

ESCUELA PREPARATORIA "OCOZOCOAUTLA"

Materia:

Matemáticas I

Unidad temática I.-

Lógica Matemática

Catedrático:

I.S.C. Iván de J. Moscoso Navarro

Palabras clave:

Lógica matemática, proposición, tautología, contradicción, operadores lógicos, unión, intersección, complementación, proposición condicional, proposición bicondicional, teoremas, hipótesis, demostración formal.

***Tautología, repetición de una misma idea o pensamiento en formas diferentes, que no añade nada al conocimiento y lo único que expresa es una identidad vacía. Es decir, una tautología no aporta ninguna información, no dice nada. Es una explicación o definición aparente que emplea términos diferentes para decir lo mismo.

Introducción.

Aprender matemáticas, física y química "es muy difícil"; así se expresan la mayoría de estudiantes de todos los niveles, sin embargo pocas veces se busca una explicación del porqué no aprenden las ciencias exactas los alumnos. Nuestra teoría es la siguiente: "Los alumnos no aprenden ciencias exactas, porque no saben relacionar los conocimientos que se proporcionan en la escuela (leyes, teoremas, formulas) con los problemas que se le presentan en la vida real". Otro problema grave es que el aprendizaje no es significativo. El presente trabajo pretende motivar a los estudiantes para que con ayuda de la "lógica matemática", él sea capaz de encontrar estos relacionamientos entre los diferentes esquemas de aprendizaje, para que de esta manera tenga una buena estructura cognitiva. Consideramos que si el alumno sabe lógica matemática puede relacionar estos conocimientos, con los de otras áreas para de esta manera crear conocimiento.

La lógica estudia la forma del razonamiento, es una disciplina que por medio de reglas y técnicas determina si un argumento es válido. La lógica es ampliamente aplicada en la filosofía, matemáticas, computación, física. En la filosofía para determinar si un razonamiento es válido o no, ya que una frase puede tener diferentes interpretaciones, sin embargo la lógica permite saber el significado correcto. En las matemáticas para demostrar teoremas e inferir resultados matemáticas que puedan ser aplicados en investigaciones. En la computación para revisar programas. En general la lógica se aplica en la tarea diaria, ya que cualquier trabajo que se realiza tiene un procedimiento lógico, por el ejemplo; para ir de compras al supermercado una ama de casa tiene que realizar cierto procedimiento lógico que permita realizar dicha tarea. Si una persona desea pintar una pared, este trabajo tiene un

procedimiento lógico, ya que no puede pintar si antes no prepara la pintura, o no debe pintar la parte baja de la pared si antes no pintó la parte alta porque se mancharía lo que ya tiene pintado, también dependiendo si es zurdo o derecho, él puede pintar de izquierda a derecha o de derecha a izquierda según el caso, todo esto es la aplicación de la lógica.

La lógica es pues muy importante; ya que permite resolver incluso problemas a los que nunca se ha enfrentado el ser humano utilizando solamente su inteligencia y apoyándose de algunos conocimientos acumulados, se pueden obtener nuevos inventos innovaciones a los ya existentes o simplemente utilización de los mismos.

El orden en que se presenta el documento es el siguiente: Primeramente se establece la importancia de la lógica matemática, después definimos el concepto de proposición. Se establece el significado y utilidad de conectivos lógicos para formar proposiciones compuestas. Más tarde abordamos las proposiciones condicionales y bicondicionales. Definimos tautología, contradicción y contingente, y proporcionamos una lista de las tautologías más importantes, así mismo explicamos a que se le llama proposiciones lógicamente equivalente apoyándonos de tablas de verdad. Para finalizar; abordamos los métodos de demostración: directo y por contradicción, en donde incluye reglas de inferencia.

En este trabajo se trata además de presentar las explicaciones con ejemplos que le sean familiares. Nuestro objetivo es que el alumno aprenda a realizar demostraciones formales por el método directo y el método por contradicción. Ya que la mayoría de los libros comerciales únicamente se quedan en explicación y demostración de reglas de inferencia. Consideramos que sí el alumno aprende lógica matemática no tendrá problemas para aprender ciencias exacta y será capaz de programar computadoras, ya que un programa de computadora no es otra cosa que una secuencia de pasos lógicos, que la persona establece para resolver n problema determinado.

Es importante mencionar que en las demostraciones no hay un solo camino para llegar al resultado. El camino puede ser mas largo o más corto dependiendo de las reglas de inferencia y tautologías que el alumno seleccione, pero definitivamente deberá llegar al resultado. Puede haber tantas soluciones como alumnos se tenga en clase y todas estar bien. Esto permite que el estudiante tenga confianza en la aplicación de reglas y fórmulas. De tal manera que cuando llegue a poner en practica esto, el sea capaz de inventar su propia solución, porque en la vida cada quien resuelve sus problemas aplicando las reglas de inferencia para relacionar los conocimientos y obtener el resultado.

Desarrollo.

La lógica matemática es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. En un nivel elemental, la lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no valido un argumento dado. El razonamiento lógico se emplea en matemáticas para demostrar teoremas; en ciencias de la computación para verificar si son o no correctos los programas; en las ciencias física y naturales, para sacar conclusiones de experimentos; y en las ciencias sociales y en la vida cotidiana, para resolver una multitud de problemas. Ciertamente se usa en forma constante el razonamiento lógico para realizar cualquier actividad.

Proposiciones y operaciones lógicas.

Una proposición o enunciado es una oración que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

A continuación se tienen algunos ejemplos de proposiciones válidas y no válidas, y se explica el porqué algunos enunciados no son proposiciones. Las proposiciones se indican por medio de una letra minúscula, dos puntos y la proposición propiamente dicha. Ejemplo.

p: La tierra es plana.

q: $-17 + 38 = 21$

r: $x > y-9$

s: El Morelia será campeón en la presente temporada de Fut-Bol.

t: Hola ¿como estas?

w: Lava el coche por favor.

Los incisos p y q sabemos que pueden tomar un valor de falso o verdadero; por lo tanto son proposiciones validas. El inciso r también es una proposición valida, aunque el valor de falso o verdadero depende del valor asignado a las variables x y y en determinado momento. La proposición del inciso s también esta perfectamente expresada aunque para decir si es falsa o verdadera se tendría que esperar a que terminara la temporada de fut-boll. Sin embargo los enunciados t y w no son válidos, ya que no pueden tomar un valor de falso o verdadero, uno de ellos es un saludo y el otro es una orden.

Conectivos lógicos y proposiciones compuestas.

Existen conectores u operadores lógicas que permiten formar proposiciones compuestas (formadas por varias proposiciones). Los operadores o conectores básicos son:

CONJUNCIÓN

Operador and (y)

Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Si símbolo es: $\{ \wedge, \text{un punto } (.), \text{un paréntesis} \}$. Se le conoce como la multiplicación lógica:

Ejemplo.

Sea el siguiente enunciado "El coche enciende cuando tiene gasolina en el tanque y tiene corriente la batería"

Sean:

p: El coche enciende.

q: Tiene gasolina el tanque.

r: Tiene corriente la batería.

De tal manera que la representación del enunciado anterior usando simbología lógica es como sigue:

$$p = q \wedge r$$

Su tabla de verdad es como sigue:

q	r	$p = q \wedge r$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Donde.

1 = verdadero

0 = falso

En la tabla anterior el valor de $q = 1$ significa que el tanque tiene gasolina, $r = 1$ significa que la batería tiene corriente y $p = q \wedge r = 1$ significa que el coche puede encender. Se puede notar que si q o r valen cero implica que el auto no tiene gasolina y que por lo tanto no puede encender.

DISYUNCIÓN

Operador Or (o)

Con este operador se obtiene un resultado verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera. Se indica por medio de los siguientes símbolos: $\{ \vee, + \}$. Se conoce como las suma lógica. Ejemplo.

Sea el siguiente enunciado "Una persona puede entrar al cine si compra su boleto u obtiene un pase".
Donde.

p: Entra al cine.

q: Compra su boleto.

r: Obtiene un pase.

q	r	$p = q \vee r$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

NEGACIÓN

Operador Not (no)

Su función es negar la proposición. Esto significa que si alguna proposición es verdadera y se le aplica el operador not se obtendrá su complemento o negación (falso). Este operador se indica por medio de los siguientes símbolos: { ' , - }. Ejemplo.

p	p'
1	0
0	1

En este momento ya se pueden representar con notación lógica enunciados más complejos. Ejemplo

Sean las proposiciones:

p: Hoy es domingo.

q: Tengo que estudiar teorías del aprendizaje.

r: Aprobaré el curso.

El enunciado: "Hoy es domingo y tengo que estudiar teorías de aprendizaje o no aprobaré el curso". Se puede representar simbólicamente de la siguiente manera:

$$(p \wedge q) \vee r'$$

Por otro lado con ayuda de estos operadores básicos se pueden formar los operadores compuestos Nand (combinación de los operadores Not y And), Nor (combina operadores Not y Or) y Xnor (resultado de Xor y Not).

Proposiciones condicionales.

Una proposición condicional, es aquella que está formada por dos proposiciones simples (o compuesta) p y q . La cual se indica de la siguiente manera:

$$p \rightarrow q \text{ Se lee "Si } p \text{ entonces } q"$$

Ejemplo.

El candidato del PRI dice "Si salgo electo presidente de la República recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año". Una declaración como esta se conoce como condicional. Su tabla de verdad es la siguiente:

Sean

p : Salió electo Presidente de la República.

q : Recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año.

De tal manera que el enunciado se puede expresar de las siguiente manera.

$$p \rightarrow q$$

Su tabla de verdad queda de la siguiente manera:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente:

Considere que se desea analizar si el candidato presidencial mintió con la afirmación del enunciado anterior. Cuando $p=1$; significa que salió electo, $q=1$ y recibieron un aumento de 50% en su sueldo, por lo tanto $p \rightarrow q = 1$; significa que el candidato dijo la verdad en su campaña. Cuando $p=1$ y $q=0$ significa que $p \rightarrow q = 0$; el candidato mintió, ya que salió electo y no se incrementaron los salarios. Cuando $p=0$ y $q=1$ significa que aunque no salió electo hubo un aumento del 50% en su salario, que posiblemente fue ajeno al candidato presidencial y por lo tanto; tampoco mintió de tal forma que

$$p \rightarrow q = 1.$$

Proposición bicondicional.

Sean p y q dos proposiciones entonces se puede indicar la proposición bicondicional de la siguiente manera:

$$p \leftrightarrow q \text{ Se lee "p si solo si q"}$$

Esto significa que p es verdadera si y solo si q es también verdadera. O bien p es falsa si y solo si q también lo es. Ejemplo; el enunciado siguiente es una proposición bicondicional

"Es buen estudiante, si y solo si; tiene promedio de diez"

Donde:

p : Es buen estudiante.

q : Tiene promedio de diez.

por lo tanto su tabla de verdad es.

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

A partir de este momento, ya se está en condiciones de representar cualquier enunciado con conectores lógicos.

Ejemplo.

Sea el siguiente enunciado "Si no pago la luz, entonces me cortarán la corriente eléctrica. Y Si pago la luz, entonces me quedará sin dinero o pediré prestado. Y Si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la deuda, si solo si soy desorganizado"

Donde:

p : Pago la luz.

q : Me cortarán la corriente eléctrica.

r : Me quedará sin dinero.

s : Pediré prestado.

t: Pagar la deuda.

w: soy desorganizado.

$$(p' \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \wedge s) \rightarrow t'] \leftrightarrow w$$

Tablas de verdad.

En estos momentos ya se está en condiciones de elaborar cualquier tabla de verdad. A continuación se presenta un ejemplo para la proposición $[(p \rightarrow q) \vee (q' \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$.

p	q	r	q'	$p \rightarrow q$	$(q' \wedge r)$	$(p \rightarrow q) \vee (q' \wedge r)$	$r \rightarrow q$	$[(p \rightarrow q) \vee (q' \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1

El número de líneas de la tabla de verdad depende del número de variables de la expresión y se puede calcular por medio de la siguiente formula.

$$\text{No de líneas} = 2^n \text{ Donde } n = \text{número de variables distintas.}$$

Tautología y contradicción.

Tautología, es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Un ejemplo típico es la contrapositiva cuya tabla de verdad se indica a continuación.

p	q	p'	q'	$p \oplus q$	$q' \oplus p'$	$(p \oplus q) \leftrightarrow (q' \oplus p')$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Note que en las tautologías para todos los valores de verdad el resultado de la proposición es siempre 1. Las tautologías son muy importantes en lógica matemática ya que se consideran leyes en las cuales nos podemos apoyar para realizar demostraciones.

Bibliografía.

Libro	Autor	Editorial
Estructuras de Matemáticas Discretas	Bernard Kolman, Robert C. Bisby, Sharon Ross	Prentice Hall
Elements of Discrete Mathematics	C.L.Liu	Mc graw Hill
Matemáticas Discreta y Combinatoria	Ralph P. Grimaldi	Addiso Wesley
Matemáticas Discretas con aplicación a las ciencias de la computación	Jean Paul Tremblay, Ram Manohar	CECSA
Matemáticas Discretas	Kenneth A. Ross, Charles R.B. Wright	Prentice Hall
Matemática Discreta y Lógica	Winfried Karl, Jean Paul Tremblay	Prentice Hall
Matemáticas Discretas	Richard Johnsonbaugh	Gpo. Editorial Iberoamerica