Transmisión digital en banda base

Pulse Amplitude Modulation (PAM)

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n p(t-nT)$$

M posibles símbolos $\begin{matrix}\text{b bits} = \log_2 M \\ \text{M} = 2^{\text{b}}\end{matrix}$

$$r = \frac{1}{T}\ [\text{símbolos/seg}]$$

$$r_b = rb\,[bits/seg]$$

$$R_{X_TX_T}(t+t,t) = E\{x_T(t+t)x_T^*(t)\} : \text{cicloestacionario}$$

$$\overline{R}_{X_TX_T}(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{aa}(n)R_{pp}(t-mT)$$

$$S_{X_TX_T}(f) = F\{\overline{R}_{X_TX_T}(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{aa}(n)e^{-2pfnT}\frac{|P(f)|^2}{T}$$

$$m_a = E\{a_n\}$$

$$a_n \equiv A_n + m_a$$

$$S_{x_Tx_{Tt}}(f) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{AA}(n)e^{-2pfnT}\right]\frac{|P(f)|^2}{T} + \frac{|m_a|^2}{T^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|P(\frac{k}{T})|^2\, d(f-\frac{k}{T})$$

(a) a[n] estadísticamente independientes

$$S_{x_Tx_T}(f) = rs_a^2|P(f)|^2 + r^2|m_a|^2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|P(kr)|^2\, d(f-kr)$$

(b) a[n] estadísticamente independientes y media nula

$$S_{x_Tx_T}(f) = rs_a^2|P(f)|^2$$

$$x_R(t)|_{t=t_k=kT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_r(kT-nT) + w(t) = \underbrace{a_k p_r(0)}_{señal} + \underbrace{\sum_{n=-\infty, n\neq k}^{+\infty} p_r((k-n)T)}_{ISI} + \underbrace{w(t)}_{ruido}$$

$$p_r(t) \equiv p_T(t) * h_T(t) * h_C(t) * h_R(t)$$

$$w(t) \equiv n(t) * h_R(t)$$

Condición no ISI. Teorema de Nyquist

$$p(kT) = \begin{cases}1, k=0 \\ 0, k\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow r\sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(f-kr) = cte$$

Teoría de la decisión

Suponemos que no hay ISI, y que trabajamos, pues, con pulsos ideales.

$$y_k = y(kT) = a_k + w(kT)$$

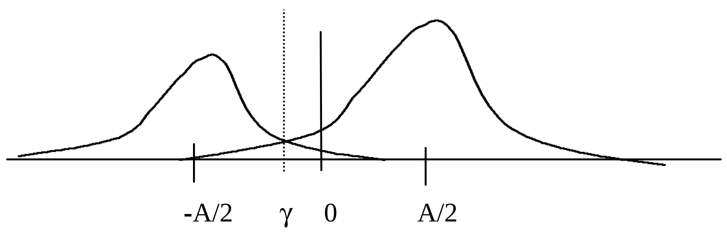
$$P_{error} = P_e = P(e|'1')P('1') + P(e|'0')P('0')$$

$$P_{error} = BER \Leftarrow \text{los símbolos son binarios}$$

$$H_0 = '0', H_1 = '1' \quad \text{hipótesis}$$

$$P_e = P(e|H_0)P(H_0) + P(e|H_1)P(H_1)$$

$$P(e|H_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{y|H_1}(y|H_1)dy = \int_{-\infty}^{g} f_w(y+\frac{A}{2})dy$$



$$g_{\text{óptima}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial g} P_e(g) = 0$$

$$f_{y|H_0}(y \mid H_0)P(H_0) = f_{y|H_1}(y \mid H_1)P(H_1)\big|_{y=g}$$

$$f_w(g + \frac{A}{2})P(H_0) = f_w(g - \frac{A}{2})P(H_1)$$

$$\text{si } f_W(w) \approx Gaussiana(0, s_w^{\,2}),\ f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2p s_w^{\,2}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{w^2}{s_w^{\,2}}}$$

$$\Rightarrow Q(x) \equiv \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw \Rightarrow g_{\text{óptima}} = -\frac{s_w^{\,2}}{A} \ln \frac{P(H_1)}{P(H_2)}$$

Si a[n] es una v.a, entonces

$$f_a(a) = P(H_0)d(a + \frac{A}{2}) + P(H_1)d(a - \frac{A}{2})$$

si $g = x + y$, con x e y v.as, $f_g(g) = f_x(g) * f_y(y)$ si x, y son indep.

$$f_y(y) = f_a(y) * f_w(y)$$

$$P(e \mid H_0) = Q(\frac{g + A/2}{s_w}) \qquad P(e \mid H_1) = Q(\frac{g - A/2}{s_w})$$

$$\text{si } g = 0 \Rightarrow P_e = Q(\frac{A}{2s_w})$$

Teoría de la detección óptima

$$H_R^{\text{óptimo}}(f) = l \frac{P^*(f)}{S_{nn}(f)} e^{-2pft_o}$$

$$\text{Si n(t)} \approx \text{AWGN}, S_{nn}(f) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow H_R^{\text{óptimo}}(f) = l p^*(td - t)$$

s'anomena Filtre Adaptat, i és el detector óptim amb soroll gaussiá

$$h_r^{\text{óptima}}(t) = ap^*(td - t)$$

$$a = \frac{1}{E_p} = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|^2\, dt} \Rightarrow h_r^{\text{óptima}}(t) = \frac{1}{E_p} p^*(td - t)$$

$$S_T(t) = E\{|x(t)|^2\} = E\{|\sum a_n p(t - nT)|\}$$

$$S_T = \frac{1}{T}\int_T S_T(t)dt = r s_a^{\,2} E_p \overset{\text{binari polar}}{=} r\left[\frac{1}{2}(\frac{A}{2})^2 + \frac{1}{2}(-\frac{A}{2})^2\right]E_p = r\frac{A^2}{4}E_p = S_T$$

$$E_b = S_T T = \frac{A^2}{2} = \sqrt{\frac{E_b}{2E_p}} \Rightarrow BER = P_e = Q(\frac{A}{2s_w}) = Q(\sqrt{\frac{E_b}{2}})$$

Sistemas multinivel

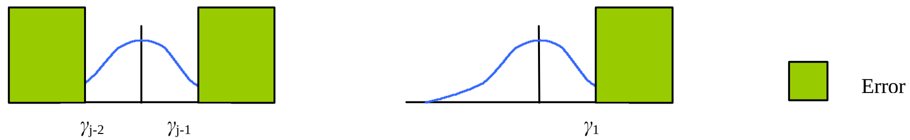
$$a_k = \{\pm\frac{A}{2}, \pm 3\frac{A}{2}, 5 \pm \frac{A}{2}, \ldots, \pm(M-1)\frac{A}{2}\} \qquad M \text{ símbolos equiprobables } p(H_i) = \frac{1}{M}$$

$$h_r(t) = \frac{1}{E_p} p^*(td - t)$$

$$f_{y|H_i}(y \mid H_i) = f_w(y - a_i)$$

$$min\{P_e\} = \sum_{i=1}^{M} P(e \mid H_i)P(H_i) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P(e \mid H_i)$$

2 casos: centrales y extremos



$$P_e = \overbrace{\frac{2}{M}P(e|H_1)}^{\text{extrems}} + \overbrace{\frac{1}{M}\sum_{i=2}^{M-1}P(e|H_i)}^{\text{centrals}} = \frac{2}{M}\int_{g_1}^{+\infty} f_W(y-a_1)dy + \frac{1}{M}\sum_{i=2}^{M-1}(1-\int_{g_{i-1}}^{g_i} f_W(y-a_i)dy$$

$$P_e(g_1, g_2, ..., g_{M-1}) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial g_j}P_e = 0 \ \forall j \Leftrightarrow f_W(g_j - a_j) = f_W(g_j - a_{j-1})$$

$$g_j^{\text{óptima}} = \frac{a_{j+1}+a_j}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} P\{H_i\} = \dfrac{1}{M} \\ f_W(w) = f_W(-w) \end{cases}$$

$$P_e = \frac{2M-2}{M}Q(\frac{A}{2s_w}) \qquad BER \cong \frac{P_e}{\log_2 M}$$

$$E_b \rightarrow \frac{E_b}{N_o} \rightarrow \text{Governa la qualitat del sistema}$$

$$E_b \equiv S_T \cdot T_b \equiv S_T \frac{T}{b}$$

$$T_b \equiv \frac{T}{b} = \frac{T}{\log_2 M}$$

$$S_T \begin{cases} R_{X_T X_T}(0) \\ \dfrac{1}{T}\int_T E\{|x(t)|^2\}dt \\ \text{estats independents} \end{cases}$$

$$s(t) = a_k p(t-kT)$$

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} E\{|S(t)|^2\}dt = E\{|a_k|^2\}\int_{-\infty}^{+\infty}\overbrace{E\{|p(t)|^2\}dt}^{E_p} = E\{|a_k|^2\}E_p$$

$$E_b = \frac{E_s}{b} = \frac{m^2-1}{12}A^2\frac{E_p}{M\log_2 M}$$

$$P_e = \frac{2M-2}{M}Q(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{m^2-1}}(\frac{E_b}{N_o}))$$

Polsos de Nyquist

$$p(t) = sinc(rt) = \frac{sin(prt)}{prt} \leftrightarrow P(f) = T\prod(Tf)$$

$$p_N(t) \equiv p_b()sinc(rt) \leftrightarrow P_N(f) = P_B(f) * \prod(Tf), P_B(f) = 0 \forall |f| \geq BW_B$$

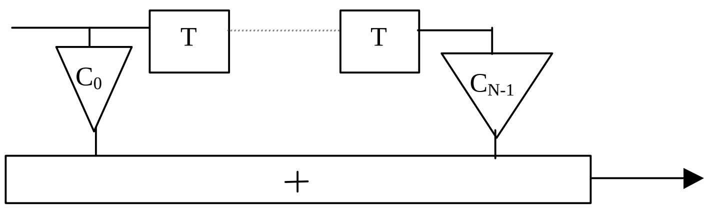
$$BW_N = \frac{r}{2} + BW_B \equiv \frac{r}{2}(1+b)$$

$$b \equiv \frac{BW_B}{r/2} : \text{factor de ROLL - OFF (\%)}$$

Ecualización

Igualación (compensación) del canal
Canal: forzadores de ceros, si el ruido afecta poco a la calidad del sistema
Canal + ruido: ecualización, forzadores de ceros.

Forzador de ceros



$$\overbrace{\begin{vmatrix} P(1) & 0 & 0 \\ p(2) & p(1) & 0 \\ p(3) & p(2) & p(1) \end{vmatrix}}^{P} \overbrace{\begin{vmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{vmatrix}}^{C} = \overbrace{\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}}^{\bar{1}} \text{donde haya más señal}$$

$$P \cdot C = 1$$

$$C = P^{-1}1$$

$$C_{opt}^{ZF} = (P^T P)^{-1} P^T \cdot 1 \Leftarrow MECM$$

Transmisión digital paso banda

Señales y ruido

$$f_N(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma}\right)^2}$$

$$S_{NN}(f)=\frac{N_o}{2}$$

Visión Geométrica

Espacio Ortogonal N - dimensional

$$\Rightarrow \{\psi_j(t)\}\ \text{funciones básicas} \mid \int_0^T \psi_j(t)\psi_k(t)dt=K_j\delta_{jk}$$

donde $\delta_{jk}=\delta(j-k)$ Delta de Kronecker

Espacio normalizado $\Leftrightarrow K_j=1 \Leftarrow$ Espacio ortonormal

$$E_j=\int_0^T \psi_j^2(t)dt=K_j$$

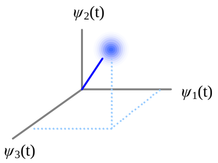
Se trata de un espacio de señal ortogonal. La distancia euclidiana, fundamental para el proceso de detección, se formula fácilmente en dicho espacio.

$\{s_i(t)\}, i=1,..,M$ es tal que

$$\forall i, s_i(t)=\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\psi_j(t) \quad \begin{cases} i=1,..,M \\ N\le M \end{cases} \text{donde}$$

$$a_{ij}=\frac{1}{K_j}\int_0^T s_i(t)\psi_j(t)dt \quad \begin{cases} i=1,..,M & 0\le t\le T \\ j=1,..,N \end{cases}$$

En notación vectoral, $\vec{s}_i=(a_{i1},a_{i2},...,a_{iN}) \quad i=1,..,M$



Señales y ruido en un espacio tridimensional

Energía de la señal

$$E_i=\int_0^T s_i^2(t)dt=\int_0^T\left[\sum_j a_{ij}\psi_j(t)\right]^2 dt=\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2K_j \quad i=1,..,M$$

Representación de ruido blanco con señales ortogonales

$$n(t)=\hat{n}(t)+\tilde{n}(t) \qquad n(t)=\sum_{j=1}^{N} n_j\psi_j(t)+\tilde{n}(t) \qquad 0=\int_0^T \tilde{n}(t)\psi_j(t)dt$$

$$\hat{n}(t)=\sum_{j=1}^{N} n_j\psi_j(t) \qquad \vec{n}=(n_1,..,n_2)\ \text{independientes}$$

$$n_j=\frac{1}{K_j}\int_0^T n(t)\psi_j(t)dt \quad \forall j\ \ n_i\equiv Gaussian(m=0,\sigma^2{}_N)$$

Variancia de un proceso blanco

$$\sigma^2=\operatorname{var}\{n(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N_o}{2}df=\infty$$

$$\sigma^2=\operatorname{var}\{n_j\}=E\{\left[\int_0^T n(t)\psi_j(t)dt\right]^2\}=\frac{N_o}{2} \Leftarrow \text{Está filtrado}$$

Técnicas digitales de modulación paso banda

$$s(t)=A(t)\cos\theta(t)=A(t)\cos(2\pi f_ct+\phi(t))$$

$$\theta(t)=2\pi f_ct+\phi(t)$$

Detección coherente: PLL (nos proporciona la fase de la portadora)
Detección no coherente: No se requiere saber la fase de la portadora.

La ventaja de los sistemas no coherentes frente a los demoduladores coherentes consiste en que requieren menos complejidad, aunque el precio que se paga es un incremento en la probabilidad de error.

PSK ***Phase Shift Keying***

$$\left.\begin{aligned} s_i(t) &= \sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(2pf_c t + f_i(t)) \\ f_i(t) &= \frac{2pi}{M} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} i &= 1,\ldots,M \\ 0 &\le t \le T \end{aligned}$$

FSK ***Frequency Shift Keying***

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(2pf_i t + f)\left\} \begin{aligned} i &= 1,\ldots,M \\ 0 &\le t \le T \end{aligned}\right.$$

ASK ***Amplitude Shift Keying***

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}}\cos(2pf_o t + f)\left\} \begin{aligned} i &= 1,\ldots,M \\ 0 &\le t \le T \end{aligned}\right.$$

APK ***Amplitude Phase Keying***

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}}\cos(2pf_o t + f_i(t))\left\} \begin{aligned} i &= 1,\ldots,M \\ 0 &\le t \le T \end{aligned}\right.$$

Si los M símbolos en el espacio bidimensional se ordenan según un rectángulo, entonces se denomina QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

Coeficiente de Amplitud de la onda

$$s(t) = A\cos wt = \sqrt{2}A_{rms}\cos wt = \sqrt{2A_{rms}^2}\cos wt$$

A_{rms}^2 : potencia media normalizada a 1Ω

$$s(t) = \sqrt{2P}\cos wt$$

$$P = \frac{E}{T} \Rightarrow s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}}\cos wt$$

Detección de señales con ruido gausiano

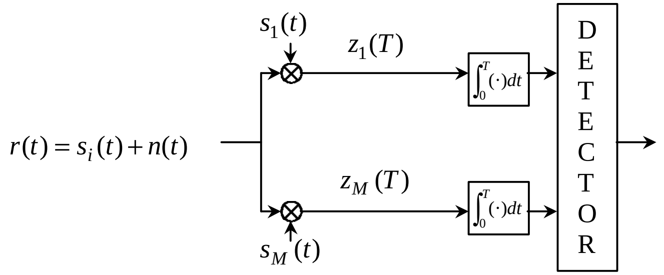
Regiones de decisión

$\vec{r}$: señal recibida $= \vec{s}_t + \vec{n}$

$d(\vec{r}, \vec{s}_i) = \| r - s_i \|$

Busca un i tal que $d(\vec{r}, \vec{s}_i)$ sea mínima

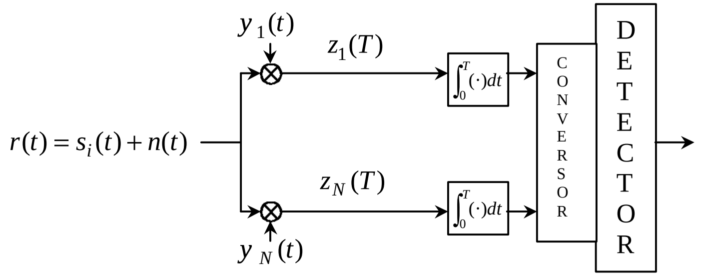
Receptor correlado a través de las señales $\{s_i(t)\}$



$$Z_i(T) = \int_0^T r(t)s_i(t)dt \quad i = 1,..,M$$

El detector escoge la $s_i(t)$ que corresponde a $max\{z_i(t)\}$

Receptor correlado a través de las señales $\{s_i(t)\}$



$\{s_i(t)\}$ no es un conjunto ortogonal ya que N < M, mientras que $\{y_i(t)\}$ sí por lo que requiere menos correladores $\Rightarrow$ más barato

Detección coherente

BPSK *Binary* PSK

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(w_o t + f) \qquad 0 \le t \le T$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(w_o t + f + p) = -s_1(t) \qquad 0 \le t \le T$$

$$y_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(w_o t) \qquad 0 \le t \le T$$

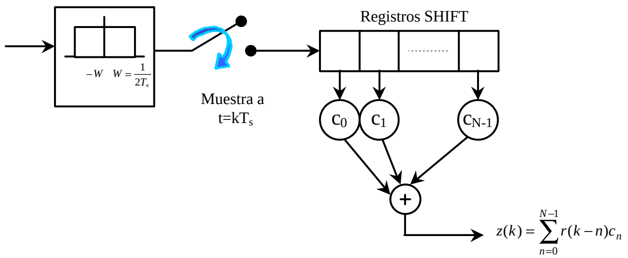
$$s_1(t) = a_{11} y_1(t) = \sqrt{E} y_1(t)$$

$$s_2(t) = a_{21} y_1(t) = -\sqrt{E} y_1(t)$$

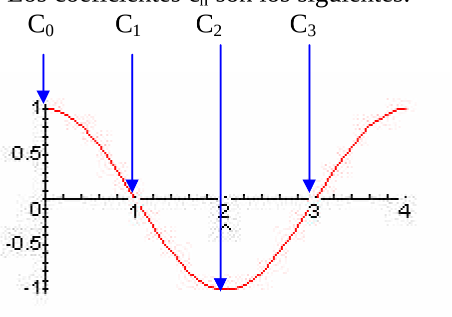
$$E\{z_1 \mid s_1\} = E\{\int_0^T \sqrt{E} y_1^2(t) + n(t) y_1(t) dt\} = \sqrt{E}$$

$$E\{z_1 \mid s_1\} = E\{\int_0^T -\sqrt{E} y_1^2(t) - n(t) y_1(t) dt\} = -\sqrt{E}$$

Filtro adaptado muestreado



Los coeficientes c_n son los siguientes:



$$c_i = \{1,0,-1,0\}$$

$$E\{r(k)\} = s_i(k) \qquad i = 1,2$$

$$E\{z_i(k)\} = \sum_{n=0}^{N-1} s_1(k-n) c_n$$

MPSK *M-ary* PSK

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}}\cos(w_o t - \frac{2pi}{M})$$

$$0 \le t \le T$$

$$i = 1,..,M$$

$$y_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(w_o t)$$

$$y_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\,\mathrm{sen}(w_o t)$$

$$s_i(t) = a_{i1} y_1(t) + a_{i2} y_2(t) = $$
$$= \sqrt{E}\cos(\frac{2pi}{M}) y_1(t) + \sqrt{E}\,\mathrm{sen}(\frac{2pi}{M}) y_2(t)$$

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}}\left[\cos f_i \cos w_o t + \sin f_i \sin w_o t\right] + n(t) \qquad f_i = \frac{2pi}{M}$$

$$X = \int_0^T r(t) y_1(t) dt \qquad Y = \int_0^T r(t) y_2(t) dt$$

Desmodulador de señales MPSK