

Microondas

Técnicas de análisis de circuitos

Jesús Sanz Marcos

e-mail: jesus.sanz@upcnet.es

Barcelona, Spain. 08/12/2000

Impedancia y tensiones y corrientes equivalentes

$$V = \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad I = \oint_{C^+} \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad Z_0 = \frac{V}{I}$$

TE_{10} :

$$E_y(x, y, z) = \frac{j\omega m}{p} A \text{sen}\left(\frac{px}{a}\right) e^{-j\omega z} = A \bar{e}_y(x, y) e^{-j\omega z}$$

$$H_y(x, y, z) = \frac{j\omega a}{p} A \text{sen}\left(\frac{px}{a}\right) e^{-j\omega z} = A \bar{h}_y(x, y) e^{-j\omega z}$$

$$\bar{E}_t(x, y) = \frac{\bar{e}(x, y)}{C_1} (V^+ e^{-j\omega z} + V^- e^{j\omega z})$$

$$\bar{H}_t(x, y) = \frac{\bar{h}(x, y)}{C_2} (I^+ e^{-j\omega z} - I^- e^{j\omega z})$$

$$\bar{h}(x, y) = \frac{\hat{z} \times \bar{e}(x, y)}{Z_w}$$

$$V(z) = V^+ e^{-j\omega z} + V^- e^{j\omega z}$$

$$I(z) = I^+ e^{-j\omega z} - I^- e^{j\omega z}$$

$$C_1 = \frac{V^+}{A^+} = \frac{V^-}{A^-} \quad C_2 = \frac{I^+}{A^+} = \frac{I^-}{A^-}$$

$$Z_0 = \frac{V^+}{I^+} = \frac{V^-}{I^-}$$

$$P^+ = -\frac{1}{2} \int_S E_y H_x^* ds = \frac{ab}{4Z_{TE}} |A|^2$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{ab}{2}} \quad C_2 = \frac{1}{Z_{TE}} \sqrt{\frac{ab}{2}}$$

$\mathbf{h} = \sqrt{\mathbf{m}/\mathbf{e}}$: impedancia intrínseca (dep. material)

$Z_w = \frac{E_t}{H_t}$: impedancia de onda (dep. tipo guía, material y freq.)

$Z_0 = \frac{1}{Y_0} = \sqrt{\frac{L}{C}}$: impedancia característica

$$\omega^2 \mathbf{m} = k^2$$

$$k_c^2 = \left(\frac{mp}{a}\right)^2 + \left(\frac{np}{b}\right)^2 \Rightarrow \mathbf{b}^2 + k_c^2 = k^2$$

$$\mathbf{b}_{TE_{10}} = \sqrt{k^2 - (p/a)^2} \quad Z_0 = \frac{k\mathbf{h}}{\mathbf{b}} \quad \Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Matrices de impedancia y admitancia

$$\begin{aligned} [V] &= [Z][I] & [Z] &= [Y]^{-1} \\ [I] &= [Y][V] \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

$$Y_{ij} \equiv \frac{I_i}{V_j} |_{V_k=0 \forall k \neq j} \quad Z_{ij} \equiv \frac{V_i}{I_j} |_{I_k=0 \forall k \neq j}$$

Medida de $[Y]$: generador de tensión en j y cortocircuitamos el resto de entradas, midiendo sus corrientes.

Medida de $[Z]$: generador de corriente en j , dejamos en circuito abierto el resto de entradas y medimos su tensión.

! Líneas de Transmisión: $I^+ = \frac{V_i^+}{Z_{0i}} \quad I^- = \frac{V_i^-}{Z_{0i}}$
 $r(0) = \frac{V^-}{V^+}$

Parámetros de dispersión

Ondas de tensión normalizadas:

$$a_i \equiv \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}} = \bar{V}_i^+ \quad b_i \equiv \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}} = \bar{V}_i^-$$

$$\bar{V}_i \equiv \frac{V_i}{\sqrt{Z_{0i}}} \quad \bar{I}_i = I_i \sqrt{Z_{0i}}$$

Sobre el plano P Ri:

$$V_i = V_i^+ + V_i^- \quad I_i = \frac{V_i^+}{Z_{0i}} - \frac{V_i^-}{Z_{0i}}$$

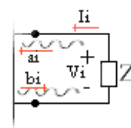
$$\bar{V}_i = a_i + b_i \quad \bar{I}_i = a_i - b_i$$

$$a_i = \frac{1}{2}(\bar{V}_i + \bar{I}_i) \quad b_i = \frac{1}{2}(\bar{V}_i - \bar{I}_i)$$

$$[b] = [S][a]$$

$$S_{ij} = \frac{b_i}{a_j} |_{a_k=0 \forall k \neq j}$$

Accesos acabados o terminados



$$V_i = -Z I_i$$

$$\Gamma_i = \frac{Z - Z_{0i}}{Z + Z_{0i}} \quad \Gamma_i \equiv \frac{a_i}{b_i}$$

Accesos adaptado

$$Z = Z_{oi} \Rightarrow \Gamma_i = 0$$

No vuelve señal a la red \Rightarrow toda la señal se entrega a la carga.

Cálculo de parámetros [S]

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_j S_{ij}$$

$$V_i = V_g - I_i Z_g$$

$$a_i = \frac{V_g}{\sqrt{Z_{oi}}} \frac{Z_{oi}}{Z_g + Z_{oi}} + b_i \Gamma_g$$

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_{oi}}{Z_g + Z_{oi}}$$

$$Z_g = Z_0 \Rightarrow \Gamma_g = 0$$

Generador canónico:

$$a_i = \frac{1}{2} V_g$$

$$\text{Cálculo de } S_{ii} = \frac{b_i}{a_i} \Big|_{a_j=0, j \neq i} = \Gamma_i = \frac{Z_i - Z_{oi}}{Z_i + Z_{oi}}$$

$$Z_i \equiv \frac{V_i}{I_i} \Big|_{a_j=0, j \neq i}$$

S_{ii} : coeficiente de reflexión del acceso "i" cuando todos los demás están cargados con Z_{oj} .

Flujo de potencia del acceso "i"

$$P_i = \frac{1}{2} \text{Re}\{V_i I_i^*\} = \frac{1}{2} |a_i|^2 - \frac{1}{2} |b_i|^2$$

$$P_i^+ = \frac{1}{2} |a_i|^2 = \frac{1}{2} |\bar{V}_i^+|^2 = \frac{1}{2} \frac{|V_i^+|^2}{Z_{oi}}$$

$$P_i^- = \frac{1}{2} |b_i|^2 = |\Gamma_{enti}|^2 P_i^+$$

$$P_c = P_i^+ - P_i^- = P_i^+ (1 - |\Gamma_{enti}|^2)$$

$$\Gamma_{enti} = \frac{Z_{ent} - Z_{oi}}{Z_{ent} + Z_{oi}}$$

Caso general:

$$P_{ent} = \frac{1}{2} |a_i|^2 - \frac{1}{2} |b_i|^2 = \frac{1}{2} |a_i|^2 (1 - |\Gamma_{enti}|^2) [W]$$

Si el generador es canónico

$$\Rightarrow a_i \text{ es independiente de } Z_{oi} \left(a_i = \frac{1}{2} \bar{V}_g \right)$$

$$P_{max} = \frac{|V_g|^2}{8R_g} \Rightarrow P_{ent} = P_{max} (1 - |\Gamma_{ent}|^2), P_{max} = \frac{1}{2} |a_i|^2$$

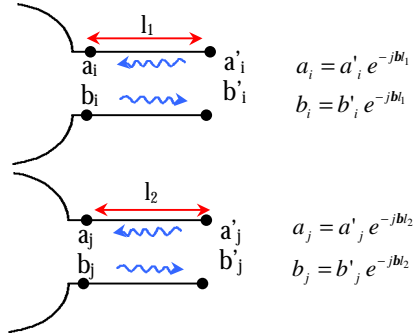
Propiedades de la matriz [S]

$$[V] = [Z][I] \rightarrow [\bar{V}] = [\bar{Z}][\bar{I}] \quad [\bar{Z}] = \frac{1}{Z_0} [Z]$$

$$[S] = \{[\bar{Z}] - [1]\} \{[\bar{Z}] + [1]\}^{-1} \quad [S] = \{[1] - [\bar{Y}]\} \{[1] + [\bar{Y}]\}^{-1}$$

$$[\bar{Z}] = \{[1] + [S]\} \{[1] - [S]\}^{-1} \quad [\bar{Y}] = \{[1] - [S]\} \{[1] + [S]\}^{-1}$$

- 1) La matriz [S] es simétrica per a qualsevol circuit recíproc: $S_{ij} = S_{ji}$. Son recíprocos tots els circuits passius sense ferrites magnetitzades.
- 2) Canvi del pla de referència



$$S'_{ij} = \frac{b'_i}{a'_j} \Big|_{a_k=0, k \neq j} = S_{ij} e^{-jb(l_i - l_j)}$$

- 3) Para un circuito pasivo: $|S_{ij}| \leq 1$

A la porta "i", la potència neta que entra és:

$$P_i = \frac{1}{2} |a_i|^2 - \frac{1}{2} |b_i|^2$$

$$P_{\text{tot entrant}} = P_{\text{tot dissipada}} = P_d = \sum_{i=1}^n P_i$$

Circuito pasivo con pérdidas: $P_d > 0 \Rightarrow |S_{ij}| < 1 \forall i, j$

Circuito pasivo sin pérdidas: $P_d = 0$

Circuito activo: $P_d < 0$

- 4) Cualquier circuito sin pérdidas cumple:

$$[S]^T [S] = [1]$$

$$[S][S]^T = [1]$$

- 5) Circuitos simétricos

2 accesos: $S_{11} = S_{22}, S_{12} = S_{21}$

$$2N \text{ accesos: } [S]_{2N \times 2N} = \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_2] & [S_1] \end{bmatrix}$$

$$[S_1]_{N \times N} = \frac{1}{2} \{ [S^{\text{even}}] + [S^{\text{odd}}] \}$$

$$[S_2]_{N \times N} = \frac{1}{2} \{ [S^{\text{even}}] - [S^{\text{odd}}] \}$$

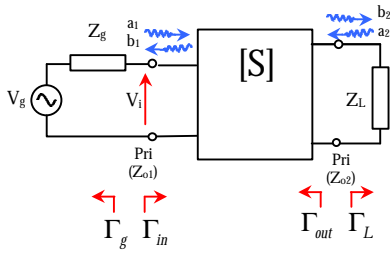
$$[S]_{2 \times 2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma^{\text{even}} + \Gamma^{\text{odd}} & \Gamma^{\text{even}} - \Gamma^{\text{odd}} \\ \Gamma^{\text{even}} - \Gamma^{\text{odd}} & \Gamma^{\text{even}} + \Gamma^{\text{odd}} \end{bmatrix}$$

Un bipuerto unitario (pasivo y sin pérdidas) y recíproco, siempre puede hacerse simétrico con el cambio de planos de referencia. Partimos de la red de 2 accesos pasiva y sin pérdidas.

$$[S] = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{a} e^{j\mathbf{f}_1} & \text{sen } \mathbf{a} e^{j\mathbf{f}_2} \\ \text{sen } \mathbf{a} e^{j\mathbf{f}_3} & \cos \mathbf{a} e^{j(\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \mp \pi)} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3$$

$$[S^*] = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{a} & \mp j \text{sen } \mathbf{a} \\ \mp j \text{sen } \mathbf{a} & \cos \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} & \mp \sqrt{1 - \mathbf{g}^2} \\ \mp \sqrt{1 - \mathbf{g}^2} & \mathbf{g} \end{bmatrix}$$

Análisis de redes de dos accesos



En general, $Z_{01} = Z_{02} = Z_0$

$$\Gamma_{in} = S_{11} \text{ si } \Gamma_L = 0 (Z_L = Z_0)$$

$$\Gamma_{in} \equiv \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$$

$$\Gamma_{out} \equiv \frac{b_2}{a_2} = S_{22} + \frac{S_{21} S_{12} \Gamma_g}{1 - S_{11} \Gamma_g} = \frac{Z_{out} - Z_0}{Z_{out} + Z_0}$$

Ganancia de transferencia de potencia G_T

$$G_T \equiv \frac{P_L}{P_{gmax}} \quad P_{in} = \frac{1}{2} |a_i|^2 (1 - |\Gamma_{in}|^2)$$

$$a_i = b_g + b_1 \Gamma_g = b_g + a_1 \Gamma_{in} \Gamma_g \quad b_g = \frac{V_g}{\sqrt{Z_0}} \frac{Z_0}{Z_g + Z_0}$$

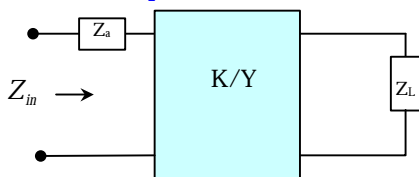
$$a_i = \frac{b_g}{1 - \Gamma_g \Gamma_{in}} \Rightarrow P_{in} = \frac{1}{2} \frac{|b_g|^2 (1 - |\Gamma_{in}|^2)}{|1 - \Gamma_g \Gamma_{in}|^2}$$

$$P_L = \frac{1}{2} |b_2|^2 (1 - |\Gamma_L|^2) \quad b_2 = \frac{a_1 S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

$$G_T = \frac{(1 - |\Gamma_g|^2) |S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_{in}|^2)}{|(1 - S_{22} \Gamma_L)(1 - S_{11} \Gamma_g) - S_{12} S_{21} \Gamma_{in} \Gamma_g|^2}$$

$$G_T \Big|_{\substack{Z_g=Z_0 \\ Z_L=Z_0}} = |S_{21}|^2$$

Inversores de impedancias/admitancias



$$Z_{in} = \frac{k^2}{Z_L} = \frac{\bar{k}^2}{\bar{Z}_L} \quad \bar{k} = \frac{k}{Z_0} \quad k = \frac{1}{J}$$

$$Y_{in} = \frac{J^2}{Y_L} = \frac{\bar{J}^2}{\bar{Y}_L} \quad \bar{J} = \frac{J}{Y_0}$$

Propiedades:

$$S_{11} = \frac{k^2 - Z_0^2}{k^2 + Z_0^2} = \mathbf{g} \in \text{real} \quad S_{21} = \pm \sqrt{1 - \mathbf{g}^2} = S_{12}$$

Es un bipuerto pasivo, sin pérdidas (unitario), recíproco y simétrico con S_{11} real, entonces es un inversor.

Si $\mathbf{a} < 0$: $k < Z_0 \Rightarrow$ inversor impedancias

Si $\mathbf{a} > 0$: $k > Z_0 \Rightarrow$ inversor admitancias

Atenuadores

Propiedades:

-Red de dos accesos que reduce el nivel de señal

-Están adaptados: $S_{ii} = 0$

-No introduce desfase: $S_{12}, S_{21} \in \mathfrak{R}$

-En general es recíproco: $S_{12} = S_{21}$

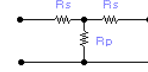
-En general: $[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} \\ S_{21} & 0 \end{bmatrix}$

-Atenuación: $L = \frac{1}{G_T}$

-Si $Z_g = Z_0, Z_L = Z_0 \Rightarrow L = -20 \log |S_{21}|$

Atenuador tipo "T"

$$R_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_s} - R_s \right)$$

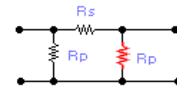


$$R_s = \frac{10^{L/20} - 1}{10^{L/20} + 1}$$

$$L = -20 \log |S_{21}| = 2 \log \left| \frac{1 + R_s}{1 - R_s} \right|$$

Atenuador tipo "Π"

$$R_p = -\frac{at + 1}{at - 1} \quad at = 10^{-L/20}$$



$$R_s = \frac{2R_p}{R_p^2 - 1}$$

Ventajas de los atenuadores

Mejoran la adaptación de los circuitos, aunque incrementan el ruido.

$$\Gamma_{in} = S_{21} \Gamma_L$$

$$RL_{in} = -20 \log |\Gamma_{in}| = -40 \log |S_{21}| - 20 \log |\Gamma_L|$$

$$RL_{in} = 2L + RL_L$$

Líneas de transmisión planares (línea microactiva o microstrip)

Ventajas

-Facilidad de construcción

-Incorporación dispositivos

-Dimensiones reducidas (si $\epsilon_r \uparrow$)

Inconvenientes

-Línea inhomogénea (aproximaciones para Z_0, λ, \dots)

-Válida para potencias medias y bajas

Línea inhomogénea

$$L = L_0 \quad F/m \quad C = \mathbf{e}_{ref} C_0 \quad 1 < \mathbf{e}_{ref} < \mathbf{e}_r$$

$$\text{Velocidad de propagación: } v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mathbf{e}_{ref}}}$$

$$\text{Longitud de onda: } \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mathbf{e}_{ref}}}$$

$$\text{Impedancia característica: } Z_0 \equiv \frac{Z_0}{\sqrt{\mathbf{e}_{ref}}}$$

$$\mathbf{e}_{ref} = \frac{\mathbf{e}_r + 1}{2} + \frac{\mathbf{e}_r - 1}{2} \left(1 + \frac{10h}{W} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{error } 1\%)$$

Si $\frac{W}{h} \uparrow \Rightarrow$ líneas anchas \Rightarrow baja impedancia

Si $\frac{W}{h} \downarrow \Rightarrow$ líneas estrechas \Rightarrow alta impedancia

Valores típicos de $15\Omega < Z_0 < 100\Omega$

Circuitos en guía de ondas (guía de ondas rectangular)

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad k_x = \frac{m\mathbf{p}}{a} \quad k_y = \frac{n\mathbf{p}}{b} \quad k^2 = k_c^2 + \mathbf{b}^2$$

Modo dominante TE_{10}

$$E_y = E_0 \operatorname{sen} \frac{\mathbf{p}x}{a} e^{-j\mathbf{b}z} \quad E_x = 0$$

$$H_x = -\frac{E_0}{\mathbf{h}_{TE}} \operatorname{sen} \frac{\mathbf{p}x}{a} e^{-j\mathbf{b}z} \quad H_y = 0$$

$$\text{Factor de dispersión: } \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{l}_c} \right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}$$

$$\mathbf{l}_g = \frac{\mathbf{l}}{\sqrt{1 - (\mathbf{l} / \mathbf{l}_c)^2}} \quad \frac{1}{\mathbf{l}^2} = \frac{1}{\mathbf{l}_g^2} + \frac{1}{\mathbf{l}_c^2} \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{l}_0}{\sqrt{\mathbf{e}_r}}$$

$$\mathbf{b} = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}_g} \quad \mathbf{l}_{c_{TE_{10}}} = 2a \quad f_{c_{TE_{10}}} = \frac{c_0}{2a\sqrt{\mathbf{e}_r}}$$

$$P_T = \frac{1}{4} ab \frac{|E_0|^2}{\mathbf{h}_{TE}} \quad W, [|E_0|] = V_{pico} / m$$

$$\mathbf{h}_{TE} = \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{1 - (\mathbf{l} / \mathbf{l}_c)^2}} \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{h}_0}{\sqrt{\mathbf{e}_r}} = \frac{120\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{e}_r}}$$

Discontinuidades

$$E_y = E_y^+ + E_y^- = E_0^+ e^{-j\mathbf{b}z} (1 + \mathbf{r}(z)) \operatorname{sen} \frac{\mathbf{p}x}{a}$$

$$\mathbf{r}(z) \equiv \mathbf{r}(0) e^{j2\mathbf{b}z} \quad \mathbf{r}(0) = \frac{E^-}{E^+}$$

$$\bar{Z}(z) = \frac{1 + \mathbf{r}(z)}{1 - \mathbf{r}(z)} \quad S = \frac{1 + |\mathbf{r}|}{1 - |\mathbf{r}|}$$

$$P_L = P^+ - P^- = P^+ (1 - |\mathbf{r}|^2)$$

$$P^+ = \frac{1}{4} ab \frac{|E_0^+|^2}{\mathbf{h}_{TE}}$$

Un **diafragma** en guías de onda se puede modelar con una admitancia en paralelo entre dos líneas de transmisión.