Algoritmul 4.3. *Un algoritm clasic de predicție a proceselor stocastice (continuare).*

2.4. Se selectează perioada $P_0 \in \overline{1,\lfloor N_y/2 \rfloor}$ pentru care energia zgomotului colorat este minimă.

2.5. Dacă $\|v_{p,P_0}\|^2 \leq \xi \boldsymbol{\mathcal{E}}_y^0$, atunci se poate considera că seria de timp prezintă o variație sezonieră. În acest caz, componenta sezonieră $y_{S,p}$ este chiar y_{S,p,P_0}, iar zgomotul colorat v_p este chiar v_{p,P_0}. Altfel, se consideră că seria de timp nu posedă componentă sezonieră. În acest caz, $y_{S,p}$ are numai valori nule, iar v_p coincide cu $y_{0,p}$.

2.6. Se restrînge zgomotul colorat la primele $N_y - K$ date.

2.7. Pentru $na \in \overline{0,Na}$ şi $nc \in \overline{0,Nc}$ (dar nu ambele nule):

2.7.1. Se estimează şi se validează modelul ARMA al zgomotului colorat restrîns cu ajutorul MMEP (sau al altor metode mai simple, în cazul în care $na \cdot nc = 0$).

2.7.2. Se construieşte predictorul $\hat{y}_{(AR)(MA),p,na,nc,K}$, cu ajutorul relațiilor recursive din paragraful 4.5.

2.7.3. Se predictează ultimele K date:

$$\hat{y}_{p,na,nc,K}\left[n \mid N_y\right] = y_{T,p}[n] + y_{S,p}[n] + \hat{y}_{(AR)(MA),p,na,nc,K}\left[n \mid N_y\right], \quad \forall\, n \in \overline{N_y - K + 1, N_y}.$$

2.7.4. Se estimează dispersiile erorii de estimare $\left\{\sigma^2_{p,na,nc,K,k}\right\}_{k=\overline{1,K}}$, cu ajutorul definiției (4.68).

2.7.5. Se evaluează criteriul de calitate a predicției, folosind definiția (4.72), aplicată ultimelor K date. Mai precis:

$$\mathrm{PQ}_{p,na,nc,K} = \frac{100}{1 + \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{K} \sigma_{p,na,nc,K,k} \left| y\left[N_y + k - K\right] - \hat{y}_{p,na,nc,K}\left[N_y + k - K \mid N_y\right]\right|}{\sigma_y \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \sigma_{p,na,nc,K,k}}}\ [\%].$$

2.8. Se aleg şi se memorează indicii structurali optimali na_0 şi nc_0, care maximizează criteriul PQ evaluat anterior.

2.9. Se reține (memorează) valoarea maximă a criteriului PQ, notată prin $\mathrm{PQ}_{p,na_0,nc_0,K}$.

3. Se alege gradul p_0 corespunzător valorii maxime a tuturor valorilor criteriului PQ reținute în ciclul anterior. Acesta este unic asociat unei tendințe polinomiale y_{T,p_0}, componente sezoniere y_{S,p_0} (eventual nule) şi unei perechi de indici structurali $\{na_0, nc_0\}$.

4. Se extrage zgomotul colorat pe întregul orizont de măsură: $v \equiv y - y_{T,p_0} - y_{S,p_0}$.

5. Se estimează modelul ARMA al zgomotului colorat v, pentru perechea de indici structurali $\{na_0, nc_0\}$.

6. Se construieşte predictorul stocastic $\hat{y}_{(AR)(MA)}$, cu relațiile recursive din paragraful 4.5.

Algoritmul 4.3. *Un algoritm clasic de predicție a proceselor stocastice (final).*

7. Se predictează seria de timp:

$$\hat{y}_{\mathrm{T,S,(AR)(MA)}}\left[N_y+k\,|\,N_y\right]=y_T\left[N_y+k\right]+y_S\left[N_y+k\right]+\hat{y}_{(AR)(MA)}\left[N_y+k\,|\,N_y\right],\quad \forall k\in\overline{1,K}$$

şi se evaluează dispersiile erorii de predicţie $\{\sigma_k^2\}_{k=\overline{1,K}}$, cu ajutorul definiţiei (4.68).

➢ Date de ieşire:
- mulţimea valorilor predictate: $\left\{\hat{y}_{\mathrm{T,S,(AR)(MA)}}\left[N_y+k\,|\,N_y\right]\right\}_{k\in\overline{1,K}}$;
- dispersiile erorii de predicţie $\{\sigma_k^2\}_{k=\overline{1,K}}$.

Acest algoritm este intuitiv şi relativ simplu de implementat, dar precizia sa de predicţie este inferioară altor algoritmi evoluaţi. O precizie mai mare de predicţie se poate obţine în cazul seriilor de timp suficient de regulate (netede), pentru care SNR este suficient de mare. Avantajul indiscutabil al modelului clasic de predicţie îl constituie viteza de calcul, fapt care îl predispune implementărilor în timp real. Pentru subsistemul mobil, operarea în timp real este o opţiune esenţială, deoarece aceasta asigură monitorizarea efectivă a fenomenului ecologic.

Paşii critici ai Algoritmului 4.3 îi constituie 2.4. şi 2.4., în care a fost implementată Metoda Wittacker-Robinson. Această metodă este destul de sensibilă la influenţa zgomotelor perturbatoare chiar şi pentru serii de timp cun un SNR confortabil de mare. Nici dublarea ei cu o metodă spectrală (Metoda periodogramei Schuster [SMS04]) nu schimbă prea mult rezultatul. Mai mult, cele două metode pot conduce la rezultate foarte diferite, ceea ce crează ambiguitate. S-ar putea totuşi utiliza metode mai precise de detecţie a variaţiei periodice prin apelarea la domeniul *Estimării spectrale* [PrMa96], dar rezultatul rămîne limitat ca precizie, în special din cauza faptului că utilizatorul trebuie să efectueze o alegere. În cazul Metodei Wittacker-Robinson, alegerea subiectivă constă în precizarea încă de la început a pragului de detecţie ξ, deşi introducerea acestui parametru minimizează subiectivismul. Pentru a elimina subiectivismul, este necesară o altă abordare în construcţia modelului componentei deterministe. Aceasta este prevăzută a fi dezvoltată în etapa următoare a proiectului şi se bazează pe analiza timp-frecvenţă-scală a semnalelor.

5. Modele cu reprezentare pe stare, ale seriilor de timp distribuite

5.1. Despre filtrarea Kalman

Următoarea clasă de modele numerice care permite predicţia rapidă a fenomenelor ecologice se bazează pe reprezentarea pe stare şi celebrul *Algoritm de filtrare al lui Kalman* [SCS05].

Teoria filtrării Kalman datează de la începutul anilor '60 şi a fost conturată de publicaţiile lui R.E. Kalman [KaRe60] şi R.S. Bucy [KaBu61]. La acea vreme, această abordare a acţionat ca o placă turnantă în rîndurile comunităţii ştiinţifice, reuşind chiar să o separe în două tabere: una care s-a ataşat fidel de ea şi alta care s-a situat pe poziţii critice (uneori cu accente vehemente), cu nu mai puţină fidelitate. Mai mult, cercetătorii care au contestat teoria lui Kalman au rămas, pînă în ziua de astăzi, în marea lor majoritate, pe poziţii opuse sau cel puţin de neîncredere. Probabil că o motivaţie a criticismului lor a constituit-o faptul că această teorie era primul demers de apropiere a unor concepte extrem de abstracte, legate de noţiunea de „sistem dinamic", de aspecte practice, concrete. Cu alte cuvinte, ceea ce s-a auto-denumit prin „teorie", constituia mai degrabă o abordare practică obţinută prin aplecarea domeniilor Teoriei Sistemelor [IoV85] şi Identificării Sistemelor [SoSt89] către probleme practice. Cu toate acestea, numeroşi cecetători au sesizat şi chiar subliniat ulterior avantajele practice ale acestei abordări, unii dintre ei dedicîndu-şi aproape întreaga carieră în direcția îmbogățirii noii (pe atunci) direcții de cercetare deschise de Kalman şi Bucy. Pe scurt, Kalman şi (ulterior) Bucy propun o metodă de rezolvare a ecuațiilor diferențiale în condiții de perturbații, părăsind astfel cadrul de lucru tradițional din Matematică, în care aceste ecuații sunt ideale, perfect izolate față de orice sursă de perturbații. În acest fel, s-a ajuns la un algoritm de evaluare a derivatelor stărilor unei entități dinamice care evoluează într-un anumit mediu (mai mult sau mai puțin ostil acestei evoluții), fapt care este sinonim cu predicția evoluției ei.

Astăzi, în pofida vîrstei, această (pseudo-)teorie nu conteneşte să uimească, mai ales prin aplicațiile neconvenționale în care îşi dovedeşte atît utilitatea, cît şi longevitatea. De exemplu, se pot menționa rezultate recente de: avionică (legate de aşa numita *problemă de navigație stelară inerțială*) [KaFr96], diagnoză de defecte [HaCa03] sau robotică [NeR03], unde au fost implementate versiuni destul de sofisticate ale algoritmului inițial de filtrare Kalman.

Poate că şi abordarea care urmează, descrisă în cadrul acestei secțiuni, se încadrează la categoria „neconvențională”, avînd în vedere alăturarea (aparent stranie) dintre *filtrarea Kalman* şi *monitorizarea ecologică*. Însă tocmai cadrul de lucru sugerat de Figura 1.2 conduce în mod natural la ideea de *stări ale unui sistem deschis, distribuit în spațiu*. Aplicația de monitorizare a stratului de zăpadă ilustrată în figură (cu scopul evident de a preveni avalanşele) ridică, printre altele, o problemă importantă, legată de eficiența acestei monitorizări. În acest caz, monitorizarea este evident realizată nu doar prin simpla observare a valorilor succesiv măsurate de senzori, ci, mai ales, prin predicția acestor valori, pe baza istoriei lor. Şi atunci, în ce caz se obține o predicție mai precisă: cînd se folosesc modele izolate (cîte unul pentru fiecare senzor) sau cînd se construieşte un model care ia în considerare întregul ansamblu de senzori (deci şi corelațiile insesizabile dintre aceştia)? În pofida intuiției comune, răspunsul nu este în favoarea celei de-a doua situații. Probabil că precizia de predicție depinde foarte mult de aplicația în sine şi de gradul de corelare existent între seturile de date furnizate de senzorii răspîndiți în acelaşi areal geografic.

În cazul monitorizării stratului de zăpadă, este evident că topirea zăpezii în amonte poate provoca creşterea stratului de zăpadă în aval (chiar prin avalanşe), după expunerea versanților montani la radiația solară. Există, astfel, corelații destul de evidente între diferitele măsurători. În alte aplicații, însă, aceste corelații sunt mai puțin sesizabile. De exemplu, într-un cîmp agricol, irigarea unei mici suprafețe nu influențează umiditatea din sol pe întreaga arie de măsură. Astfel, doar senzorii amplasați în vecinătatea micii suprafețe sunt cel mult afectați, nu şi cei îndepărtați.

O metodă indirectă de a lua în considerare corelațiile dintre seriile de date distribuite (provenite de la sistemul de senzori) se bazează pe tehnica agregării datelor (*data fusion*) [WZA05]. Astfel, folosind ansamblul tuturor seriilor de timp, este construită o singură serie de timp agregată, optimală în sensul unui anumit criteriu predefinit, chiar dacă seriile originale nu au aceleaşi rate de eşantionare. Semnalul agregat rezultat nu se identifică neapărat cu media datelor distribuite, nici măcar în cazul în care acestea sunt furnizate la aceeaşi rată de eşantionare. În [StPe08a], [StPe08b] şi [StPe08c] a fost propusă o metodă de agregare, pe bază de undine [StSt07]. Cu toate că problema predicției s-a redus la o singură serie de timp, agregarea atenuează puternic corelațiile fine dintre datele distribuite, care se dovedesc a fi importante pentru predicție. Practic, s-a constatat că şi în cazul în care seriile de timp distribuite au aproximativ aceeaşi aliură, valorile predictate pot fi foarte diferite de la o serie de alta. Înlocuirea acestora cu un singur set de date predictate poate să nu fie realist.

Mai realistă este ideea că senzorii amplasaţi într-un areal geografic nu furnizează doar valori eşantionate în timp ale parametrilor sistemului ecologic, ci şi valori ale acestora *eşantionate spaţial*. Cu alte cuvinte, sistemul ecologic este o entitate ale cărei stări variază continuu atît în timp, cît şi spaţiu. Prin alegerea adecvată a ratelor de eşantionare, se rezolvă problema succesiunii temporale a datelor provenite de la stările sistemului. Prin distribuirea adecvată a senzorilor în cadrul arealului monitorizat, se rezolvă problema eşantionării spaţiale a sistemului ecologic, adică a alegerii stărilor reprezentative. Dacă pentru prima problemă există o serie de rezultate de eşantionare ajutătoare (în speţă, regula de eşantionare Kotelnikov-Shannon-Nyquist [StD96]), pentru cea de-a doua, după cunoştinţele noastre, nu au fost încă propuse reguli atît de generale. Intuitiv, senzorii amplasaţi spaţial ar trebui să constituie o reţea cît mai densă, pentru a putea surprinde corelaţiile intime ale stărilor sistemului (chiar dacă o parte dintre senzori se vor dovedi redundanţi). Ca şi în cazul stabilirii ratelor de eşantionare, alegerea unei anumite densităţi a senzorilor este condiţionată de raţiuni economice. Deosebirea constă însă în faptul că adăugarea unui nou senzor în reţea se poate dovedi a fi o decizie mult mai scumpă decît cea de creştere a ratei de eşantionare.

În această secţiune, predicţia ansamblului de serii de timp este aordată în accepţia că acestea provin prin eşantionarea spaţio-temporală a stărilor sistemului ecologic. Dinamica stărilor este descrisă prin ecuaţii diferenţiale de ordine relativ reduse (maxim 3), aşa cum a arătat raportul de cercetare al primei etape [NDS07]. Tot acel raport a arătat şi că multe dintre ecuaţiile „ecologice" prezintă neliniarităţi. Deoarece modelarea neliniarităţilor constituie un demers care poate conduce uşor la rezultate imprecise, s-a apelat la un mecanism adaptiv care să suplinească aceste neliniarităţi. Mai precis, chiar dacă modelul asociat procesului ecologic este liniar, se consideră că parametrii săi variază în timp. Această caracteristică este sinonimă cu alegerea celui mai apropiat model liniar dintr-o clasă, la fiecare moment de adaptare. Astfel, neliniarităţile, dacă există, conduc la o problemă de identificare adaptivă multi-model. Odată ce modelul cu reprezentare pe stare a fost stabilit ca exprimare, urmează determinarea/reactualizarea acestuia şi rezolvarea sistemului de ecuaţii diferenţiale (de fapt, cu diferenţe, deoarece modelul este discret), folosind o versiune adaptată a Algoritmului de filtrare Kalman-Bucy.

5.2. Reprezentarea discretă pe stare a unei reţele de senzori

O reţea de senzori (cum este şi cea din Figura 1.2) poate fi considerată sistem de măsură directă a stărilor unui proces stocastic. Cu alte cuvinte, ieşirea acestui sistem este direct conectată la stări. Această reprezentare are următoarea exprimare matematică:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_k\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_k\mathbf{u}[k] + \mathbf{F}_k\mathbf{w}[k] \\ \mathbf{y}[k] \quad\;\; = \mathbf{C}_k\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_k\mathbf{v}[k] \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

unde:

- $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{nx \times nx}$, $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{nx \times nu}$, $\mathbf{C}_k \in \mathbb{R}^{ny \times nx}$, $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{ny \times nv}$ şi $\mathbf{F}_k \in \mathbb{R}^{nx \times nw}$ sunt matrici care includ toţi parametrii variabili (dar deja estimaţi) ai procesului stocastic;
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nx}$ este vectorul necunoscut al stărilor procesului;
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{nu}$ este vectorul semnalelor de intrare (măsurabile sau nu);
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{ny}$ este vectorul semnalelor de ieşire măsurabile;
- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{nw}$ este zgomotul perturbator intern (endogen), necunoscut, al procesului;
- $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{nv}$ este zgomotul perturbator extern (exogen), necunoscut, care afectează măsurătorile ieşirilor procesului.

În cazul seriilor de timp, intrările din ecuaţiile (5.1) sunt cel puţin nemăsurabile (dacă nu necunoscute). Este aproape imposibil de măsurat semnalul (sau semnalele) care guvernează dinamica unui anumit parametru monitorizat. De aceea, intrările pot fi cel mult estimate, ca şi stările. În acest caz, zgomotul endogen poate juca rol de intrare parazită, care însoţeşte intrarea utilă. Ambele sunt însă necunoscute şi trebuie estimate. În schimb, zgomotul exogen este întotdeauna considerat o perturbaţie care corupe datele măsurate şi apare în mod inevitabil asociat cu operaţia de măsurare.

Reprezentarea pe stare (5.1) nu este utilă decît în condiţiile în care se precizează anumite caracteristici ale celor două tipuri de zgomote. De aceea, se consideră verificate următoarele ipoteze, larg acceptate în aplicaţii:

H_1 Toate zgomotele au media nulă şi sunt de tip Gaussian [SCS05].

H_2 Cele două tipuri de zgomote sunt necorelate între ele.

H_3 Zgomotul endogen este neauto-corelat, dar componentele sale pot fi corelate între ele la acelaşi moment de timp.

H_4 Componentele zgomotului exogen sunt albe şi necorelate între ele.

Ultimele două ipoteze se exprimă matematic astfel:

$$\mathbf{\Psi}_{\mathbf{w}}[k] = E\left\{\mathbf{w}[k]\mathbf{w}^T[k]\right\} \in \mathbb{R}^{nw\times nw}, \text{ respectiv } \mathbf{\Psi}_{\mathbf{v}}[k] = E\left\{\mathbf{v}[k]\mathbf{v}^T[k]\right\} \in \mathbb{R}^{nv\times nv}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (5.2)$$

unde E este operatorul de mediere statistică. Cele două matrici definite în (5.2) sunt diferite nu doar ca dimensiune, ci şi ca structură. Prima ($\mathbf{\Psi}_{\mathbf{w}}[k]$) este o matrice strict pozitiv definită (nu neapărat diagonală), în timp ce a doua ($\mathbf{\Psi}_{\mathbf{v}}[k]$) este o matrice diagonală, cu diagonala strict pozitivă. Evident, ipoteza H_4 are accente restrictive. O variantă relaxată a acesteia ar fi chiar ipoteza H_3, adaptată la zgomotul exogen. În acest caz, matricea $\mathbf{\Psi}_{\mathbf{v}}[k]$ nu mai este neapărat diagonală, dar continuă să fie strict pozitiv definită. Diagonalitatea acestei matrici asigură doar o viteză mai bună de convergenţă a algoritmului de rezolvare a ecuaţiei (5.1) – Algoritmul Kalman-Bucy, de fapt. Renunţarea la diagonalitate, va conduce doar la o creştere a timpului necesar calculatorului pentru rezolvarea ecuaţiei (5.1). Nu este afectată în mod sesizabil precizia rezultatului final, astfel încît se poate considera, fără a face un compromis prea mare, că zgomotul exogen verifică, la rîndul lui, cel puţin ipoteza H_3. De notat că ambele matrici (5.2) sunt necunoscute şi pot fi cel mult estimate.

Revenind la modelul (5.1), este clar că vectorul ieşirilor $\mathbf{y}$ are un număr de componente ny egal cu numărul senzorilor. Elementele sale se mai numesc şi *canale de măsură*. Vectorul stărilor are rolul de a codifica toate corelaţiile existente între senzori. Nu este obligatoriu ca numărul stărilor procesului stocastic (nx) să fie egal cu numărul senzorilor. Sistemul de ecuaţii cu diferenţe (5.1) este doar de ordin I, în timp ce legile de variaţie ale parametrilor de proces monitorizaţi pot fi exprimate prin ecuaţii diferenţiale de ordine superioare (aşa cum a relevat şi raportul de cercetare din etapa precedentă, [NDS07]). Aceasta măreşte numărul de stări ale procesului (este adevărat, unele dintre ele fiind doar virtuale), avînd în vedere binecunoscuta manieră de a obţine un sistem diferenţial de ordin I dintr-unul de ordin superior. În consecinţă, $nx \geq ny$. În schimb, există tot atîtea surse de zgomot exogen cîte canale de măsură au fost instalate (dimensiunea vectorului $\mathbf{D}_k\mathbf{v}$ este egală cu cea a vectorului $\mathbf{y}$). Fiecare senzor cu zgomotul său exogen. Zgomotul endogen $\mathbf{F}_k\mathbf{w}$ se pliază însă pe cel al stărilor, avînd aceeaşi dimensiune (nx). În ceea ce priveşte intrările, în general, ele pot fi în număr arbitrar, necorelat cu nx şi ny. În particular, în cazul seriilor de timp distribuite, dimensiunea intrărilor este determinată de numărul de senzori şi de anumiţi indici structurali ai modelelor de identificare auto-regresive asociate reprezentării pe stare. Această proprietate va fi explicitată în paragrafele următoare.

Pentru a ajunge la algoritmul de predicţie bazat pe moldelul (5.1), este necesar să fie rezolvate 2 probleme: proiectarea unui mecanism de adaptare parametrică şi rezolvarea numerică a ecuaţiilor cu diferenţe. Le vom aborda pe rînd, în continuare.

5.3. Identificarea adaptivă a unui model ARMAX multi-dimensional

Sistemul de ecuații cu diferențe (5.1) nu poate fi rezolvat decît dacă sunt cunoscute matricile de parametri $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{nx \times nx}$, $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{nx \times nu}$ $\mathbf{C}_k \in \mathbb{R}^{ny \times nx}$, $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{ny \times nv}$ şi $\mathbf{F}_k \in \mathbb{R}^{nx \times nw}$ la momentul curent $k \in \mathbb{N}$. Identificarea acestora se bazează însă pe datele achiziționate de la senzori pînă la momentul curent. Există două posibilități pentru estimarea parametrilor:

- utilizarea directă a reprezentării pe stare şi determinarea parametrilor celor 3 matrici prin *Metoda Celor Mai Mici Pătrate* (MCMMP), în variantă multi-dimensională [SCS05];
- identificarea unui model auto-regresiv multi-dimensional, de tip ARMAX (intrare-ieşire) prin *Metoda Minimizării Erorii de Predicție* (MMEP) [SCS05] şi conversia acestuia într-un model cu reprezentare pe stare.

În primul caz, există două dificultăți majore: dimensiunea mare a vectorului de parametri necunoscuți (sunt $nx(nx+nu+ny)$ parametri de determinat) şi neliniaritatea sistemului de ecuații care conduce la determinarea acestuia (deoarece matricea $\mathbf{C}_k$ înmulțeşte la stînga matricile $\mathbf{A}_k$ şi $\mathbf{B}_k$). Pentru a putea aplica MCMMP multi-dimensională, se poate forma întîi un sistem liniar cu ny ecuații şi $ny(nx+nu)$ necunoscute, urmînd ca rezultatul să fie utilizat pentru rezolvarea unui sistem neliniar format prin egalarea produselor $\mathbf{C}_k\mathbf{A}_k$ şi $\mathbf{C}_k\mathbf{B}_k$ cu matricile care tocmai au fost estimate. Acest demers este expus mai multor surse de eroare. În primul rînd, aplicarea MCMMP presupune inversarea unei matrici de dimensiune $nx^2(nx+nu)^2$, relativ mare. În plus, matricea ar putea să nu fie inversabilă, deoarece numărul de ecuații ale sistemului liniar este inferior numărului de parametri necunoscuți, astfel că pseudo-inversa nu este în mod necesar generată de o matrice monică. În al doilea rînd, rezolvarea sistemelor neliniare de la pasul următor, pe lîngă faptul că se loveşte de un număr mare de necunoscute ($nx(nx+nu+ny)$), prezintă şi dezavantajul neunicității soluției, în cazul în care aceasta există. În această succintă analiză, atributul de „mare” a fost asociat acelor cantități numerice care sunt sensibil superioare număruli de senzori, ny. Ea conduce la concluzia că determinarea directă a parametrilor reprezentării pe stare din date măsurate la ieşirea sistemului poate cel mult să fie aplicată unui sistem cu număr foarte mic de senzori (maxim 3). De aceea, această abordare a fost abandonată în favoarea celei care urmează.

În cazul adoptării unui model de identificare de tip intrare-ieşire din clasa ARMAX, problema principală o constituie conversia acestuia la reprezentarea pe stare. Vom descrie pe larg maniera de identificare şi conversie a unui model ARMAX multi-dimensional.

Pentru a putea identifica modelul intrare-ieşire din clasa ARMAX, sunt necesari doi paşi. La primul, se determină un model grosier de tip ARMA, al cărui rol este de a oferi posibilitatea estimării zgomotului exogen $\mathbf{v}$. Odată acest zgomot estimat, el va juca rol de intrare pentru procesul ecologic, avînd în vedere că datele măsurate la ieşire sunt serii de timp. Aşadar, în cadrul intrării $\mathbf{u}$ din ecuațiile (5.1), vor fi înglobate şi versiunile estimate ale zgomotelor exogene, grupate în vectorul $\hat{\mathbf{v}}$. (Reamintim că simbolul ”^” înseamnă „estimat”.) La pasul doi, se determină modelul ARMAX multi-dimensional, pe baza datelor măsurate de la senzori şi a valorilor estimate ale zgomotului exogen (cu rol de intrări).

Modelul ARMA multi-dimansional grosier se poate construi relativ simplu, considerînd că senzorii nu sunt corelați unul cu altul. Cu alte cuvinte, modelul este total decuplat, matricile sale diind diagonale. Aşa cum s-a precizat şi în secțiunea precedentă, modelul ARMA are următoarea exprimare matematică:

$$\mathrm{A}_j\left(\mathrm{q}^{-1}\right)y_j \equiv \mathrm{C}_j\left(\mathrm{q}^{-1}\right)e_j, \quad \forall\, j \in \overline{1,ny}, \tag{5.3}$$

unde A_j şi C_j sunt polinoame de forma:

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{A}_j\left(\mathrm{q}^{-1}\right) \stackrel{def}{=} 1+a_{j,1}\,\mathrm{q}^{-1}+\cdots+a_{j,na_j}\,\mathrm{q}^{-na_j} \\ \mathrm{C}_j\left(\mathrm{q}^{-1}\right) \stackrel{def}{=} 1+c_{j,1}\,\mathrm{q}^{-1}+\cdots+c_{j,nc_j}\,\mathrm{q}^{-nc_j} \end{array}\right., \tag{5.4}$$

cu na_j şi nc_j indici structurali optimali (minimali) determinaţi odată cu parametrii, prin aplicarea MMEP [SCS05]. Aşadar, funcţia de sistem grosieră asociată procesului ecologic este diagonală:

$$\mathbf{G}_0\left(\mathrm{q}^{-1}\right) = \mathrm{diag}\left[\mathrm{C}_j\left(\mathrm{q}^{-1}\right)/\mathrm{A}_j\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\right]_{j\in\overline{1,ny}}. \tag{5.5}$$

Cu alte cuvinte, modelul ARMA grosier multi-dimensional are următoare exprimare:

$$\mathbf{y} \equiv \mathbf{G}_0\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\mathbf{e}, \tag{5.6}$$

unde $\mathbf{e}\in\mathbb{R}^{ny}$ este vectorul zgomotelor albe Gaussiene de medie nulă care provoacă variaţia datelor măsurate de la senzori. De notat că MMEP oferă în plus estimaţii atît pentru dispersiile necunoscute ale zgomotelor albe ($\left\{\hat{\lambda}_{e,j}^2\right\}_{j\in\overline{1,ny}}$), cît şi pentru valorile efective ale zgomotelor albe ($\hat{\mathbf{e}}$), pînă la momentul curent. Acestea din urmă sunt, de fapt erorile de predicţie estimate, folosind modelul ARMA grosier.

După estimarea parametrilor polinoamelor (5.4) (efectuată separat, pe fiecare canal de măsură), se pot determina valorile aproximative ale zgomotelor exogene:

$$\hat{v}_j \equiv \hat{\mathrm{A}}_j\left(\mathrm{q}^{-1}\right)y_j + \left[1-\hat{\mathrm{C}}_j\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\right]\hat{e}_j, \quad \forall\, j\in\overline{1,ny}, \tag{5.7}$$

considerînd că acestea sunt zgomote colorate, obţinute prin filtrarea zgmotelor albe $\mathbf{e}$ cu ajutorul modelului ARMA multi-dimensional.

Zgomotele (5.7) sunt în continuare utilizate pe post de intrări în modelul mai rafinat, de tip ARMAX multi-dimensional, de mai jos:

$$\mathbf{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\mathbf{y} \equiv \mathbf{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\mathbf{e}, \tag{5.8}$$

în care $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{ny\times ny}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)$, $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{ny\times ny}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)$ şi $\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{ny\times ny}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)$ sunt matrici polinomiale de grade na, nb, respectiv nc.

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) \stackrel{def}{=} \mathbf{I}_{ny} + \mathbf{A}_1\,\mathrm{q}^{-1}+\cdots+\mathbf{A}_{na}\,\mathrm{q}^{-na} \\ \mathbf{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) \stackrel{def}{=} \qquad\;\; \mathbf{B}_1\,\mathrm{q}^{-1}+\cdots+\mathbf{B}_{nb}\,\mathrm{q}^{-nb} \\ \mathbf{C}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) \stackrel{def}{=} \mathbf{I}_{ny} + \mathbf{C}_1\,\mathrm{q}^{-1}+\cdots+\mathbf{C}_{nc}\,\mathrm{q}^{-nc} \end{array}\right.. \tag{5.9}$$

Coeficienţii matriciali ai polinoamelor (5.9) sunt necunoscuţi (mai puţin $\mathbf{I}_{ny}$, care este matricea unitate de ordin ny) şi trebuie determinaţi cu ajutorul datelor măsurate. La fel şi indicii structurali na, nb şi nc. Cele două funcţii de sistem asociate modelului (5.8) sunt următoarele:

$$\mathbf{H}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\mathbf{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) \text{ (utilă)} \quad \& \quad \mathbf{G}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\mathbf{C}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) \text{ (reziduală)}. \tag{5.10}$$

Spre deosebire de modelul grosier ARMA, cel rafinat, de tip ARMAX codifică şi corelaţiile existente între senzorii din reţea. Acesta este motivul principal pentru care a fost necesară rafinarea modelului ARMA. Este drept, însă, că efectuarea inversării matricii polinomiale $\mathbf{A}$ nu beneficiază de o procedură comodă din punct de vedere numeric. De asemenea, tuturor identificarea parametrilor celor 3 matrici ridică numeroase probleme de implementare. De aceea, se apelează la o abordare simplificată legată de MMEP.

În mediul de programare MATLAB, identificarea modelelor multi-dimensionale este supusă unui principiu simplificator, care ar putea fi adoptat şi în cazul modelului (5.8). Să presupunem că procesul de identificat are nu canale de intrare şi ny canale de ieşire, fiind descris de modelul ARMAX general, multi-dimensional:

$$\mathbf{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\mathbf{y} \equiv \mathbf{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\mathbf{u} + \mathbf{C}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\mathbf{e} \tag{5.11}$$

(cu $\mathbf{u}$ în loc de $\hat{\mathbf{v}}$ şi aceleaşi matrici polinomiale (5.9)). Atunci, în loc să fie determinați coeficienții matriciali ai polinoamelor (5.9) dintr-o dată, se determină, pe rînd, polinoamele unidimensionale ale cîte unui model ARMAX de forma:

$$\mathrm{A}_{i,j}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)y_j \equiv \mathrm{B}_{i,j}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)u_i + \mathrm{C}_{i,j}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)e_j, \quad \forall\, i \in \overline{1,nu}\,,\ \forall\, j \in \overline{1,ny}\,. \tag{5.12}$$

Cu alte cuvinte, se identifică doar modelul parțial al influenței pe care o are canalul de intrare din poziția i asupra canalului de ieşire din poziția j. După aceea, se pot preciza direct elementele funcțiilor de sistem (5.10), sub forma:

$$y_j \equiv \underbrace{\frac{\mathrm{B}_{i,j}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{A}_{i,j}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}}_{\mathrm{H}_{i,j}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}u_i + \underbrace{\frac{\mathrm{C}_{i,j}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{A}_{i,j}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}}_{\mathrm{G}_{i,j}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}e_j, \quad \forall\, i \in \overline{1,nu}\,,\ \forall\, j \in \overline{1,ny}\,. \tag{5.13}$$

În acest mod, este evitată inversarea matricii polinomiale $\mathbf{A}$. Prețul plătit îl constituie scăderea preciziei modelului multi-dimensional, prin faptul că nu sunt surprinse toate tipurile de corelații dintre intrări şi ieşiri, ci doar a corelațiilor de tip pereche intrare-ieşire. În cazul seriilor de timp distribuite, se poate presupune însă că o anumită ieşire este corelată mai slab cu ansambluri de cel puțin două intrări alese arbitrar. Mai mult, această corelație scade pe măsură ce ansamblul intrărilor este mai bogat, avînd în vedere că, de fapt, intrările reprezintă zgomote exogene ale procesului.

Aşadar, pentru a determina modelul ARMAX asociat procesului ecologic, plecînd de la colecția de modele ARMA independente, se va adopta principiul de mai sus, care oferă elementele celor două funcții de sistem (5.10) după ecuațiile (5.13). Evident, pentru o mai mare eficiență, MMEP poate fi implementată în variantă adaptivă. Cu alte cuvinte, la fiecare pas de predicție, parametrii curenți ai modelelor ARMA grosier şi ARMAX rafinat se pot reactualiza în funcție de noile date măsurate, în loc să fie determinați complet folosind întregul set de date achiziționate pînă atunci.

După identificarea modelului intrare ieşire asociat procesului ecologic, este necesară conversia lui într-o reprezentare pe stare de forma (5.1). Avînd în vedere că funcțiile de sistem (5.10) au fost deja estimate, este suficient să se proiecteze o procedură numerică de determinare a matricilor parametrice din (5.1) pe baza acestora. Aceasta ascunde modalitatea de a defini stările procesului ecologic. Pentru a reduce numărul de stări, este necesar ca toate elementele matricilor *raționale* (adică ale căror elemente se exprimă ca rapoarte de polinoame) să aibă acelaşi numitor.

În aceste condiții, pentru a trece la reprezentarea pe stare, se poate pleca de la tehnica introdusă în [PrMa96]. Ceea ce va fi prezentat în continuare constituie o generalizare a acestei tehnici, în cazul sistemelor liniare cu perturbații (în [PrMa96], este tratat cazul mult mai simplu al sistemelor liniare complet izolate față de perturbații). Din motive de claritate şi uşurință a înțelegerii prezentării, va fi analizat cazul uni-dimensional, adică al unui proces cu o intrare şi o ieşire. Avînd în vedere că ecuațiile (5.13) se pot trata secvențial, este evident că modelul pe stare global va fi obținut prin concatenarea tuturor reprezentărilor pe stare ale acestora. Este important ca toate funcțiile de sistem să aibă acelaşi numitor, aşa cum se va vedea în continuare. Din punct de vedere numeric este aproape imposibil ca, în urma algoritmilor numerici de estimare parametrică, să se obțină poli comuni ai funcțiilor de sistem (5.13). Însă, este posibil ca unii poli să fie suficient de apropiați (în raport cu distanța euclidiană dintre ei), astfel încît să permită egalarea lor. Majoritatea polilor vor fi însă diferiți, ceea ce va conduce la un mare număr de stări asociate procesului. În pofida acestui neajuns, matricea $\mathbf{A}_k$ rezultată are însă foarte multe elemente nule, fiind practic de tip bloc-diagonală.

5.4. Conversia unui model ARMAX într-un model de stare

Să abordăm aşadar problema conversiei unui model ARMAX uni-dimensional într-un model cu reprezentare pe stare. Se pleacă de la ecuația generică a unui astfel de model:

$$\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)y \equiv \mathrm{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)u + \mathrm{C}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)e\,, \tag{5.14}$$

unde A, B şi C sunt polinoame definite ca în (5.9), dar cu coeficienți scalari, iar e este un zgomot alb Gaussian de medie nulă. Acest model trebuie convertit într-unul de stare:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{b}u[k] + \mathbf{F}\mathbf{v}_{\mathbf{x}}[k] \\ y[k] \quad = \mathbf{c}^T\mathbf{x}[k] + \mathbf{d}^T\mathbf{v}_y[k] \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{N}\,, \tag{5.15}$$

unde:

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nx \times nx}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{nx}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{nx \times nvx}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{nx}$ şi $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{nvy}$ sunt elemente matriciale sau vectoriale care includ toți parametrii modelului de stare;
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nx}$ este vectorul stărilor;
- $u \in \mathbb{R}$ este semnalul de intrare (scalar);
- $y \in \mathbb{R}$ este semnalul de ieşire (scalar);
- $\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{nvx}$ este vectorul zgomotelor endogene, avînd dimensiunea proprie (nvx) eventual diferită de cea a vectorului stărilor;
- $\mathbf{v}_y \in \mathbb{R}^{nvy}$ este vectorul zgomotelor exogene, avînd dimensiunea proprie (nvy) eventual diferită de cea a vectorului ieşirilor.

Faptul că ambele zgomote pot avea dimensiuni diferite de mărimile de care sunt legate indisolubil (stare, respectiv ieşire) nu constituie o abatere de la exprimarea standard a modelului de stare. Se poate observa uşor că $\mathbf{w} \equiv \mathbf{F}\mathbf{v}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{nx}$ şi $v \equiv \mathbf{d}^T\mathbf{v}_y \in \mathbb{R}$. Practic, cele două zgomote se consideră formate prin contribuția unor perturbații înrudite (endogene, respectiv exogene), al căror număr nu este neapărat egal cu cel stărilor, respectiv ieşirilor.

Problema care se ridică este aceea a exprimării parametrilor modelului (5.15) cu ajutorul parametrilor modelului (5.14), folosind o procedură numerică.

Pentru a rezolva această problemă, se pleacă de la exprimarea dorită a ieşirii în modelul de stare (5.15). Se încearcă aducerea ieşirii la această formă, avînd ecuația (5.14) ca reper. Se constată uşor că această ecuație admite următoarea exprimare echivalentă:

$$y \equiv \frac{\mathrm{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}u + \frac{\mathrm{C}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}e\,, \tag{5.16}$$

care pune în evidență cele două funcții de sistem raționale ale modelului ARMAX (utilă şi reziduală). Prima operație constă în izolarea zgomotului alb exogen la acelaşi moment cu al ieşirii, astfel încît membrul din dreapta al ecuației (5.16) să se exprime prin însumarea a doi termeni (unul care depinde numai de istoria trecută a datelor şi altul care se reduce doar la prezent):

$$y \equiv \left[\frac{\mathrm{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}u + \frac{\mathrm{C}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) - \mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}e\right] + e \equiv \frac{\mathrm{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}\left[u + \frac{\mathrm{C}\left(\mathrm{q}^{-1}\right) - \mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}e\right] + e\,. \tag{5.17}$$

Analizînd primul termen, se constată că partea perturbatoare poate fi exprimată cu ajutorul unui produs scalar între un vector constant şi un vector de zgomot variabil în timp:

$$\left[\mathrm{C}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)-\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\right]\left[\frac{1}{\mathrm{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}e[n]\right]=\underbrace{\left[c_1-a_1 \quad c_2-a_2 \quad \cdots\right]}_{\mathbf{g}^T}\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{\mathrm{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}e[n-1]\\ \frac{1}{\mathrm{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}e[n-2]\\ \vdots \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_e[n]}, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \tag{5.18}$$

unde dimensiunile celor doi vectori ($\mathbf{g}$ şi $\mathbf{v}_e$) sunt egale cu $ng \overset{def}{=} \max\{na,nc\}$. Faptul că în expresia zgomotului $\mathbf{v}_e$ apare operatorul invers $1/\mathrm{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)$ nu presupune evaluarea acestuia, cu atît mai mult cu cît nu se cunosc valorile zgomotului alb. Este doar o manieră de a grupa termenii perturbatori. Dacă se doreşte totuşi estimarea acestui zgomot pe baza valorilor estimate ale zgomotului alb, atunci evaluarea elementelor sale se poate realiza evitînd împărţirea infinită, printr-un calcul recursiv:

$$\hat{v}_{e,i}[n]=\frac{1}{b_1}\left[\hat{e}[n-i+1]-b_2\hat{v}_{e,i}[n-1]-\cdots b_{nb}\hat{v}_{e,i}[n-nb+1]\right], \quad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall i\in\overline{1,ng}, \tag{5.19}$$

cu condiţia ca $b_1\neq 0$, plecînd de la o anumită iniţializare (de exemplu, cea neutră, cu valori nule). (Dacă $b_1=0$, se ia în considerare primul coeficient al polinomului B diferit de zero şi se adaptează relaţia recursivă (5.19) plin aplicarea întîrzierii corespunzătoare acelui coeficient.)

Revenind la exprimarea (5.17), ea pune în evidenţă următorul nucleu de tip funcţie de sistem raţională:

$$\mathrm{H}_0\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\overset{def}{=}\frac{\mathrm{B}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}, \tag{5.20}$$

în raport cu care ieşirea are următoarea formă compactă:

$$y\equiv \mathrm{H}_0\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\left[u+\mathbf{g}^T\mathbf{v}_e\right]+e. \tag{5.21}$$

Nucleul H_0 are expresia de mai jos:

$$\mathrm{H}_0\left(\mathrm{q}^{-1}\right)=\frac{b_1\mathrm{q}^{-1}+b_2\mathrm{q}^{-2}+\cdots+b_{nb}\mathrm{q}^{-nb}}{1+a_1\mathrm{q}^{-1}+a_2\mathrm{q}^{-2}+\cdots+a_{na}\mathrm{q}^{-na}}=\mathrm{q}^{na-nb}\frac{b_1\mathrm{q}^{nb-1}+b_2\mathrm{q}^{nb-2}+\cdots+b_{nb}}{\mathrm{q}^{na}+a_1\mathrm{q}^{na-1}+a_2\mathrm{q}^{na-2}+\cdots+a_{na}}. \tag{5.22}$$

Ultimul termen din (5.22) permite aplicarea *Teoremei Împărţirii cu Rest* (TIR) pentru polinoame:

$$\mathrm{H}_0\left(\mathrm{q}^{-1}\right)=\mathrm{q}^{na-nb}\left[\mathrm{Q}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)+\frac{\mathrm{R}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}{\mathrm{q}^{na}\mathrm{A}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)}\right], \tag{5.23}$$

unde:

$$\mathrm{Q}\left(\mathrm{q}^{-1}\right)\overset{def}{=}\alpha_1\mathrm{q}^{nb-na-1}+\alpha_2\mathrm{q}^{nb-na-2}+\cdots+\alpha_{nb-na}, \tag{5.24}$$

este cîtul, iar: