

4.4.2. Modelul auto-regresiv de medie alunecătoare (ARMA)

Existența zerourilor filtrului (4.36) este benefică pentru predicție. Însă efectul zerourilor este limitat la modelul AR, deoarece acestea sunt determinate în mod unic de polii filtrului. Ar fi interesant de operat cu un filtru pentru care zerourile și polii să fie determinați independent unii față de alții. Acesta se obține extinzând modelul auto-regresiv cu o componentă de medie alunecătoare. Se ajunge astfel la un model de tip ARMA, a cărui ecuație auto-regresivă este următoarea:

$$\begin{aligned} v[n] + a_1 v[n-1] + a_2 v[n-2] + \dots + a_{na} v[n-na] = \\ = e[n] + c_1 e[n-1] + c_2 e[n-2] + \dots + c_{nc} e[n-nc], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned} \quad (4.43)$$

unde $\{a_i\}_{i \in \overline{1, na}}$ și $\{c_j\}_{j \in \overline{1, nc}}$ sunt mulțimi finite de coeficienți reali necunoscuți, avînd cardinalele na , respectiv nc , de asemenea necunoscute. Comparativ cu definiția (4.32), în (4.43) apare în plus termenul din dreapta, care este partea de *medie alunecătoare* (MA) a modelului stocastic (parte formată din valori *regresate în timp* ale zgomotului alb). Astfel, modelul (4.43) este cunoscut în literatura de specialitate sub acronimul **ARMA**. În general, indicii structurali na și nc (necunoscuți) variază în gamele $\overline{0, Na}$, respectiv $\overline{0, Nc}$, cu condiția ca ei să nu fie simultan nuli. Dacă $na \geq 1$ și $nc \geq 1$, atunci $Na = Nc = 30$ pentru majoritatea seriilor de timp. Dacă $na = 0$ sau $nc = 0$, atunci se poate extinde gama de variație a celuilalt parametru la valoarea de 100.

Modelul efectiv al componentei aleatoare se exprimă printr-o relație asemănătoare celei din cazul AR (definiția (4.33)):

$$y_{ARMA}[n] = v[n] - e[n], \quad \forall n \in \overline{1, N_y}. \quad (4.44)$$

Avînd în vedere că definiția (4.43) poate fi exprimată în forma *de filtrare*:

$$v[n] = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e[n], \quad \forall n \in \overline{1, N_y}, \quad (4.45)$$

unde A este polinomul (4.35), iar:

$$C(q^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc}. \quad (4.46)$$

Folosind din nou Teorema întârzierii, se poate determina funcția de transfer a filtrului asociat modelului ARMA:

$$H_{ARMA}(z) = \frac{C(z^{-1}) - A(z^{-1})}{A(z^{-1})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na}}, \quad (4.47)$$

unde $nb = \max\{na, nc\}$, iar

$$b_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} c_i - a_i & , i \leq \min\{na, nc\} \\ c_i & , na + 1 \leq i \leq nb \\ -a_i & , nc + 1 \leq i \leq na \end{cases}. \quad (4.48)$$

De această dată, deoarece coeficienții celor două polinoame A și C se pot alege independent, zerourile filtrului (4.47) sunt independente de polii acestuia.

Identificarea modelului ARMA nu este foarte dificilă, dar are un anumit grad de complexitate, cauzat de faptul că valorile zgomotului alb nu sunt direct măsurabile. Cu alte cuvinte, acesta însoțește datele măsurate, fără a putea cuantifica precis contribuția sa. Din acest motiv, nici MCMMP, nici ALD nu se pot utiliza. Pentru determinarea modelelor

ARMA din date măsurate, se apelează la o altă metodă, de complexitate superioară, numită *Metoda minimizării erorii de predicție* (MMEP) [SoSt89], [SCS05]. Obiectivul acestei metode îl constituie estimarea parametrilor modelului ARMA (atunci cînd se cunoaște numărul lor) și a dispersiei zgomotului alb, plecînd de la valorile zgomotului colorat, disponibile pe orizontul de măsură: $\{v[n]\}_{n \in \overline{1, N_y}}$. Această metodă are în principal două etape de calcul: una în care se apelează la un model aproximant de tip AR cu un număr mare de parametri (de ordinul sutelor) pentru estimarea valorilor zgomotului alb și a doua în care se estimează efectiv coeficienții $\{a_i\}_{i \in \overline{1, na}}$ și $\{c_j\}_{j \in \overline{1, nc}}$ (pe baza MCMMP și a valorilor estimate ale zgomotului de la etapa precedentă).

Pentru alegerea modelului optimal de tip ARMA este necesară varierea celor doi indici structurali na și nc . Și de această dată, nu este recomandată utilizarea criteriilor structurale amintite în paragraful 4.2. (bazate pe variația dispersiei estimate a zgomotului alb $\hat{\lambda}_{na,nc}^2$), din cauza impreciziei lor și necorelării cu operația de predicție. Odată ce indicii structurali optimi (na_0 și nc_0) au fost selectați, MMEP oferă nu doar estimațiile $\{\hat{a}_i\}_{i \in \overline{1, na_0}}$, $\{\hat{c}_j\}_{j \in \overline{1, nc_0}}$ și $\hat{\lambda}_{na_0, nc_0}^2$, ci și valorile estimate ale zgomotului alb pe durata orizontului de măsură, $\{\hat{e}[n]\}_{n \in \overline{1, N_y}}$. În consecință, modelul estimat al componentei aleatoare are acum următoarea expresie (sugerată de expresia (4.42) de la modelul AR și definiția (4.43)):

$$\begin{cases} y_{ARMA}[n] + \hat{a}_{na_0} y_{ARMA}[n-1] + \dots + \hat{a}_{na_0} y_{ARMA}[n-na_0] = \\ \quad = \hat{e}[n] + \hat{c}_{nc_0} \hat{e}[n-1] + \dots + \hat{c}_{nc_0} \hat{e}[n-nc_0] \\ y_{ARMA}[1] = v[1]; y_{ARMA}[2] = v[2]; \dots; y_{ARMA}[na_0] = v[na_0] \end{cases}, \quad \forall n \in \overline{1, N_y}, \quad (4.49)$$

De această dată valoarea curentă a zgomotul alb rezidual nu mai lipsește din ecuația (4.49), ea fiind înlocuită cu o estimație a sa.

Estimarea dispersiei λ^2 este extrem de importantă pentru aprecierea calității predicției, astfel că este obligatorie în ambele tipuri de modele.

Se poate observa că maniera de eșantionare a seriei de timp nu este importantă în modelarea componentei aleatoare (indiferent de modelul adoptat). Cu toate acestea, dacă seria de timp a fost eșantionată neuniform, modelul ar putea fi determinat după interpolarea zgomotului colorat rezidual și re-eșantionarea sa uniformă. Modelul obținut este la rîndul său interpolat și apoi re-eșantionat neuniform. Această complicație nu este însă absolut necesară și poate introduce erori, deoarece interpolările distorsionează, de regulă, rezultatul final.

4.5. Predicția seriei de timp

Modelul complet al seriei de timp (4.2), conține 2 componente deterministe (y_T și y_S) și una nedeterministă ($y_{AR(MA)}$). De aceea, prognoza seriei de timp nu se realizează doar prin extrapolarea celor 3 componente pe orizontul de predicție, ci și prin estimarea preciziei valorilor predictate. Aceasta este determinată de dispersia erorii de predicție. Singura componentă care oferă posibilitatea de a estima eroarea de predicție este cea nedeterministă. De fapt, predicția este operația de extrapolare însoțită de determinarea preciziei sale.

4.5.1. Extrapolarea componentelor deterministe

Valorile predictate ale componentelor deterministe din cadrul modelului (4.2) (adică $y_T(t_{N_y+k})$ și $y_S(t_{N_y+k})$) se obțin natulal în cazul eșantionării uniforme:

$$y_T[N_y + k] = a_0 + a_1(N_y + k) + \dots + a_{p_0}(N_y + k)^{p_0}, \quad \forall k \in \overline{1, K}. \quad (4.50)$$

$$y_S[N_y + k] = y_{S,k}, \quad \forall k \in \overline{1, K}. \quad (4.51)$$

În cazul eşantionării neuniforme, tendința poate fi extrapolată de asemenea pe cale naturală, folosind direct modelul matematic polinomial:

$$y_T(t_{N_y+k}) = a_0 + a_1 t_{N_y+k} + \dots + a_{p_0} t_{N_y+k}^{p_0}, \quad \forall k \in \overline{1, K}. \quad (4.52)$$

Pentru componenta sezonieră, însă, este necesară o abordare diferită. Astfel, coeficienții sezonieri disponibili pe orizontul de măsură, $\{y_S(t_n)\}_{n \in \overline{1, N_y}}$, trebuie mai întâi grupați într-o singură perioadă, în funcție de valorile momentelor de eşantionare. Mai precis, se construiește semnalul y_S^P (pe o perioadă egală cu PT_s , unde P este perioada desemnată a componentei sezoniere discrete). Acest semnal are $M \leq N_y$ eşantioane, de regulă neuniform distribuite, definite prin:

$$y_S^P\left(\left\{\frac{t_n}{PT_s}\right\}PT_s\right) \stackrel{def}{=} y_S(t_n), \quad \forall n \in \overline{1, N_y}, \quad (4.53)$$

unele valori putînd fi egale între ele. În expresia argumentului lui y_S^P din definiția (4.53), $\{a\}$ desemnează *partea fracționară* a numărului $a \in \mathbb{R}$. Practic, pentru a construi o valoare a lui y_S^P (în perioada principală $[0, PT_s]$), se ține cont de poziția ocupată în perioada curentă de către o valoare a componentei sezoniere. Urmează interpolarea semnalului discret y_S^P (ținînd cont că $y_S^P(0) = y_S^P(PT_s)$) și, în final, extrapolarea acestuia:

$$y_S(t_{N_y+k}) = y_S^P\left(\left\{\frac{t_{N_y+k}}{PT_s}\right\}PT_s\right), \quad \forall k \in \overline{1, K}. \quad (4.54)$$

4.5.2. Predicția componentei nedeterminate de tip AR

Dacă pentru componentele deterministe precizia de extrapolare este determinată numai de forma modelelor selectate, existența zgomotului în date implică următoarea proprietate: nu orice predictor construit folosind modele numerice conduce la performanțe superioare de predicție. De aceea, se caută un *predictor optimal*, care să ofere prognoze cu eroare de predicție minimală.

În cazul modelului AR, se notează prin $\hat{y}_{AR}[N_y + k | N_y]$ *valoarea predictată* la momentul t_{N_y+k} (precizat a priori) din N_y date măsurate. În cazul eşantionării uniforme, $t_{N_y+k} = N_y + k$. Predictorul optimal este atunci descris de următoarele relații recursive [SCS05]:

$$\hat{y}_{AR}[N_y + k | N_y] \stackrel{def}{=} \begin{cases} v[N_y + k] & , k \leq 0 \\ -\hat{a}_{na_0,1}\hat{y}_{AR}[N_y + k - 1 | N_y] - \dots - \hat{a}_{na_0,k-1}\hat{y}_{AR}[N_y + 1 | N_y] - \\ \quad - \hat{a}_{na_0,k}v[N_y] - \dots - \hat{a}_{na_0,na_0}v[N_y + k - na_0] & , k \in \overline{1, na_0} \\ -\hat{a}_{na_0,1}\hat{y}_{AR}[N_y + k - 1 | N_y] - \dots - \hat{a}_{na_0,na_0}\hat{y}_{AR}[N_y - na_0 | N_y] & , k \geq na_0 + 1 \end{cases} \quad (4.55)$$

Pentru a evalua precizia valorii predictate $\hat{y}_{AR}[N_y + k | N_y]$, se apelează la modelul AR (4.32), cu ajutorul căruia se poate estima eroarea de predicție (de fapt, valorile predictate ale zgomotului alb):

$$\hat{e}[N_y + k] = v[N_y + k] - \hat{y}_{AR}[N_y + k | N_y], \quad \forall k \in \overline{0, K}, \quad (4.56)$$

și dispersia acesteia, notată cu σ_k^2 . După o serie de calcule elementare în care intervine definiția (4.55), se poate arăta că erorile de predicție verifică ecuația:

$$\hat{e}[N_y + k] + \hat{a}_{na_0,1} \hat{e}[N_y + k - 1] u_0[k - 1] + \dots + \hat{a}_{na_0,na_0} \hat{e}[N_y + k - na_0] u_0[k - na_0] = e[N_y + k], \quad \forall k \in \overline{1, K}, \quad (4.57)$$

unde u_0 este treapta unitară discretă, iar $\hat{e}[N_y] = v[N_y] - v[N_y] = 0$.

Plecînd de la ecuația (4.57), se pot deduce expresiile dispersiilor erorilor de predicție însumînd succesiv pătratele coeficienților polinomului obținut prin împărțirea infinită dintre polinomul unitar (1) și cel al modelului AR (A), totul multiplicat cu estimația dispersiei zgomotului alb [SCS05]. De exemplu, primele 3 estimații ale dispersiei de predicție sunt următoarele:

$$\sigma_1^2 = \lambda^2 \Rightarrow \hat{\sigma}_1^2 = \hat{\lambda}_{na_0}^2; \quad (4.58)$$

$$\sigma_2^2 = \lambda^2 (1 + \hat{a}_{na_0,1}^2) \Rightarrow \hat{\sigma}_2^2 = \hat{\lambda}_{na_0}^2 (1 + \hat{a}_{na_0,1}^2) = \hat{\sigma}_1^2 (1 + \hat{a}_{na_0,1}^2); \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \sigma_3^2 &= \lambda^2 \left(1 + \hat{a}_{na_0,1}^2 + \left(\hat{a}_{na_0,1}^2 - \hat{a}_{na_0,2} \right)^2 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{\sigma}_3^2 &= \hat{\lambda}_{na_0}^2 \left(1 + \hat{a}_{na_0,1}^2 + \left(\hat{a}_{na_0,1}^2 - \hat{a}_{na_0,2} \right)^2 \right) = \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_1^2 \left(\hat{a}_{na_0,1}^2 - \hat{a}_{na_0,2} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Evident, relațiile (4.58)-(4.60) arată că dispersia erorii de predicție crește ($\hat{\sigma}_1^2 \leq \hat{\sigma}_2^2 \leq \hat{\sigma}_3^2 \leq \dots$), ceea ce implică o deteriorare a preciziei prognozei pe măsură ce momentele de predicție se îndepărtează de orizontul de măsură. Acest fenomen era previzibil, din cauza mecanismului de acumulare a erorilor.

4.5.3. Predicția componentei nedeterminate de tip ARMA

Evaluarea valorilor predictate optime ale modelului ARMA nu este banală. Ea se bazează pe MMEP, care, la rîndul ei, se sprijină pe următorul rezultat: dacă valorile zgomotului alb ar fi cunoscute, atunci cele mai bune erori predictate (în sensul erorilor minime de predicție) se obțin direct din ecuația (4.43). Mai precis, valorile optime predictate ale zgomotului colorat au următoarele expresii (în care intervin valorile estimate ale parametrilor necunoscuți):

$$\begin{aligned} \hat{y}_{ARMA}[N_y + k | N_y] &= -\hat{a}_1 v[k - 1] - \hat{a}_2 v[k - 2] - \dots - \hat{a}_{na} v[k - na] + \\ &+ \hat{c}_1 e[k - 1] + \hat{c}_2 e[k - 2] + \dots + \hat{c}_{nc} e[k - nc], \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Deoarece valorile zgomotului alb nu pot fi măsurate separat, predictorul (4.61) devine operațional numai după estimarea valorilor acestuia. În acest scop, poate fi utilizat un alt model, numai de tip AR, dar cu un număr mare de parametri, $n\alpha > \max\{na, nc\}$ (de regulă, $n\alpha = 3 \max\{na, nc\}$). Pentru a construi acest model, se apelează la împărțirea infinită (dar trunchiată) a celor două polinoame din expresia funcției de transfer a filtrului de zgomot:

$$H(z) = \frac{\overset{\text{def}}{C}(z^{-1})}{\overset{\text{def}}{A}(z^{-1})} = \frac{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{nc} z^{-nc}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na}}, \quad (4.62)$$

evaluată plecînd de la termenii liberi. Astfel,

$$A_{n\alpha}(z^{-1}) \stackrel{def}{=} 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_{n\alpha} z^{-n\alpha} \stackrel{def}{=} \left[\frac{A(z^{-1})}{C(z^{-1})} \right]_{n\alpha} \cong \frac{A(z^{-1})}{C(z^{-1})} \quad (4.62)$$

este polinomul asociat modelului de estimare a zgomotului alb. Cu alte cuvinte, dacă în locul polinoamelor generice A și C apar versiunile lor estimate \hat{A} , respectiv \hat{C} , atunci se pot estima valorile zgomotului alb. După evaluarea părții întregi de ordin $n\alpha$ (ca în (4.62)), ecuația modelului de estimare a zgomotului alb este următoarea:

$$w[k] + \alpha_1 w[k-1] + \dots + \alpha_{n\alpha} w[k-n\alpha] = e[k], \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (4.63)$$

unde w este un (alt) zgomot colorat (obținut prin filtrarea celui alb cu ajutorul unui filtru avînd numai poli). Identificarea modelului (4.63) se poate realiza și fără împărțirea infinită, prin ALD, aplicat datelor $\{v[n]\}_{n \in \overline{1, N_y}}$, pentru $n\alpha$ dat. Este clar că, indiferent de metoda de identificare utilizată, estimațiile valorilor zgomotului alb se obțin cu ajutorul filtrului invers, la intrarea căruia figurează noul zgomot colorat w (valorile acestuia putînd fi predictate în prealabil):

$$\hat{e}[k] = w[k] + \hat{\alpha}_1 w[k-1] + \dots + \hat{\alpha}_{n\alpha} w[k-n\alpha], \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.64)$$

Utilizînd (4.64), valorile predictate cu modelul ARMA, $\hat{y}_{ARMA}[\cdot | N_y]$, deși sub-optimale, pot fi evaluate după cum urmează.

a. Pe *orizontul de măsură* ($k \in \overline{1, N_y}$), se folosesc valorile zgomotului colorat v în evaluarea componentei AR, în timp ce w este chiar componenta stocastică estimată $\hat{y}_{ARMA}[\cdot | N_y]$:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{ARMA}[n | N_y] &= -\hat{a}_1 v[n-1] - \hat{a}_2 v[n-2] - \dots - \hat{a}_{n\alpha} v[n-na] + \\ &\quad + \hat{c}_1 \hat{e}[n-1] + \hat{c}_2 \hat{e}[n-2] + \dots + \hat{c}_{nc} \hat{e}[n-nc] \quad , \quad \forall n \in \overline{1, k}. \quad (4.65) \\ \hat{e}[n] &= \hat{y}_{ARMA}[n | N_y] + \hat{\alpha}_1 \hat{y}_{ARMA}[n-1 | N_y] + \dots + \hat{\alpha}_{n\alpha} \hat{y}_{ARMA}[n-n\alpha | N_y] \end{aligned}$$

b. Dincolo de orizontul de măsură, adică pe *orizontul de predicție* ($k > N_y$), se folosesc cu precădere valorile componentei stocastice estimate $\hat{y}_{ARMA}[\cdot | N_y]$. Există două posibilități:

b₁ pentru $k \in \overline{N_y+1, N_y+na}$:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{ARMA}[n | N_y] &= -\hat{a}_1 \hat{y}_{ARMA}[n-1 | N_y] - \dots - \hat{a}_{n-N_y-1} \hat{y}_{ARMA}[N_y+1 | N_y] - \\ &\quad - \hat{a}_{n-N_y} v[N_y] - \dots - \hat{a}_{na} v[n-na] + \\ &\quad + \hat{c}_1 \hat{e}[n-1] + \dots + \hat{c}_{nc} \hat{e}[n-nc] \quad , \\ \hat{e}[n] &= \hat{y}_{ARMA}[n | N_y] + \hat{\alpha}_1 \hat{y}_{ARMA}[n-1 | N_y] + \dots + \hat{\alpha}_{n\alpha} \hat{y}_{ARMA}[n-n\alpha | N_y] \end{aligned}$$

$\forall n \in \overline{N_y+1, k}; \quad (4.66)$

b₂ pentru $k \geq N_y + na$:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{ARMA}[n | N_y] &= -\hat{a}_1 \hat{y}_{ARMA}[n-1 | N_y] - \hat{a}_2 \hat{y}_{ARMA}[n-2 | N_y] - \dots - \hat{a}_{na} \hat{y}_{ARMA}[n-na | N_y] + \\ &\quad + \hat{c}_1 \hat{e}[n-1] + \hat{c}_2 \hat{e}[n-2] + \dots + \hat{c}_{nc} \hat{e}[n-nc] \quad , \\ \hat{e}[n] &= \hat{y}_{ARMA}[n | N_y] + \hat{\alpha}_1 \hat{y}_{ARMA}[n-1 | N_y] + \dots + \hat{\alpha}_{n\alpha} \hat{y}_{ARMA}[n-n\alpha | N_y] \end{aligned}$$

$\forall n \in \overline{N_y+na, k}. \quad (4.67)$

Relațiile recursive (4.65)- (4.67) constituie rețete de calcul care pot fi implementate direct cu ajutorul unui mijoc automat de calcul.

Tot MMEP conduce și la estimarea dispersiei zgomotului alb, $\hat{\lambda}_{na,nc}^2$. În [SoSt89] sau [SCS05], s-a demonstrat că dispersia erorii de predicție are următoarea expresie (pe orizontul de predicție, adică pentru momente de tipul $N_y + k$):

$$\sigma_k^2 \stackrel{def}{=} \hat{\lambda}_{na,nc}^2 (1 + \hat{\beta}_1^2 + \dots + \hat{\beta}_{k-1}^2), \quad \forall k \geq 1, \quad (4.68)$$

unde $\{\hat{\beta}_n\}_{n \in \overline{1, k-1}}$ sunt coeficienții polinomului trunchiat obținut prin împărțirea infinită dintre polinoamele \hat{C} și \hat{A} (invers față de (4.62)):

$$1 + \hat{\beta}_1 z^{-1} + \hat{\beta}_2 z^{-2} + \dots + \hat{\beta}_{k-1} z^{1-k} \stackrel{def}{=} \left[\frac{\hat{C}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})} \right]_{k-1}. \quad (4.69)$$

Relația recursivă (4.69) ilustrează același fenomen natural ca și în cazul modelului AR: pe măsură ce momentul de predicție se îndepărtează de orizontul de măsură, eroarea de estimare devine statistic mai mare. Cu alte cuvinte, precizia predictorului ARMA se degradează odată cu îndepărtarea de orizontul de măsură. La primul pas de predicție, dispersia erorii de predicție coincide cu cea a zgomotului alb: $\sigma_1^2 = \hat{\lambda}_{na,nc}^2$. La pasul doi, aceasta crește pînă la valoarea: $\sigma_2^2 = \hat{\lambda}_{na,nc}^2 (1 + \hat{\beta}_1^2) = \hat{\lambda}_{na,nc}^2 [1 + (\hat{c}_1 - \hat{a}_1)^2]$. Creșterea poate fi mai mult sau mai puțin brutală, în funcție de coeficienții celor două polinoame. Evident, începînd cu un anumit moment de predicție $N_y + K$, eroarea devine mult prea mare și predictorul nu mai poate fi utilizat. (De regulă, $K \leq 7$.) Aceasta înseamnă că trecutul îndepărtat influențează din ce în ce mai puțin viitorul, așa cum era de așteptat.

În concluzie, valorile predictate ale seriei de timp se obțin astfel:

$$\hat{y}[N_y + k] = y_T(t_{N_y+k}) + y_S(t_{N_y+k}) + \hat{y}_{AR(MA)}[N_y + k | N_y], \quad \forall k \in \overline{1, K}. \quad (4.70)$$

4.6. Calitatea predicției

Cît de precis este predictorul (4.70)? Tradițional, precizia acestuia egalează precizia modelului AR(MA). Un efect vizual extrem de intuitiv îl crează amplasarea valorilor predictate în interiorul unor așa-numite *intervale de încredere*, definite ca mai jos:

$$I_k \stackrel{def}{=} [\hat{y}[N_y + k] - \beta \hat{\lambda}_k, \hat{y}[N_y + k] + \beta \hat{\lambda}_k], \quad \forall k \in \overline{1, K}. \quad (4.71)$$

Aici, $\beta > 0$ este un factor care depinde de tipul distribuției de probabilitate a zgomotului. În mod normal, aceste zgomote sunt considerate normal distribuite (Gaussiene). În acest caz, $\beta = 3$, iar valorile adevărate ale seriei de timp, dacă ar fi măsurate, ar aparține cu o probabilitate de peste 95% intervalelor de încredere corespondente. Cu cît intervalele de încredere sunt mai largi, cu atît mai puțin precisă este predicția. Acest fenomen este ilustrat în Figura 4.4, unde intervalele I_k sunt reprezentate sub forma unor segmente centrate în valorile predictate.

Unind cu drepte extremele nordice, respectiv extremele sudice ale acestor segmente, se obține un *tub de încredere*. Acesta devine din ce în ce mai larg, pe măsură ce momentul de predicție se îndepărtează de orizontul de măsură. În afara acestei reprezentări, este de asemenea necesar să se poată efectua o comparație pertinentă între diferite modele de predicție.

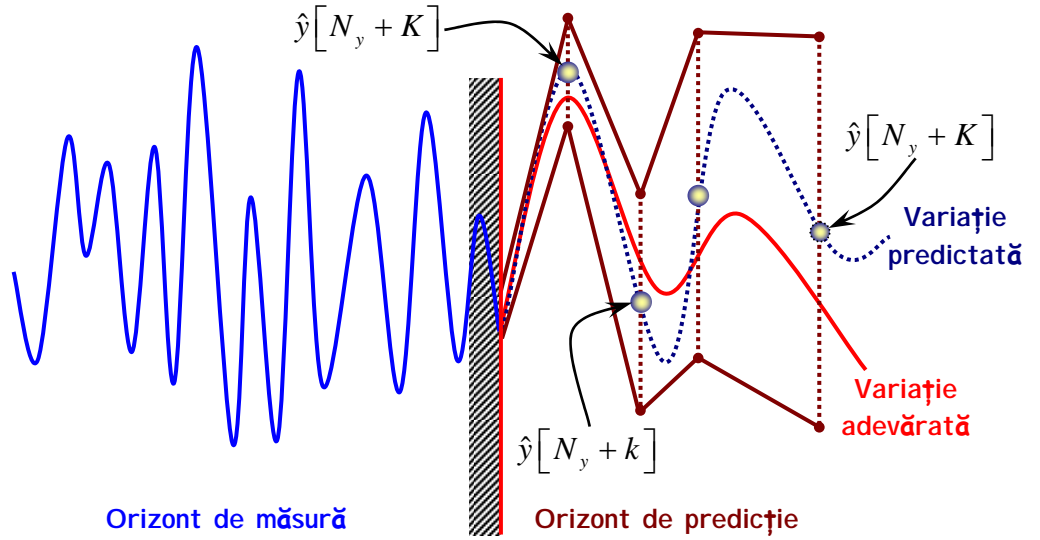


Figura 4.4. Reprezentarea uzuală a datelor predictate și a preciziei asociate.

Luînd în considerare doar tubul de încredere, nu se poate realiza această comparație. De exemplu, este dificil de indicat predictorul cel mai bun dintre următoarele două:

- unul care prezintă un tub de încredere îngust, dar valorile adevărate se situează departe de cele predictate (unele dintre ele chiar în afara tubului);
- altul care oferă o bună localizare a valorilor predictate (relativ aproape de cele adevărate), dar tubul de încredere aferent este larg.

Din acest motiv, în [SCI08], am propus un criteriu numeric de apreciere numit calitatea predicției (**PQ** – *prediction quality*), exprimat astfel (în procente):

$$PQ = \frac{\overset{def}{100}}{1 + \frac{\sum_{k=1}^K \hat{\lambda}_k |y[N_y + k] - \hat{y}[N_y + k]|}{\sigma_y \sum_{k=1}^K \hat{\lambda}_k}} [\%], \quad (4.72)$$

unde σ_y este deviația standard a datelor măsurate, definită ca mai jos, cu ajutorul mediei acestora $\langle y \rangle = a_0$:

$$\sigma_y \overset{def}{=} \sqrt{\frac{1}{N_y} \sum_{n=1}^{N_y} (y[n] - \langle y \rangle)^2}, \quad \langle y \rangle \overset{def}{=} \frac{1}{N_y} \sum_{n=1}^{N_y} y[n]. \quad (4.73)$$

Definiția (4.72) se bazează pe aplicația:

$$f(x) \overset{def}{=} \frac{1}{1+x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \quad (4.74)$$

(o hiperbolă), care transformă numere reale nenegative în numere subunitare (din intervalul $(0,1]$). Cu această definiție, criteriul de calitate crește atunci cînd tubul de încredere se îngustează și/sau valorile predictate sunt apropiate de cele adevărate. Se poate remarca media ponderată a distanțelor dintre valorile predictate și cele adevărate, ponderile fiind definite cu ajutorul dispersiei erorii de predicție:

$$\left\{ \frac{\hat{\lambda}_k}{\sum_{k=1}^K \hat{\lambda}_k} \right\}_{k \in \overline{1, K}}. \quad (4.75)$$

Din (4.75) se observă că fiecare distanță este ponderată cu un factor care descrește pe măsură ce dispersia erorii de predicție crește. Rezultatul este apoi normalizat prin deviația standard a datelor, pentru a înlătura orice unitate de măsură din exprimarea criteriului PQ. Valorile acestuia tind către limita superioară de 100% atunci când valorile predictate sunt apropiate de cele adevărate în cadrul unui tub îngust de încredere. Simulările au demonstrat că, folosind criteriul (4.72), este posibilă efectuarea unei distincții fine între predictorii cu performanțe aparent apropiate.

Criteriul PQ poate fi utilizat indiferent de natura predictorului, cu condiția ca acesta să furnizeze atât valorile predictate, cât și estimări ale dispersiei erorii de predicție.

În cazul în care se decide renunțarea la modelarea componentei nedeterminate a seriei de timp și se încearcă doar extrapolarea componentei deterministe, definiția (4.72) sugerează introducerea unui nou criteriu, numit calitatea extrapolării (EQ - *extrapolation quality*):

$$EQ = \frac{100}{1 + \frac{1}{\sigma_y} \sum_{k=1}^K |y[N_y + k] - \hat{y}[N_y + k]|} [\%]. \quad (4.76)$$

Astfel, criteriul EQ înregistrează o creștere ori de câte ori valorile extrapolate sunt apropiate de cele adevărate.

4.7. Alegerea predictorului optimal folosind calitatea predicției

Plecînd de la o serie de timp precizată, se pot construi mai mulți predictorii bazați pe modele clasice de predicție, prin varierea următorilor parametri:

- p – gradul polinomului tendință;
- ξ – pragul de validare a componentei sezoniere;
- na, nc – indicii structurali ai modelului ARMA;
- $n\alpha$ – indicele de trunchiere a împărțirii infinite dintre polinoamele asociate părților AR și MA din modelul ARMA.

Parametrii ξ și $n\alpha$ sunt mai puțin importanți decît ceilalți. În mod uzual, ei sunt stabiliți la următoarele valori:

$$\xi = 0.3 \text{ (pentru început); } n\alpha = \min\{3(na + nc), N_y\}. \quad (4.77)$$

Pragul ξ poate fi variat în gama 0.25–0.35, în funcție de natura seriei de timp. Pentru ceilalți parametri, simulările au pus în evidență limitele lor de variație. De notat că modelul AR este un caz particular de model ARMA, obținut pentru $nc = 0$. Astfel,

- $p \in \overline{0, P_{\max}}$, cu $P_{\max} = 10$;
- $na \in \overline{0, Na}$, cu $Na = 100$, dacă $nc = 0$ sau $Na = 30$, dacă $nc > 0$;
- $nc \in \overline{0, Nc}$, cu $Nc = 100$, dacă $na = 0$ sau $Nc = 30$, dacă $na > 0$.

În mod normal, este necesară stabilirea gradului polinomului tendință p și indicilor structurali ai modelului ARMA (na și nc), cu ajutorul criteriului PQ. Perioada componentei sezoniere, dacă există, va rezulta automat cu ajutorul Metodei Wittaccker-Robinson. Aparent, deoarece valorile adevărate ale seriei de timp pe orizontul de predicție nu pot fi cunoscute a priori, criteriul PQ este inutil. Cu toate acestea, se poate imagina o strategie

care să permită utilizarea criteriului în determinarea indicilor structurali, așa cum va fi descris în continuare.

Plecînd de la presupunerea naturală că durata orizontului de măsură este mult superioară celei a orizontului de predicție (adică $N_y \gg K$), **Algoritmul 4.2** enumeră pașii strategiei de alegere a indicilor structurali cu ajutorul criteriului PQ.

Algoritmul 4.2. Strategia generală de selecție a indicilor structurali pentru predictorii din clasa (AR)(MA).

1. Pentru fiecare $p \in \overline{0, P_{\max}}$ (cu P_{\max} prestabilit):
 - 1.1. Se estimează coeficienții polinomului tendință y_T și se evaluează seria de timp staționară.
 - 1.2. Se determină coeficienții sezonieri cu ajutorul Metodei Wittacker-Robinson și se evaluează seria de timp reziduală (zgomotul colorat) v , apelînd la testul de validare bazat pe pragul ξ . Zgomotul colorat are lungimea N_y .
 - 1.3. Pentru fiecare $na \in \overline{0, Na}$ și $nc \in \overline{0, Nc}$ (cu $Na, Nc \in \mathbb{N}$ prestabiliți):
 - a. Se estimează predictorul AR, MA sau ARMA corespunzător, notat unitar prin \hat{y}_v , folosind *numai primele* $N_y - K$ valori ale zgomotului colorat v .
 - b. Se predictează ultimele K date, cu ajutorul modelului \hat{y} (avînd 3 componente) și a predictorului \hat{y}_v .
 - c. Se evaluează criteriul PQ, folosind datele predictate și ultimele K date originale (care nu au participat la construcția modelului (AR)(MA)).
2. Se selectează indicii structurali optimi p_0 , na_0 și nc_0 corespunzători valorii maxime a criteriului PQ evaluat anterior.
3. Se estimează modelul de predicție cu indicii structurali p_0 , na_0 și nc_0 , utilizînd *toate cele* N_y valori ale zgomotului colorat v .

Valorile rezonabile ale limitelor superioare Na și Nc sunt situate în jurul valorii de 30. De notat că procedura de mai sus include de asemenea și modelele incomplete de tip AR sau MA, care, astfel, au șansa lor de fi declarate optimale. Pentru identificarea acestor modele, se pot utiliza proceduri mai simple, cum ar fi ALD sau filtrarea Wiener-Hopf [SCS05]. În acest caz, Na sau Nc pot crește pînă la valoarea 100.

Procedura din **Algoritmul 4.2** oferă cele mai bune estimări ale criteriului PQ (dintre toate modelele (AR)(MA) utilizate). Selectarea unuia dintre ei ca optimal, pe baza criteriului PQ, este doar o formalitate. Cu toate acestea, dacă datele adevărate au fost ulterior măsurate (sau au fost menținute în secret) și se evaluează din nou PQ utilizînd predictorul optimal, este de așteptat ca valoarea acestuia să scadă.

4.8. Algoritmul general de predicție

Plecînd de la strategia din finalul paragrafului precedent, a fost implementat un algoritm care produce rezultate de predicție atît pentru modelele de tip AR, cît și pentru cele de tip ARMA, în vederea unei comparații pertinente. Mediul de programare gazdă este MATLAB. Acest algoritm este prezentat în continuare, cu notațiile din cazul seriilor uniform eșantionate. În cazul eșantionării neuniforme, algoritmul trebuie completat cu operația de interpolare, conform considerațiilor din paragrafele precedente.

Algoritmul 4.3. Un algoritm clasic de predicție a proceselor stocastice.

► Date de intrare:

☞ o serie de timp y de durată finită, N_y ;

☞ lungimea orizontului de predicție K (unde $K \ll N_y$); de regulă, $K \leq 7$;

☞ parametri de configurare:

❖ valoarea maximă a gradului polinomului tendință, $P_{\max} \in \mathbb{N}$ (implicit, $P_{\max} = 10$);

❖ pragul de detecție a componentei sezoniere, $\xi \in (0,1]$ (implicit, $\xi = 0.3$);

❖ valorile maxime ale indicilor structurali din modelul ARMA $Na, Nc \in \mathbb{N}$ (implicit: $Na = Nc = 25$, dar $Na = 100$ dacă $nc = 0$, iar $Nc = 100$ dacă $na = 0$).

1. Prelucrarea primară a datelor: evaluarea mediei $\langle y \rangle$, a deviației standard σ_y (cu ajutorul definițiilor (4.73)) și a energiei semnalului staționarizat $y - \langle y \rangle$, notată prin \mathcal{E}_y^0 (adică $\|y - \langle y \rangle\|^2$).

2. Pentru $p \in \overline{0, P_{\max}}$:

2.1. Se estimează modelul polinomial al tendinței:

$$y_{T,p}[n] = a_0 + a_1 n + \dots + a_p n^p, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

prin utilizarea MCMMP, adică prin minimizarea criteriului pătratic:

$$\mathcal{V}(a_0, a_1, \dots, a_p) = \sum_{n=1}^{N_y} (y[n] - y_{T,p}[n])^2.$$

2.2. Se staționarizează datele: $y_{0,p}[n] \equiv y[n] - y_{T,p}[n]$, $\forall n \in \overline{1, N_y}$.

2.3. Pentru $P \in \overline{1, \lfloor N_y / 2 \rfloor}$:

2.3.1. Se împachetează datele staționarizate în următoarea matrice avînd $Q = \lfloor N_y / P \rfloor$ linii și P coloane:

$$\mathbf{Y}_P = \begin{bmatrix} y_{0,p}[1] & y_{0,p}[2] & \dots & y_{0,p}[P] \\ y_{0,p}[P+1] & y_{0,p}[P+2] & \dots & y_{0,p}[2P] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{0,p}[(Q-1)P+1] & y_{0,p}[(Q-1)P+2] & \dots & y_{0,p}[QP] \end{bmatrix}.$$

2.3.2. Se mediază coloanele matricii \mathbf{Y}_P și se colectează valorile obținute (coeficienții sezonieri) în setul de date $y_{S,p,P}^0$, de lungime P .

2.3.3. Se construiește componenta sezonieră $y_{S,p,P}$ folosind prelungirea prin periodicitate a coeficienților sezonieri $y_{S,p,P}^0$, pînă la durata N_y .

2.3.4. Se evaluează zgomotul colorat: $v_{p,P} \equiv y_{0,p} - y_{S,p,P}$.

2.3.5. Se evaluează energia zgomotului colorat: $\|v_{p,P}\|^2$.