Topología

producto escalar: $< ax, y >= a < x, y >$

$< x, x > \geq 0$

desigualdad Cauchy-Swarz:

$$< x, y >^2 \leq < x, x >< y, y >$$

vectores ortogonales sii: $< x, y >= 0$

conjunto ortogoanl: si ortogonales dos a dos

ortonormal: ortogonales y módulo = 1

'n' vectores ortogonales forman una base de $\mathbb{R}^n$

Norma

$$||x|| = < x, x >^{\frac{1}{2}}, | < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y||$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

$$a \cdot b = ab \cos \alpha$$

$$||x - y|| = ||x||^2 + ||y||^2 - 2||x||||y|| \cos \alpha$$

Producto vectorial

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u1 & u2 & u3 \\ v1 & v2 & v3 \end{vmatrix}$$

$$< u \times v, u >= 0$$

$$< u \times v, v >= 0$$

$$u \times v = -v \times u$$

Triple producto

$$x \cdot (y \times z) = \begin{vmatrix} x1 & x2 & x3 \\ y1 & y2 & y3 \\ z1 & z2 & z3 \end{vmatrix} = \text{volumen}$$

Nociones

esfera $d(x, p) = r,\ S_r(p)$

bola abierta $d(x, p) < r,\ B_r(p)$

bola cerrada $d(x, p) \leq r,\ \overline{B}_r(p)$

bola reducida $\{d(x, p) < r - p\}$

conjunto acotado: $\exists B_r$ que lo contien

P interior $\exists B_r(p) \cap Ac,\ \text{int A} = \mathring{A}$

P exterior $\exists B_r(p) \cap Ac = \emptyset$

P frontera $\forall B_r(p) \cap A$ c int c ex

Acumulación: $\forall \overline{B}_r(p) \cap Ac\ int\ A$

Conjunto

$$P \in ExtA \Rightarrow P_{\text{no acumulación}}$$

$$P \in intA \Rightarrow P_{\text{acumulación}}$$

$$P \in FrA \Rightarrow ¿?_{\text{acumulación}}$$

$$P \in FrA \Rightarrow P_{frontera}$$

$$\mathbb{R}^n = \mathring{A} + extA + FrA$$

$$FrA = Fr(\mathbb{R}^n - A) : IntA = ext(A - \mathbb{R}^n)$$

$$\cup_{abiertos} \Rightarrow Abierto : \cap_{cerrados} \Rightarrow Cerrado$$

$$\cap_{\text{finita abiertos}} \Rightarrow Abierto : \cup$$

Sucesiones

$$\lim_{n \to \infty} \{X^n\} = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_o > 0 | \forall n > n_o \Rightarrow ||X^n - L|| < \varepsilon$$

$$\text{si } \{X^n\} \to L \Rightarrow ||\{X^n\}|| \to ||L$$

Funciones de varias variables

$$f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

$$\lim f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < ||X - A|| < \delta$$

$$: \Rightarrow ||f(x) - b|| < \varepsilon$$

$$f(x, y) = cte \Rightarrow \text{curva de nivel}$$

$$f(x, y, z) = cte \Rightarrow \text{superficie de nivel}$$

Límites

Límites iterados

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y) = L_1 \qquad i) L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \text{ límite}$$

$$\lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y) = L_2 \qquad ii) L_1 = L_2 \Rightarrow ?, \text{pero}$$

si existe vale L

Límites direccionales

i) Si por diferentes caminos vale diferente
No existe

ii) $\lim(f, mx) = \Psi(m) \Rightarrow \nexists$ límit

Cambio a polares

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = \lim_{r \to 0} f(rcos\alpha + a, rsin\alpha + b)$$

Composición $\frac{\sin xy}{xy} = \frac{\sin t}{t} = 1$

Continuidad de funciones

$$f \text{ cont en 'a'} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ está definida en 'a'} \\ \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

Si f suma de exp, poli, trigo, log, hipo: cont excepto donde se anule el denominador.

teorema de Weirstrass: f cont en S, y S compacto, existen max y mins absolutos.

Superficies

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ elipse

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=k$ hiperboloide

k=0 cono

k=1 una hoja

k=-1 dos hojas

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ paraboloide elíptico

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ paraboloide hiperbólico (silla de montar)

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ cilindro elíptico

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ cilindro hiperbólico

$y^2=2px$ cilindro parabólico

Cálculo diferencial

Derivadas

Definición de derivada

$$D_v f_{(a,b)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv_1,b+tv_2)-f(a,b)}{t}=\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}$$

diferencial

$$\partial f=\frac{\partial f}{\partial x}\partial x+\frac{\partial f}{\partial y}\partial y+\frac{\partial f}{\partial y}\partial y$$

$$:\ \partial(\lambda f)=\lambda\partial f:\ \partial\frac{f}{g}=\frac{g\partial f-f\partial g}{g^2}$$

$$:\ \partial(fg)=f\partial g+g\partial f$$

Matriz jacobiana

$$f\subset\ ‘^n\to\ ‘^m$$

$$J_a f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

Condición de tangencia

$$\lim_{\vec{h}\to 0}\frac{f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})-J_{\vec{a}}f\cdot h}{\|h\|}=0$$

Estudio de la diferenciabilidad en ‘a’

$$f\text{ cont}\Rightarrow\begin{cases}\times:\text{No }Diff\\ \surd:\exists\frac{\partial f}{\partial x_i}\forall i\begin{cases}\times:\text{No }Diff\\ \surd:\text{¿son cont?}\ \begin{matrix}\surd: Diff\\ \times:\text{c.tang}\end{matrix}\end{cases}\end{cases}$$

...en un test

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{Polinomio}{(x^2+y^2)^m}\\ 0,(x,y)=0\end{cases}\ \frac{G=gradN-gradD}{\begin{matrix}G>0\ \Rightarrow\text{cont}\\ G\geq 1\ \Rightarrow\exists\text{parciales}\\ G>1\Rightarrow\text{Diff}\end{matrix}}$$

que la derivada direccional exista para cualquier dirección no implica que la función sea Diff.

Observaciones

$:\ si\exists$

$:\ La\exists$de parciales no implica nada sobre f

$:\ si\exists$

aproximación lineal: $f(\vec{a}+\vec{h})=f(\vec{a})+J_{\vec{a}}f\ \vec{h}$

hiperplano tangente: $z=f(a,b)+J_{(a,b)}f\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\end{pmatrix}$

Regla de la cadena

$$:\ f(x(u,v,s),y(u,v,W(s,r))$$

$$:\ f_s=f_x\cdot X_s+f_y\cdot Y_w\cdot W_s$$

$$J_{x_0}(f\circ g)=J_{g(x_o)}f\cdot J_{x_o}g$$

$$D_{x_0}(f\circ g)=D_{g(x_o)}f\circ D_{x_o}g$$

Derivadas Sucesivas

$$f\subset\ ‘^n\to\ ‘$$

$$H_a f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n\partial x_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n\partial x_n}\end{pmatrix}$$

Si existen las derivadas cruzadas en un entorno de ‘a’ y son continuas entonces son iguales. (fxy=fyx)

$$\nabla^2=\Sigma f_{x_i x_i}=0\Leftarrow si\text{ f harmónic}$$

Teorema de la función inversa

$$f\ :\ A\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$si\ \begin{matrix} f\subset C^1 en\ A \\ \det J_a f\neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \exists_{\text{conjunto abierto donde}} \Rightarrow \exists f^{-1}$$

$$\Rightarrow J_{x_o} f^{-1} = (J_{x_o} f)^{-1}$$

Teorema de la función implícita

$$: f : A\subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$$

$$: si\ \begin{matrix} f(p)=0 \\ f\in C^1 \\ \text{en } J_p f \ \exists_{\text{ menor cuadrado=B det}\neq 0} \end{matrix} \Rightarrow$$

podemos expresar m variables (del menor no nulo) en función de las N restantes , es una función de n variables.

Las m funciones son de clase c1 en A.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+1}} & \cdot & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+m}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$J_a F = B^{-1} A$$

Aplicaciones geométricas

Curvas

forma explicita $y=f(x)$

forma implicita $F(x,y)=0$

forma paramétrica $f(t)=(f_1(t),f_2(t))$

elipse en x,y:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$$

Curvas según geometría

- continua: si f es cont
- diferenciable sii f es diff en I
- regular f c C1 y el vector tangente no se anula
- regular a trozos

Curvas según analítica

- simple No se corta a ellla misma - inyectiva
- plana Imagen es R2.
- conexa Tiene una sola rama - continua
- cerrada cont y f(inicial)=f(final)
- de Jordan cerrada, simple

Trayectorias tangentes

Puesto que hay infinitas parametrizaciones obtengo vectores diferentes pero de igual dirección y la recta tangente y el plano normal siguen siendo los mismos.

$$L_{\text{recta tangente}} = r(t_o) + \lambda r'(t_o)$$

$$Ec_{\text{plano normal}} \ :< \vec{x} - r(t_o), r'(t_o)$$

Gradiente y derivada direccional

$$\nabla f = (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}) \text{ Dirección de máximo crecimiento}$$

$$z=f(x,y), \nabla f \text{ es } \perp \text{ a curva de nivel, no superficie}$$

$$F(x,y,z)=0,\ \nabla f \text{ es } \perp \text{ a la sup de nivel 0}$$

derivada direccional

$$D_v f(a) = \frac{\partial f}{\partial \hat{u}} =< \nabla f_{(a)}, \hat{u} >$$

$$D_v f_{máx} = \|\nabla f_{(a)}\| : D_v f_{mín} = -\|\nabla f_{(a)}\|$$

$$D_v f = 0, \theta = 90^o$$

otras aplicaciones:

i) comprobar que dos curvas de nivel son tangentes en un punto: $\nabla f_1 = \lambda \nabla f_2$

ii) comprobar que dos curvas se cortan perpendicularmente $< \nabla f_1, \nabla f_2 >= 0$

iii) comprobar que dos curvas son equivalentes. $\alpha(u) = \beta(v(u))$

Superficies

forma explicita $y=f(x,y)$

forma implicita $F(x,y,z)=0$

forma paramétrica $(u,v) \to (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

¿Cómo parametrizar una superficie?

i) $z=f(x,y)$, S(x,y,f(x,y))

ii) implícita, explícita: aplicar teorema función implícita

Ejemplos de superficies parametrizadas

Esférica

$$x_{(u,v)} = R\sin u\cos v : y_{(u,v)} = R\sin u \sin v$$

$$Z_{(u,v)} = R\cos u$$

Cilíndrica $x_{(u,v)} = R\cos v : y_{(u,v)} = R\sin v$

$$Z_{(u,v)} = z$$

Producto vectorial fundamental

$$(u,v)\to(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

$$T_u=(X_u,Y_u,Z_u):T_v=(X_v,Y_v,Z_v)$$

si son tangentes a las superficie y son LI

$$PVF(S)=T_u\times T_v, \perp \text{a la superficie}$$

superficies es regular en (x,y) sii
Tx,Ty son cont: la applicaciones que define la sup es C1
PFV(S) es diferente de cero

Vector normal a una superficie
...según cómo este representada la superficie...

i) explícita

$$z=f(x,y)$$

$$PVF=\pm(-F_x,-F_y,1)$$

ii) implícita

$$F(x,y,z)=0$$

$$PVF=\nabla F=(F_x,F_y,F_z)$$

iii) paramétrica

$$S(u,v)\to(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

$$T_u=(X_u,Y_u,Z_u):T_v=(X_v,Y_v,Z_v)$$

$$PVF(S)=T_u\times T_v$$

Ecuación del plano tangente

i) explícita $<(-\nabla f,1),x-a>=0$

ii) implícita $<\nabla F,x-a>$

iii) paramétrica $<PVF(S),X-S(a)>$

Estudio local de funciones

Taylor

$$H_{\mathbb{R}^3}f=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} & f_{zx}\\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy}\\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz}\end{pmatrix}\quad H_{\mathbb{R}^2}f=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}$$

$$f(x,y)=f(a)+J_af(x-a)+\frac{(x-a)}{2}H_af+R_k(f,a)$$

$$R_k=\frac{1}{(k+1)!}\sum\frac{\partial^{k+1}f}{\partial x_{1i..}}(x-a)^{k+1}$$

$$\bigstar grad(x^2y^3)=5,\ \ln a\cdot e^x=a^x$$

Extremos relativos

$$\nabla f(x_o)=0\Leftrightarrow X_o \text{es punto crítico} \quad \begin{matrix}\textit{extremo}\\ \text{degenerado}\end{matrix}$$

Criterio de Sylvester

$$A=H_af,\begin{pmatrix} A_1 & | & |\\ - & A_2 & |\\ - & - & A_n\end{pmatrix}:\begin{cases} A_i>0\forall i\Leftrightarrow \text{mín}\\ (-1)^iA_i>0\forall i\Leftrightarrow \text{máx}\\ A_n\neq 0\Leftrightarrow_{p.silla}\\ A_n=0\Leftrightarrow_{p.\text{degenerado}}\end{cases}$$

Criterio de Sylvester para 2 variables
i) Si A2=0: ? Degenerado
ii) Si A2<0: Punto de silla
iii) Si A2>0:
A1>0 mínimo
A1=0 ? Degenerado
A1<0 máximo

Criterio de Sylvester para 3 variables
i) A1>0,A2>0,A3>0: mínimo
ii) A1<0,A2>0,A3<0: máximo
Puntos degenerados: me muevo en pequeños incrementos.

Extremos condicionados

Método directo:

Introduzco las condiciones de ligaduras.
Si (Xmáx y Ymín) o (Xmín o Ymáx) o (Xinfles) o (Yinflex)
=> punto de silla
else
ambos Max o Min: no podemos seguir.

Multiplicadores de Lagrange
si

$$f:A\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, a\in A, g_{1..k}$$

$$i: f,g_{1..k} \text{ son diff en 'a'}$$

$$ii:\nabla g_{1..k}\neq 0, \text{ y L.I.}$$

entonces

$$F(x_1,....,x_n,\lambda_1,...\lambda_k)=f(x)-\lambda_1g_1-..-\lambda g_k$$

$$\nabla F=0 \quad \text{si } f \text{ tiene extremos condicionados a ligaduras}$$

Extremos absolutos

i) Hallar puntos críticos
ii) Hallar Max y Min de la región condicionada a cada una de las curvas/sup. que definen Fr A.
iii) Hallar donde cortan las curvas/superficies.
iv) Considero los puntos donde no es diferenciable.
v) Evalúo los puntos y ordeno.

$$r_{(t)} = (X_{(t)}, Y_{(t)}, Z_{(t)}) : R_{(u,v)} = (X_{(u,v)}, Y_{(u,v)}, Z_{(u,v)})$$

integral de línea

$$\int_C \overrightarrow{f}\, dl = \int_a^b < \overrightarrow{f}(r(t)), r'(t) > dt$$

integral de superficie

$$\iint_S \overrightarrow{f}\, ds = \iint < \overrightarrow{f}(R_{(u,v)}, PVF(R) > dudv$$

Trigonometría en integrales

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 x dx = \frac{3}{4}\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x dx = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x dx = \frac{4}{3}$$

(Notas)

Integrales impropias

$$\lim_{n\to\infty} \iint f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^n f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

Teorema de fubini en polares

$$r_1(\theta) \le r \le r_1(\theta) : \alpha \le \theta \le \beta$$

$$A = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr$$

Operaciones con vectores

Producto escalar

$$v \cdot v = \|v^2\|$$

$$0 \cdot v = 0$$

$$v \cdot w = v \cdot w$$

$$c(v \cdot w) = (cv) \cdot w = v \cdot (cw)$$

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\,\|w\|}$$

$$u \cdot v = 0 \text{ si son } \perp$$

Producto vectorial

$$(sv) \times (tw) = st(v \times w)$$

$$u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$$

$$(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$$

$$v \times w = -w \times v$$

$$v \times v = 0 : \text{si } w = sv \Rightarrow v \times w = 0$$

$$v \times 0 = 0$$

$$\|v \times w\| = \|v\|\,\|w\| \sin\theta$$

$$v \times w = 0 \text{ si son } \parallel$$