Combinatoria

Conjuntos

cumplen las propiedades ASOCIATIVA, CONMUTATIVA y DISTRIBUTIVA

$A \cap B$: intersección $\quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cap \Omega = A$

$A \cup B$: unión $\quad A \cup \emptyset = A \quad A \cup \Omega = \Omega$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad \overline{A} = \{x | \; x \notin A\}$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Selecciones

Nociones: $0! = 1, \; n! = \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n$

Ordenado: 1,2 diferente de 2,1 No Ordenado: 1,2 = 2,1

Permutaciones: $P_n = n! = V_n^n \qquad PR_n^{\overbrace{n_1, n_2, \ldots n_m}^{n_1+n_2+..+n_m=n}} = \frac{n!}{n_1! \cdot .. \cdot n_m!}$

 # de maneras de ordenar n objetos.

Combinaciones: $C_m^n = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \qquad CR_m^n = C_{m+n-1}^n$

de maneras de escoger n objetos no ordenados de un total de m.

Variaciones: $V_m^n = P_n C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} \qquad VR_m^n = m^n = mVR_m^{n-1}$

 # maneres de escoger n objetos ordenados de un total de m.

$P_{(a,b,c)} = |\{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}| = 6$

$PR_3^{2,1} = |\{aab, aba, baa\}| = 3$

$V_{\{a,b,c\}}^2 = |\{ab, ac, ba, bc, ca, cb\}| = 6$

$VR_{\{a,b,c\}}^2 = |\{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}| = 9$

$C_{\{a,b,c\}}^2 = |\{ab, ac, bc\}| = 3$

$CR_{\{a,b,c\}}^2 = |\{aa, ab, ac, cc, bb, bc\}| = 6$

Probabilidad

Espacio de probabilidad $P : F \longrightarrow$ ‘

$P(\Omega) = 1$

$P(\emptyset) = 0$

$P(A) \geq 0 \forall a \in F$

$si\ A, B \in F$ i $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$P(A) \leq 1 \forall a \in F$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Acontecimientos independientes

A,B son independientes sii $P(A \cap B) = P(A)P(B$

Probabilidad condicionada

la probabilidad de A condicionando que B se haya verificado.

$$P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teorema de Bayes

$\{A_1, .., A_n\}$ =partición de Ω, $\biguplus A_k = \Omega, \; A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k)}_{P(B)}}$$

Teorema de la Probabilidad Total

$\{A_1, .., A_n\}$ =partición de Ω, $\biguplus A_k = \Omega, \; A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k)$

si $\Omega = \{A, \overline{A}\} \Rightarrow P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$

Frecuencia relativa

$\lim_{n\to\infty} = \frac{n_a}{n} = P_A$

Àlgebra de acontecimientos

$F \neq \emptyset$

$si\ A \in F \Rightarrow A \in F$

$si\ A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F, A \cup B \in F$

$0, \Omega \in F$

Variable Aleatoria

Definición

·Dado (Ω, F), espacio probabilizable, $X:\Omega\to$ ‘ és medible si les antiimágenes de acontecimientos son acontecimientos.

·Una **variable aleatoria** es una aplicación $X:\Omega\to$ ‘ medible. Consiste en asignar valores reales a los resultados de un experimento.

Función distribución

$$F_X(x)=P(X\le x),\ 1-F_{X(x)}=P(X>x)$$

$$P(a<X\le B)=F_X(b)-F_X(a)$$

propiedades:

$$0\le F_X(x)\le 1 \qquad \lim_{x\to-\infty}F_X(x)=0$$

$$\frac{\delta}{\delta x}F_X(x)\ge 0 \qquad \lim_{x\to\infty}F_X(x)=1$$

Es una función continua por la derecha.
Las discontinuidades indican el carácter discreto.

v.a. Discretas

$$F_X(x)=\sum_k (P_K\cdot u(x-x_k)) \qquad P_X(x_k)=F_X(x_k)-F_X(x_{k-1})$$

Bernouilli: $\Omega=\{0,1\}, P_X(1)=p, P_X(0)=q=1-p$

"1:A se verifica, 0:A no se verifica": p(A)=p

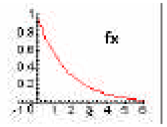
Binomial: $\Omega=\{0,1,..,n\},\ P_X(k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=P(x=k)$

Repetimos n veces un experimento de Bernouilli.
X es el # de "1" que obtenemos.

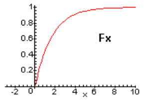
Geométrica:

$\Omega=\{1,2,....,n\},\ P_X(n)=q^{n-1}p, F_X(x)=1-q^n$

X es el # de veces que hemos hecho el experimento hasta que obtenemos un "1".



Hipergeométrica: $\Omega=\{0,1,...,n\}, P_X(k$



Una urna con b bolas blancas y N-b bol
Sacamos n. X es el # de bolas blancas q

Poisson:

$$\Omega=\{0,1,2...\}, P_X(k)=e^{-a}\frac{a^k}{k!}$$

$$P_X(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\overset{n\uparrow\uparrow}{\simeq}e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^k}{k!}, p=\frac{\lambda T}{n}$$

X es el # de veces que se produce un acontecimiento en un intérvalo p. Cuando n es grande se produce esta relación entre la biomial y Poisson.

Función densidad

$$f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)_{\text{por la derecha}}$$

$$f_X\ge 0$$

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f_X(x)dx$$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(\tau)d\tau$$

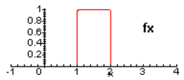
$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx$$

v.a. Continuas

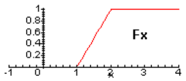
$$\Omega=[a,b]$$

Uniforme:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, x\le a\\ \frac{x-a}{b-a}, a\le x\le b\\ 1, x\ge b\end{cases}$$



$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, a\le x\le b\\ 0, else\end{cases}$$



Exponencial:

$$\Omega=\{0,\infty\}, \lambda>0$$

$$F_x=u(x)(1-e^{-\lambda x})$$

$$f_x=u(x)\lambda e^{-\lambda x}$$

Propiedad sin memoria: $P(x>t+h|x>t)=P(X>h)$

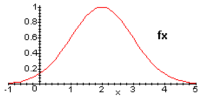
Gaussiana:

$$\Omega=\{-\infty,\infty\}$$

$$F_X(x)=\frac{1}{2}\operatorname{erf}(\frac{x-m}{\sqrt{2}\,\sigma})$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

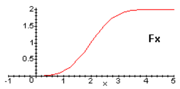


Cauchy:

$$\Omega=\{-\infty,\infty\}, a>0$$

$$F_X(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{a}$$

$$f_x=\frac{a/\pi}{x^2+a^2}$$



Teorema de DeMoivre-LaPlace

si npq>>1$\Rightarrow \binom{n}{k}p^kq^{n-k}\simeq\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}}_{\substack{Gaussiana\ m=np\\ \sigma^2=npq}}, n>1$

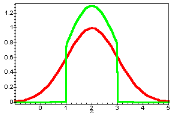
Función de densidad i distribución condicionadas

$$F_{X|B}(x) = P(X \le x|B) = \frac{P(X \le x \cap B)}{P(B)}$$

$$f_{X|B}(x) = \frac{f_X(x)P(B|x=x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x')P(B|x=x')dx'}$$

$si\ B = \{a < X \le B\}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, x \le a \\ \frac{F_X(x)-F_X(a)}{F_X(b)-F_X(a)}, a < b \le b \\ 1, x > b \end{cases}$$



Tema V. Dos variables aleatorias

Función de distribución conjunta

$$F_{XY}(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

Propiedades:

$$F_X(x) = F_{XY}(x,\infty)$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty,y)$$

$$F_{XY}(\infty,\infty) = 1$$

$$F_{XY}(x,-\infty) = 0$$

$$F_{XY}(-\infty,y) = 0$$

$$\frac{\partial F_{XY}}{\partial x} \ge 0, \frac{\partial F_{XY}}{\partial y} \ge 0,$$

$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} =$$
$$F_{XY}(x_2,y_2) + F_{XY}(x_1,y_1) - F_{XY}(x_1,y_2) - F_{XY}(x_2,y_1)$$

Funcion de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Propiedades:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

$$f(x,y) \ge 0$$

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x',y')dx'dy'$$

$$P\{x < X \le x+dx, Y \le y\} = \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{dx}dx$$

$$P\{x < X, y < Y \le y+dy\} = \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{dy}dy$$

$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y)dxdy$$

Teorema de existencia

Si una función F(x,y) es tal que:

$$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0$$

$$F(\infty,-\infty) = 0$$

$$F_{XY}(x_2,y_2) + F_{XY}(x_1,y_1) - F_{XY}(x_1,y_2) - F_{XY}(x_2,y_1) \ge 0$$

$$\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$$

entonces se pueden hallar dos v.a. X,Y tales que F(x,y) es su función de distribución conjunta.

Relaciones entre función marginal y conjunta

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x',y')dx'dy'$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x,\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(x',y')dx'dy'$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x',y')dx'dy'$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx$$

Masas puntuales (Las dos discretas)

$$P\{X = x_k, Y = y_n\} = p_{kn}$$

$$P\{X = x_k\} = \sum_n P\{X = x_k\ , Y = y_n\} = \sum_n p_{kn}$$

$$P\{Y = y_n\} = \sum_k P\{X = x_k, Y = y_n\} = \sum_k p_{kn}$$

$$\sum_k \sum_n p_{kn} = 1$$

Masas lineales

Cuando una de las v.a. es continua y la otra discreta:

X discreta , Y continua : masas verticales
X continua, Y discreta : masas horizontales

Cuando una de las v.a. es función de la otra: y=G(X)

Independencia de las v.a

X,Y son independientes si para todo A,B de barelianos de R,

$$P\{X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Distribución y densidad condicionadas

$$\boldsymbol{f}_{XY}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}_X(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y})\boldsymbol{f}_Y(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}_Y(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_X(\boldsymbol{x})$$

$$F_X(x|y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x',y)dx'}{f_Y(y)}$$

$$f_X(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Esperanza condicionada

$$E[X|y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x|y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X|y]f_Y(y)dy = E[E[X|Y]]$$

Algunes distribuciones usuales

Uniforme:

$$f_{XY} = \begin{cases} k : si(x,y) \in D \\ 0 : else \end{cases} ,on\frac{1}{k} = \int_D f_{xy}(x,y)dxdy = area(D)$$

Normal bidimensional:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2r(x-\mu_X)(y-\mu_y)}{\sigma_X\sigma_y}]}$$

·X,Y conjuntamente normales, entonces son marginalmente normales:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}, f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

·X,Y normales e indepentiens -> conjuntamente normales(r=0)

Tema VI. Funciones de variables aleatorias bidimensionales

$$Z = g(X,Y)$$

$$\phi_Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | g(x,y) \le z\}$$

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = \int_{\phi_Z} f_{XY}(x,y)dxdy$$

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz}$$

Suma de variables aleatories. Teorema de convolución

$$Z = X + Y$$

$$f_{X+Y} = f_Z = f_X * f_Y$$

$$P_Z(z_i) = \sum_{g(x_k,y_l)=z_i} p(x_k,y_l)$$

Suma de variables de poisson independientes

$$P_Z\{n\} = \sum_{k+l=n} e^{-\alpha_1}\frac{\alpha_1^k}{k!}e^{-\alpha_2}\frac{\alpha_2^l}{l!} = e^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\frac{(\alpha_1+\alpha_2)^n}{n!}$$

Suma de variables normales independientes

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}, f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

$$f_{X+Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2+\sigma_y^2)}}e^{-\frac{(z-(\mu_X+\mu_y))^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_y^2)}}$$

Cambio de variable

$$Z = g(X,Y) \qquad \frac{\partial(x,y)}{d(z,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(z,t)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}$$

$$T = h(X,Y)$$

$$dxdy = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,t)}|dzdt$$

$$f_{ZT}(z,t) = f_{XY}(x(z,t),y(z,y))|\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,t)}|$$

coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$J_{XY} = r$$

coordenadas esféricas

$$x = r\sin\psi\cos\theta$$

$$y = r\sin\psi\sin\theta$$

$$z = r\cos\psi$$

$$J_{XYZ} = r^2\sin\psi$$

Tema VII. Parámetros estadísticos

$$Z = g(X,Y)$$

Esperanza

$$E[Z] = E[g(X,Y)] \; = \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

Covarianza

$$C[X,Y] = E[(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})] \; = E[XY] - \bar{X}\bar{Y}$$

Coeficiente de correlación

$$\rho = \frac{C[X,Y]}{\sigma_x\sigma_y} \qquad |\rho| \geq 1$$

Momentos

$$m_{jk} = E[X^jY^k] = \int_{\mathbb{R}^2} x^jy^kf(x,y)dxdy$$

Momentos centrales

$$\mu_{jk} = E[(X-\bar{X})^k(Y-\bar{Y})^j] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} (x-\mu_x)^j(y-\mu_y)^kf(x,y)dxdy$$

Ortogonalidad

X, Y ortogonales si $E[XY] = 0 := X \perp Y$

Incorrelación

X, Y incorreladas si: $\rho = 0, C[X,Y] = 0 \sim E[XY] = \bar{X}\bar{Y}$

Estimación de variables aleatorias

Concepto y criterios

Y v.a., repetimos N veces este experimento, obteniendo y1,y2,..,yn, Estimar la variable Y significa hacer una predicción que se acerque el máximo a estos resultados.

$$\varepsilon \ := \text{error}$$

$$\bar{\varepsilon} \ := \text{error cuadrático medio}$$

$$\bar{\varepsilon} = E[\varepsilon] = \frac{1}{N}\sum_i E[(Y_i - c_i)^2] = E[(Y-c)^2]$$

Estimación por una constante

Estimamos Y por una constante c. La mejor estimación es

$$c = E[Y \qquad \bar{\varepsilon}_{\min} = V[Y]$$

Estimación no lineal

Estimamos Y por c(X), función a determinar de la v.a. X. La mejor estimación se llama **curva de regresión** y es:

$$c(x) = E[Y|x]$$

Hay dos casos extremos:

· X,Y son independientes.

Entonces: $E[y|x] = E[Y] \Rightarrow c(x) = E[Y] =$

·Y=g(X), es decir, existe la máxima dependencia posible.

$$f(x,y) = f(x)\delta(y-g(x))$$

$$E[Y|x] = g(x) \Rightarrow c(x) = g(x), \bar{\varepsilon}_{\min} = 0$$

Estimación lineal

Estimamos Y por $\alpha X + \beta$

$$\alpha = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

$$\beta = m_Y - \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}m_X$$

$$\bar{\varepsilon}_{\min} = \sigma_Y^2(1-\rho^2)$$

Principio de ortogonalidad

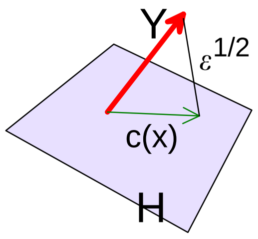
$$Z, T : v.a$$

$$:< Z, T >= E[ZT], \|Z\| =< Z, Z >^{1/2}$$

$$: \bar{\varepsilon}_{\min} = \|Y - c(X)\|^2$$

$$c = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n \ : \text{forma general de estimación}$$

$$c(X) = a_1g_1(X) + \cdots + a_ng_n(X)$$



La mejor estimación es el elemento del hiperplano H más cercano a Y i el error es la distancia entre Y y H.

Sabiendo que Y-c(X) es ortogonal a H.

$$< g_i(X), Y - c(x) >= 0, i = 1..n$$

$$E[g_i(X)c(X)] \ = E[g(X)Y], i = 1..n$$

Introducción a los procesos estocásticos

Procesos estocástico := proceso aleatorio;

"el resultado de un experimento es una función."

$$X(t) \ : \ continuo$$

$$X_i = X(t_i) : discreto$$

Fijado t, X(t) es una función v.a. unidimensional.

Funciones de distribución de un PE,X(t)

·Las funciones de distribución de orden n son:

$$F(x_1,...,x_n;t_1,..,t_n) = P(X(t_1) \le x_1,...,X(t_n) \le x_n)$$

·Las funciones de densidad de orden n son:

$$f(x_1,...,x_n;t_1,..,t_n) = \frac{\partial F(x_1,...,x_n;t_1,..,t_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$$

· El proceso queda totalmente descrito si conocemos todos los valores t_i para todo i. Fijados los valores t1...tn, tenemos una v.a. n-dimensional.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;t)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_2 = f(x_1;t_1)$$

Valor medio

$$m(t) = E[X(t)] \ = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;t)$$

Autocorrelación

$$R(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \ = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2f(x_1,x_2;t_1,t_2)d$$

Autocovarianza

$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t$$

Potencia promedio

$$R(t,t) = E[x(t)^2$$

Procesos estocásticos normales

P.E. X(t), se llama normal si: $\forall n, \forall t_1, \ldots, t_n \Rightarrow X(t_1), \ldots, X(t_n)$ son conjuntamente normales.

$$f(x_1, \ldots, x_n; t_1, .., t_n) = \frac{|A|}{(2\Pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T A(x-m)}$$

$$A_d = diag(a_1, \ldots, a_n)$$

$$P^{-1} = P^T, A_d = PAP^{-1}, a_i > 0$$

Procesos estacionarios

Un P.E. es estacionario en **sentido estricto**, si su distribución de probabilidad es invariante bajo traslaciones temporales.

$$f(x_1, \ldots, x_n; t_1, .., t_n) = (x_1, \ldots, x_n; t_1 + T, .., t_n + T)$$

Un P.E. es estacionario en **sentido amplio**, si su valor medio es constante y su autocorrelación depende sólo de la distancia temporal considerada.

$$m(t) = m, R(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2)$$

Un P.E. en sentido amplio también lo es en sentido estricto.

$\lim_{|T| \to \infty} C(\tau) = ($,R(0) es cte.

Ejemplos de procesos estocásticos

Dado un P.E., si X(t) es discreta entonces el proceso es de estado discreto sino, el proceso es de estado continuo.

El proceso de Poisson

Tinicial = 0,
n(t):=# de acontecimientos que se han producido entre [0,T]
n(ta,tb):=n(tb)-n(ta):# de aco. que se han prod. entre [ta,tb]

El # de acontecimientos en dos intervalos temporales disjuntos son v.a. independientes.

Si $N = n(t, t+\tau) \Rightarrow P(N=1) = \lambda\tau + o(\tau), P(N>1) = o(\tau)$

$$N = n(t_a, t_b) \Rightarrow P(N=n) = e^{-a}\frac{a^n}{n!},$$

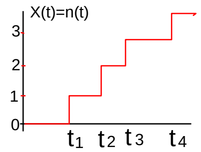
$$a = \lambda(t_b - t_a), n = 0, 1, \ldots$$

El P.E. de Poisson consiste en coger como función el # total de acontecimientos producidos en [0,T]

$$P(X(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$m(t) = \lambda t$$

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \le t_2 \\ \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_2 \le t_1 \end{cases}$$



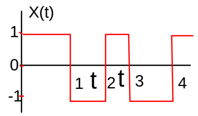
Señal telegráfico aleatorio

n(t) es una variable de Poisson.
El **señal telegráfico semialeatorio** es: $X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si n(t) es par} \\ -1 & \text{si n(t) es impar} \end{cases}$
X(0)=1, y cambia de signo cada vez que se produce un acont.

$$P(x(t) = 1) = P\{n(t) = 0)\} + P\{n(t)=2\} + \ldots = e^{-\lambda t}\cosh(\lambda t)$$

$$P(x(t) = -1) = P\{n(t) = 1)\} + P\{n(t)=3\} + \ldots = e^{-\lambda t}\sinh(\lambda t)$$

$$m(t) = e^{-2\lambda t}, R(t_1, t_2) = e^{-2\lambda(t_2 - t_1)}$$



El **señal telegráfico aleatorio** es:

S es una v.a. Bernouilli (1,-1), Y(t)=SX(t), con valores equiprobables, independiente de X(t).

$$m(t) = 0, R(t_1, t_2) = e^{-2\lambda(t_2 - t_1)}$$

Tren de impulsos de Poisson

si X(t) es un P.E. de Poisson, el tren de impulsos asociado es:

$$Z(t) = \frac{\partial X(t)}{\partial t} = \sum_i \delta(t - t_i)$$ *"shot noise"*

$$m(t) = \lambda, R(t_1, t_2) = \lambda^2 + \lambda\delta(t_2 - t_1)$$

Distribución del tiempo en el proceso de Poisson

$$f_{T_n}(t) = \lambda\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}$$

$$f_{T_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, T \sim Exp(\lambda)$$

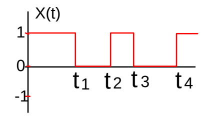
$$f(t_1, \ldots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n}$$

Señales binarios

Si Y(t) es un señal telegráfico aleatorio

$$B(t) = \frac{1 + Y(t)}{2}$$

$$B(t) = B_n \text{ si } nT \le t < (n+1)T$$



$$X(t) = \cos(\omega t + \theta(t))$$

$$\theta(t) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si B(t)=1} \\ -\pi/2 & \text{si B(t)=0} \end{cases} \qquad \omega = 2\pi v_p$$

Oscilaciones aleatorias

Se trata de funciones osciladoras que contienen parámetros aleatorios.
Ahora estudiaremos cuándo es aleatorio el proceso.

$$X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

·en sentido amplio sii: $m_A = m_B = 0, \sigma_A = \sigma_B, \rho_{AB} = 0$

·en sentido estricto sii
la distribución de (A,B) tiene simetria circular.

Procesos estacionarios

Integrales estocásticas

Si com resultado del experimento obtenemos X1(t) decimos que es una realización de est este proceso.

$\lim_{\varepsilon\to 0} f(X(t),\varepsilon) = l$ se verifica en media cuadrática (MC) sii

$\lim_{\varepsilon\to 0} E[(f(X(t),\varepsilon^2) - \varepsilon^2)] = 0$

$$E[l] = \lim_{\varepsilon\to 0} E[f(X(t),\varepsilon)]$$

Si se cumplen (condiciones de continuidad en MC):

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E[X(t+\varepsilon) - X(t))^2] = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{R(t+\varepsilon,t+\varepsilon) - 2R(t+\varepsilon,t) + R(t,t)] = 0$$

entonces existe la integral:

$\int_a^b\int_a^b R(t_1,t_2)dt_1dt_2$, y el proceso es integrable en [a,b]

$$\int_a^b X(t)dt \text{ es v.a.}$$

$$\Rightarrow E[\int_a^b X(t)dt] = \int_a^b E[X(t)]dt$$

Ergodicidad

$$X(t)PE, m(t) = m, R(t,t+\tau) = R(\tau)$$

$$m = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$$

$$m_T = \langle x(t) \rangle_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$$

Un proceso ergódico es aquel en el que los promedios temporales igualan los promedios sobre realizaciones.

Ergodicidad en valor medio:

$$m_T \to m \text{ en MC.} \bowtie \lim_{T\to\infty} E[(m_T - m)^2] = 0$$

$$\sigma_T^2 \to 0, \text{cuando } T\to\infty$$

Ergodicidad en autocorrelación:

$$Z_\lambda(t) = X(t+\lambda)X(t) \text{es ergódico en valor medio.}$$

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{+T}\int_{-T}^{+T} C(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

Condiciones suficientes de ergodicidad

$$si \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau)d\tau < \infty \Rightarrow$$

el proc. es ergódico en va.medio.

$$: |C[x,y]| \le \sigma_X\sigma_Y$$

$$\text{si } C(0) < \infty \text{ y } C(\tau) \to \infty, \text{cuando } |\tau| \to \infty$$

el proceso es ergódico en valor medio

Espectro de potencia de un proceso estacionario

La densidad espectral o espectro de potencia de un P.E. estacionario es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación.

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-j\omega t}dt$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Sistemas lineales

$$Y(t) = L[X(t)] = X(t) * h(t)$$

$$h(t) = L[\delta(t)]$$

·Un sistema es determinista si la realización de X(t) que entra queda determinada a la salida.
·Si por el contrario, una misma entrada puede dar lugar a salidas diferentes, diremos que el proceso es estocástico.

·Un sistema sin memoria es que la salida depende exclusivamente del valor de X(t) para el mismo t.
·Un sistema es lineal si...
·Un sistema es invariante en el tiempo si...

Valor medio, autocorrelación y espectro de potencia de un P.E. transformado linealmente

$$Y(t) = L[X(t)]$$

$$m_Y(t) = L[m_X(t)]$$

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$R_{XY}(t_1,t_2) = L_2[R_{XX}(t_1,t_2)]$$

$$R_{YY}(t_1,t_2) = L_1[R_{XY}(t_1,t_2)]$$

$$H(f) = F\{h(t)\}$$

$$S_{YY}(f) = |H(f)|^2 S_{XX}(f)$$