia (5.27)). În cazul procesului ecologic, avînd în vedere definiţiile (5.7) şi (5.8), intrarea este formată din valori estimate ale zgomotului colorat care corupe ieşirea modelului ARMAX. Astfel, încadrarea valorilor intrării la categoria „perturbaţii” este naturală. În general, însă, această încadrare este justificată mai mult de faptul că procesul nu permite efectuarea unei distincţii clare privind natura surselor semnalelor sale de stimul (intrări utile sau zgomote exogene) în valorile semnalului de ieşire.

Pentru a încheia acest paragraf cu o concluzie, Algoritmul 5.1 sumarizează paşii procedurii de conversie de la un model ARMAX uni-dimensional (SISO – *Single Input Single Output*) la unul cu reprezentare pe stare. Evident, în cazul modelelor multi-dimensionale (MIMO – *Multiple Input Multiple Output*), de tipul celor descrise în paragraful precedent, stările fiecărei perechi intrare-ieşire modelate ARMAX trebuie concatenate. Cum numărul acestora depinde de gradele polinoamelor auto-regresive (notate generic prin ”A”), pentru a-l reduce, este necesară aducerea la acelaşi numitor în expresiile funcţiilor de sistem globale (5.13). Cu toate acestea, este posibil ca numărul stărilor să fie destul de mare. Acest dezavantaj este contrabalansat de faptul că matricea sistemului ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{na \times na}$) are o structură rarefiată, concentrată în jurul diagonalei principale. Astfel, stările au un comportament cvasi-independent, una faţă de alta. Corelaţiile dintre ele sunt surprinse în expresia vectorului de ieşire, unde matricea $\mathbf{C}_k$ (din definiţia (5.1)) nu mai poate prezenta structura diagonală.

Algoritmul 5.1. *Procedura de conversie a unui model SISO-ARMAX într-un model cu reprezentare pe stare.*

➢ Date de intrare: parametrii modelului ARMAX uni-dimensional

$\left(\{a_i\}_{i\in\overline{0,na}}\right.$, $\{b_j\}_{j\in\overline{0,nb}}$, $\{c_k\}_{k\in\overline{0,nc}}$, cu $a_0 = c_0 = 1$ şi $b_0 = 0$).

1. Se evaluează direct:
   - $\mathbf{b} \overset{def}{=} \mathbf{1}_{na}$ (vector coloană cu valori unitare);
   - $\mathbf{g} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & \cdots \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{\max\{na,nc\}}$ (forțînd valoarea nulă pentru coeficienții care nu există);
   - $\mathbf{F} \overset{def}{=} \mathbf{b}\mathbf{g}^T$ (prin stivuirea vectorului $\mathbf{g}^T$).
2. Se aplică TIR pentru polinoamele:
   - $\mathrm{q}^{nb}\,\mathrm{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) \overset{def}{=} b_1\,\mathrm{q}^{nb} + b_2\,\mathrm{q}^{nb-1} + \cdots + b_{nb}$ (deîmpărțit);
   - $\mathrm{q}^{na}\,\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) \overset{def}{=} \mathrm{q}^{na} + a_1\,\mathrm{q}^{na-1} + a_2\,\mathrm{q}^{na-2} + \cdots + a_{na}$ (împărțitor).

   Rezultă polinoamele:
   - $\mathrm{Q}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) \overset{def}{=} \alpha_1\,\mathrm{q}^{nb-na-1} + \alpha_2\,\mathrm{q}^{nb-na-2} + \cdots + \alpha_{nb-na}$ (cît);
   - $\mathrm{R}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) \overset{def}{=} \beta_1\,\mathrm{q}^{na-1} + \beta_2\,\mathrm{q}^{na-2} + \cdots + \beta_{na}$ (rest).
3. Dacă $nb \geq na$, atunci $\mathbf{d} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{nb-na} \end{bmatrix}^T$. Altfel, $\mathbf{d} \overset{def}{=} 1$.
4. Se descompune funcția rațională $\mathrm{R}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) / \mathrm{q}^{na}\,\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)$ în fracții simple:

$$\frac{\mathrm{R}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{q}^{na}\,\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)} = \sum_{i=1}^{N_r} \frac{A_i}{\mathrm{q} - \rho_i} + \sum_{j=1}^{N_c} \left(\frac{B_j}{\mathrm{q} - \kappa_j} + \frac{\overline{B}_j}{\mathrm{q} - \overline{\kappa}_j} \right).$$

   (Adică, se evaluează coeficienții $\{A_i\}_{i\in\overline{0,N_r}} \subset \mathbb{R}$ corespunzători polilor cu valori reale şi $\{B_j\}_{j\in\overline{0,N_c}} \subset \mathbb{C}$ aferenți polilor cu valori complexe.)
5. Se grupează toți coeficienții descompunerii de la pasul precedent astfel:

$$\mathbf{c} \overset{def}{=} \left[A_1 \quad \cdots \quad A_{N_r} \;\middle|\; 2B_1^{\mathrm{Re}} \quad -2B_1^{\mathrm{Im}} \quad \cdots \quad 2B_{N_c}^{\mathrm{Re}} \quad -2B_{N_c}^{\mathrm{Im}} \right]^T.$$

6. Se formează matricea sistemului de stare, cu ajutorul polilor:

$$\mathbf{A} \overset{def}{=} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^r & \mathbf{0}_{N_r \times 2N_c} \\ \hline \mathbf{0}_{N_c \times 2N_r} & \mathbf{A}^c \end{array} \right],$$

   unde: $\mathbf{A}^r \overset{def}{=} \mathrm{diag}\left(\rho_1, \ldots, \rho_{N_r}\right)$, iar $\mathbf{A}^c \overset{def}{=} \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} \kappa_1^{\mathrm{Re}} & -\kappa_1^{\mathrm{Im}} \\ \kappa_1^{\mathrm{Im}} & \kappa_1^{\mathrm{Re}} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \kappa_{N_c}^{\mathrm{Re}} & -\kappa_{N_c}^{\mathrm{Im}} \\ \kappa_{N_c}^{\mathrm{Im}} & \kappa_{N_c}^{\mathrm{Re}} \end{bmatrix} \right)$.

➢ Date de ieşire: parametrii modelului cu reprezentare pe stare

($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{na\times na}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{na}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{na}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{\max\{1,nb-na\}}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{na\times\max\{na,nc\}}$).

5.5. Estimatorul Markov în variantă adaptivă

Procedura cheie în rezolvarea sistemului (5.1) o se bazează pe *Metoda Markov* (MMK) de compensare a eficienței estimațiilor parametrilor modelului asociat unui proces afectat de zgomote colorate (nu neapărat albe), de medie nulă [SCS05]. *Eficiența* se referă în acest context la viteza de convergență a parametrilor estimați la parametrii adevărați, în raport cu numărul de date măsurate. Altfel spus, pentru acelaşi număr de date măsurate, un estimator mai eficient asigură o precizie mai mare decît unul mai puțin eficient. De fapt, MMK poate fi privită ca o variantă revizuită a MCMMP, deoarece ecuațiile de estimare a parametrilor sunt de aceeaşi formă.

În mod normal, MMK este neimplementabilă în varianta neadaptivă (*off-line*), adică după încheierea achiziției datelor. Însă, plecînd de la ecuațiile estimatorului neadaptiv de tip Markov, se poate proiecta un algoritm adaptiv (*on-line*), implementabil, cu ajutorul unui raționament care va fi dezvoltat în continuare.

Atît MCMMP cît şi MMK funcționează în contextul proceselor descrise cu ajutorul unor modele de regresie liniară. Ecuațiile caracteristice ale acestora sunt următoarele:

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}^*):\ \mathbf{Y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{V}, \tag{5.51}$$

$$E\{\mathbf{V}\mathbf{V}^T\} = \boldsymbol{\Psi} > \mathbf{0}, \tag{5.52}$$

unde:

- $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^N$, este vectorul datelor de ieşire măsurate (în număr de N);
- $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{N\times n\theta}$ este matricea regresorilor, formată din date măsurate la ieşirea şi, dacă este posibil, la intrarea procesului; este posibil ca unele dintre elementele acestei să nu fie măsurabile, trebuind estimate în prealabil;
- $\boldsymbol{\theta}^* \in \mathbb{R}^{n\theta}$ este vectorul parametrilor adevărați (dar necunoscuți) ai procesului, în număr de $n\theta \in \mathbb{N}^*$ (cunoscut);
- $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^N$ este vectorul perturbațiilor de măsură, de tip zgomot colorat.

Matricea de auto-covarianță asociată zgomotului colorat, $\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, este exprimată în ecuația (5.52) şi are proprietatea de a fi strict pozitiv definită, neavînd o structură neapărat diagonală. Se remarcă faptul că această matrice nu este doar necunoscută, ci are şi o dimensiune determinată de numărul de date măsurate (care poate fi foarte mare).

În aceste condiții, MCMMP oferă o estimație consistentă (adică statistic convergentă) dar ineficientă (adică mai puțin precisă), în timp ce MMK (bazată pe descompunerea Cholesky a matricii $\boldsymbol{\Psi}$) remediază acest neajuns [SCS05]. Mai precis, *Estimatorul Markov* (EMK) returnează următoarea soluție a problemei de identificare experimentală parametrică, folosind date măsurate:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MK} = \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{Y}. \tag{5.53}$$

Matricea de auto-covarianță a erorii de estimare este şi ea oferită (prin intermediul Teoremei fundamentale care guvernează identificarea pe baza MCMMP [SCS05]):

$$\hat{\mathbf{P}}_{MK} \overset{def}{=} E\left\{\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MK} - \boldsymbol{\theta}^*\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MK} - \boldsymbol{\theta}^*\right)^T\right\} = \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Phi}\right)^{-1}. \tag{5.54}$$

De notat că, pentru a implementa ecuațiile (5.53) şi (5.54), matricea $\boldsymbol{\Psi}$ trebuie în prealabil determinată prin alte metode. Fiind o matrice de auto-covarianță, adică de tip Toeplitz simetrică, pentru determinarea ei este suficient să fie cunoscută secvența de auto-covarianță a zgomotului. Dacă se apelează la una dintre metodele din familia MCMMP pentru identificarea parametrilor principali ai procesului, zgomotul de măsură poate fi estimat apoi cu ajutorul acestora şi, în consecință, există posibilitatea de a estima secvența sa de auto-covarianță. Inversarea matricii $\boldsymbol{\Psi}$ poate pune de asemenea probleme, din cauza dimensiunii ridicate. De regulă, pentru inversare, se apelează la o procedură recursivă de inversare, bazată pe următoarea lemă din Teoria matricilor ([GaFR54], [SCS05] – Anexa C):

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^T\right)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{D}+\mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}, \tag{5.55}$$

unde $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ şi $\mathbf{D}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ sunt două matrici inversabile, iar $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ sunt alte două matrici cu proprietatea că $\left(\mathbf{D}+\mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)$ este tot o matrice inversabilă.

Problema care se formulează în acest context nu este însă aceea de a implementa relațiile (5.53) şi (5.54) în mod direct, ci prin intermediul unei proceduri recursive, în vederea reducerii efortului de calcul. Mai precis, se cere evaluarea vectorului estimațiilor $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MK}$ şi a matricii de auto-covarianță aferente $\hat{\mathbf{P}}_{MK}$, folosind versiunile lor determinate într-o etapă anterioară de identificare, notate prin $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}$, respectiv $\tilde{\mathbf{P}}_{MK}$. Cu alte cuvinte, se doreşte proiectarea unei proceduri adecvate prin care estimațiile anterioare $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}$ şi $\tilde{\mathbf{P}}_{MK}$ să fie reactualizate conform unor noi date achiziționate din proces.

Pentru a rezolva această problemă, ideea de bază (propusă de R.E. Kalman în [KaRE60]) este următoarea: ecuația liniară a procesului (5.51) poate fi extinsă cu ecuația următorului pseudo-proces (o identitate, de fapt):

$$\mathcal{P}'(\boldsymbol{\theta}^*):\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}=\boldsymbol{\theta}^*+\underbrace{\left(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}-\boldsymbol{\theta}^*\right)}_{\mathbf{W}}. \tag{5.56}$$

Pseudo-procesul $\mathcal{P}'(\boldsymbol{\theta}^*)$ are aceiaşi parametri adevărați ca şi procesul original $\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}^*)$, numai că ieşira sa („măsurabilă”) este chiar vectorul parametrilor determinați în etapa anterioară de identificare, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}$. Pentru că distanța de la acesta pînă la vectorul parametrilor adevărați este necunoscută (şi nu poate fi măsurată), diferența $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}-\boldsymbol{\theta}^*$ poate fi asimilată ca un zgomot perturbator $\mathbf{W}$. Interesant, matricea de auto-covarianță a zgomotului este totuşi cunoscută:

$$E\left\{\mathbf{W}\cdot\mathbf{W}^T\right\}=E\left\{\left(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}-\boldsymbol{\theta}^*\right)\left(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}-\boldsymbol{\theta}^*\right)^T\right\}=\tilde{\mathbf{P}}_{MK}. \tag{5.57}$$

Procesul extins rezultat prin comasarea lui $\mathcal{P}(\boldsymbol{\theta}^*)$ cu $\mathcal{P}'(\boldsymbol{\theta}^*)$ (adică prin cuplarea ecuațiilor (5.51) şi (5.56)) are următoarea descriere matematică:

$$\mathcal{P}_e(\boldsymbol{\theta}^*):\ \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{Y}\\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}\end{bmatrix}}_{\widetilde{\mathbf{Y}}}=\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}}_{\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}}\boldsymbol{\theta}^*+\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{V}\\ \mathbf{W}\end{bmatrix}}_{\widetilde{\mathbf{V}}}. \tag{5.58}$$

Matricea de auto-covarianță a perturbației extinse este o matrice bloc diagonală, dacă zgomotul colorat $\mathbf{V}$ nu este corelat cu zgomotul pseudo-procesului, $\mathbf{W}$:

$$E\left\{\mathbf{V}\cdot\mathbf{W}^T\right\}=\mathbf{0}\quad\Rightarrow\quad E\left\{\widetilde{\mathbf{V}}\cdot\widetilde{\mathbf{V}}^T\right\}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{P}}_{MK}\end{bmatrix}\overset{def}{=}\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}. \tag{5.59}$$

Procesul extins (5.58) poate fi acum identificat apelînd din nou la EMK. Astfel, conform ecuației (5.53), rezultă:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MK}&=\left(\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}^T\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}\right)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}^T\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\widetilde{\mathbf{Y}}=\\ &=\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}^T & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{P}}_{MK}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}^T & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{P}}_{MK}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Y}\\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}\end{bmatrix}\right).\end{aligned} \tag{5.60}$$

Ecuația (5.60), care pune în evidență interdependența dintre cele două estimații ale vectorilor parametrilor necunoscuți, poate fi transformată în mod echivalent astfel:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MK} &= \left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Phi}+\tilde{\mathbf{P}}_{MK}^{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{Y}+\tilde{\mathbf{P}}_{MK}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}\right)= \\ &=\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Phi}+\tilde{\mathbf{P}}_{MK}^{-1}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{Y}+\tilde{\mathbf{P}}_{MK}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}+\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Phi}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}-\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Phi}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}\right).\end{aligned} \tag{5.61}$$

Adăugarea şi scăderea ultimilor 2 termeni în factorul al doilea din ecuația (5.61) are drept scop facilitarea exprimării estimației $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MK}$ ca o sumă de doi termeni, dintre care unul este chiar estimația $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}$:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MK}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}+\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Phi}+\tilde{\mathbf{P}}_{MK}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\underbrace{\left(\mathbf{Y}-\boldsymbol{\Phi}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{MK}\right)}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}. \tag{5.62}$$

Noua expresie pune în evidență doi factori interesanți. Primul este chiar eroarea de predicție a modelului determinat în etapa anterioară, notată prin $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Al doilea este numit *cîştig de senzitivitate* şi se notează prin:

$$\boldsymbol{\Gamma}\overset{def}{=}\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Phi}+\tilde{\mathbf{P}}_{MK}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}. \tag{5.63}$$

Pentru evaluarea cîştigului $\boldsymbol{\Gamma}$ plecînd de la definiție, se constată că sunt necesare 3 operații de inversare de matrici, dintre care una (cea a matricii $\boldsymbol{\Psi}$) poate fi de complexitate ridicată. De aceea, reducerea numărului de inversiuni matriciale este de dorit. Lema de inversiune exprimată de identitatea (5.55) poate conduce la atingerea acestui obiectiv. Astfel, expresia echivalentă a cîştigului (5.63) este următoarea:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}&\overset{def}{=}\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Phi}+\tilde{\mathbf{P}}_{MK}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}= \\ &=\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}-\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\boldsymbol{\Phi}^T\left(\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Phi}\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\boldsymbol{\Phi}^T\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}.\end{aligned} \tag{5.64}$$

Expresia (5.64) pare destul de complicată, însă ea se poate simplifica printr-o grupare adecvată a factorilor. Astfel, se pot pune în evidență 2 factori comuni: $\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\boldsymbol{\Phi}^T\left(\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Phi}\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\boldsymbol{\Phi}^T\right)^{-1}$ – la stînga şi $\boldsymbol{\Psi}^{-1}$ – la dreapta. Rezultă:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}&=\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\boldsymbol{\Phi}^T\left(\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Phi}\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\boldsymbol{\Phi}^T\right)^{-1}\left[\boldsymbol{\Psi}+\cancel{\boldsymbol{\Phi}\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\boldsymbol{\Phi}^T}-\cancel{\boldsymbol{\Phi}\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\boldsymbol{\Phi}^T}\right]\boldsymbol{\Psi}^{-1}= \\ &=\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\boldsymbol{\Phi}^T\left(\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Phi}\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\boldsymbol{\Phi}^T\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{5.65}$$

În egalitatea (5.65), nu se efectuează decît inversarea unei matrici, astfel că obiectivul a fost atins. Este drept, matricea poate avea dimensiuni mari ($N\times N$), dacă orizontul de măsură este larg. Însă, fiind vorba de reactualizarea estimației de la etapa precedentă, în realitate, N este egal cu dimensiunea orizontului de reactualizare. Efortul de calcul implicat de evaluarea cîştigului este astfel determinat de perioada de reactualizare.

Pentru reactualizarea matricii de auto-covarianță a erorii de estimare, se foloseşte din nou EMK. De această dată, ecuația (5.54) implică:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}_{MK}&=\left(\breve{\boldsymbol{\Phi}}^T\breve{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}\breve{\boldsymbol{\Phi}}\right)^{-1}=\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}^T & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{P}}_{MK}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\right)^{-1}= \\ &=\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Phi}+\tilde{\mathbf{P}}_{MK}^{-1}\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{5.66}$$

Evitarea efectuării a 3 operații de inversiune matricială se poate realiza prin aceeaşi strategie ca în cazul cîştigului de senzitivitate. Conform lemei (5.55) şi proprietății (5.65), rezultă:

$$\hat{\mathbf{P}}_{MK} = \left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{\Phi} + \tilde{\mathbf{P}}_{MK}^{-1}\right)^{-1} = \\ = \tilde{\mathbf{P}}_{MK} - \underbrace{\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\mathbf{\Phi}^T\left(\mathbf{\Psi} + \mathbf{\Phi}\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\mathbf{\Phi}^T\right)^{-1}}_{\mathbf{\Gamma}}\mathbf{\Phi}\tilde{\mathbf{P}}_{MK} = \tilde{\mathbf{P}}_{MK} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Phi}\tilde{\mathbf{P}}_{MK}. \tag{5.67}$$

Egalitatea (5.67) este remarcabilă în special prin faptul că efortul de inversare cheltuit pentru adaptarea vectorului parametrilor estimați (mai precis, pentru evaluarea cîştigului de senzitivitate) este conservat şi pentru adaptarea matricii de auto-covarianță a erorii de estimare. Practic, este suficientă inversarea matricii $\left(\mathbf{\Psi} + \mathbf{\Phi}\tilde{\mathbf{P}}_{MK}\mathbf{\Phi}^T\right)$, pentru a efectua o reactualizare eficientă atît a vectorului parametrilor necunoscuți, cît şi a matricii de auto-covarianță a erorii de estimare.

Algoritmul 5.2 sumarizeaza raționamentul anterior. Gradul de complexitate a fost redus în mod semnificativ, grație lemei de inversiune matricială (5.55). Algoritmul prezintă şi operațiile necesare construcției matricii $\mathbf{\Psi}$. Aceasta nu depinde numai de datele recent achiziționate pe durata orizontului de reactualizare, ci de toate datele achiziționate pînă la momentul curent.

Totodată algoritmul arată că, practic, eroarea curentă de predicție este considerată o realizare a zgomotului care afectează datele de ieşire. Cum eroarea de predicție se deteriorează rapid odată cu îndepărtarea de orizontul de măsură, nu este recomandat ca durata orizontului de reactualizare să fie prea mare. Ea trebuie doar să fie suficient de mare pentru ca toți paşii algoritmului să poată fi parcurşi. Pasul critic (şi consumator de timp) îl constituie 2.7., în care se efectuează inversarea matricii $\mathbf{R}_k = \hat{\mathbf{\Psi}}_k + \mathbf{\Phi}_k\hat{\mathbf{P}}_{k-1}\mathbf{\Phi}_k^T \in \mathbb{R}^{K\times K}$. În aplicații, un orizont de reactualizare de maxim 5 perioade de eşantionare este suficient.

Precizia de estimare a matricii $\mathbf{\Psi}$ depinde în mod esențial de acuratețea cu care este determinată secvența de auto-covarianță a perturbației la pasul 2.2. Cu cît numărul total de date achiziționate este mai mare, cu atît precizia creşte. Evident, primele orizonturi de reactualizare nu beneficiază de o estimație prea precisă a matricii $\mathbf{\Psi}$, însă, pe măsură ce se acumulează mai multe etape de reactualizare, precizia se îmbunătățeşte.

Datele de ieşire ale algoritmului nu se rezumă doar la vectorul parametrilor estimați. Sunt returnate şi matricile $\hat{\mathbf{P}}_k$ (ale căror inverse oferă o măsură a preciziei de estimare a parametrilor) şi $\hat{\mathbf{\Psi}}_k$ (care oferă informații despre puterea şi gradul de auto-corelare ale perturbațiilor).

5.6. Algoritmul Kalman-Bucy-Markov

Revenind sistemului (5.1), acum există toate elementele pentru proiectarea unui algoritm numeric de predicție a stărilor stocastice.

Soluția problemei de predicție se bazează pe utilizarea procedura *EMK în variantă adaptivă* (EMK-A, descrisă în paragraful anterior). Pentru a putea iniția această procedură, este însă necesar ca ecuațiile modelului cu reprezentare pe stare să fie exprimate într-o manieră convenabilă. Astfel, ecuației (5.51) îi corespunde ecuația semnalelor de ieşire din (5.1). Se pot identifica uşor „matricea regresorilor” prin $\mathbf{C}_k$ şi „vectorul parametrilor adevărați” prin $\mathbf{x}[k]$. Rezultă atunci imediat că vectorul curent estimat poate fi notat prin $\hat{\mathbf{x}}[k]$, în timp ce vectorul reactualizat la momentul de eşantionare următor este $\hat{\mathbf{x}}[k+1]$. Folosind aceste definiții, matricea de auto-covarianță a erorii de estimare curente se construieşte simplu astfel:

$$\hat{\mathbf{P}}_k \overset{def}{=} E\left\{\left(\hat{\mathbf{x}}[k] - \mathbf{x}[k]\right)\left(\hat{\mathbf{x}}[k] - \mathbf{x}[k]\right)^T\right\}. \tag{5.68}$$

Procedura EMK-A nu poate funcționa corect decît dacă diferența $\left(\hat{\mathbf{x}}[k] - \mathbf{x}[k]\right)$ nu este corelată cu zgomotul exogen $\mathbf{v}[k]$. Această proprietate se verifică însă, deoarece:

Algoritmul 5.2. *Estimatorul Markov în variantă adaptivă.*

➢ Date de intrare:

☞ indicele structural al modelului de regresie liniară: $n\theta$;

☞ dimensiunea orizontului de reactualizare: $K \geq 1$;

☞ o colecţie redusă de date intrare-ieşire măsurate (dacă este posibil): $\mathcal{D}_{N_0} = \{\varphi[n]\}_{n\in\overline{1,N_0}} \cup \{y[n]\}_{n\in\overline{1,N_0}}$ (cu N_0 de ordinul zecilor cel mult).

1. Iniţializare. Dacă setul de date redus $\mathcal{D}_{N_0}$ nu este disponibil, se setează arbitrar vectorul parametrilor $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ şi matricea $\hat{\mathbf{P}}_0 = \alpha \mathbf{I}_{n\theta}$ (cu $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$). Altfel, se estimează valoarea iniţială a parametrilor ($\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$) folosind o metodă off-line adecvată modelului particular utilizat (din clasa MCMMP) şi se egalează matricea $\hat{\mathbf{P}}_0$ cu inversa matricii de covarianţă folosită în calculul lui $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$.
2. Pentru $k \geq 1$:
   2.1. Se estimează valorile zgomotului care afectează ieşirea procesului pe durata orizontului de reactualizare curent:
   $$\hat{v}[n] = y[n] - \boldsymbol{\varphi}^T[n]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}, \quad \forall\, n \in \overline{(k-1)K+1, kK}.$$
   2.2. Se estimează (sau se reactualizează) secvenţa de auto-covarianţă a zgomotului pe o durată egală cu cea a orizontului de măsură:
   $$\hat{r}_v^k[i] = \frac{1}{kK-i}\sum_{n=i+1}^{kK}\hat{v}[n]\hat{v}[n-i], \quad \forall\, i \in \overline{0, K-1}.$$
   2.3. Se construieşte (sau se reactualizează) matricea de auto-covarianţă estimată a zgomotului (de tip Toeplitz simetrică):
   $$\hat{\boldsymbol{\Psi}}_k = \begin{bmatrix} \hat{r}_v^k[0] & \hat{r}_v^k[1] & \cdots & \hat{r}_v^k[K-2] & \hat{r}_v^k[K-1] \\ \hat{r}_v^k[1] & \hat{r}_v^k[0] & \cdots & \hat{r}_v^k[K-3] & \hat{r}_v^k[K-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{r}_v^k[K-2] & \hat{r}_v^k[K-3] & \cdots & \hat{r}_v^k[0] & \hat{r}_v^k[1] \\ \hat{r}_v^k[K-1] & \hat{r}_v^k[K-2] & \cdots & \hat{r}_v^k[1] & \hat{r}_v^k[0] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K\times K}.$$
   2.4. Se construieşte vectorul erorilor de predicţie curente:
   $$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \begin{bmatrix}\hat{v}[(k-1)K+1] & \cdots & \hat{v}[kK]\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^K.$$
   2.5. Se construieşte matricea curentă a regresorilor:
   $$\boldsymbol{\Phi}_k = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}[(k-1)K+1] & \cdots & \boldsymbol{\varphi}[kK]\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{K\times n\theta}$$
   2.6. Se evaluează matricea auxiliară: $\mathbf{Q}_k = \boldsymbol{\Phi}_k \hat{\mathbf{P}}_{k-1}$.
   2.7. Se inversează matricea: $\mathbf{R}_k = \hat{\boldsymbol{\Psi}}_k + \mathbf{Q}_k \boldsymbol{\Phi}_k^T \in \mathbb{R}^{K\times K}$.
   2.8. Se evaluează cîştigul de senzitivitate: $\boldsymbol{\Gamma}_k = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{R}_k^{-1}$.
   2.9. Se reactualizează matricea $\hat{\mathbf{P}}_{k-1}$, adică: $\hat{\mathbf{P}}_k = \hat{\mathbf{P}}_{k-1} - \boldsymbol{\Gamma}_k \mathbf{Q}_k$.
   2.10. Se reactualizează vectorul parametrilor: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k$.

➢ Date de ieşire: parametrii $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$ şi matricile $\hat{\mathbf{P}}_k$, $\hat{\mathbf{S}}_k$ corespunzătoare modelului de identificare, la fiecare pas de reactualizare $k \geq 0$.