Xarxes i Sistemes

Teoria de cues

Jesús Sanz Marcos

e-mail: jesus.sanz@upcnet.es

Barcelona, Spain. 22/12/2000

Processos de Markow

$$f_t(t) = l e^{-lt}$$

$$E\{t\} = \frac{1}{l} \quad E\{t^2\} = \frac{2}{l^2} \Rightarrow \mathrm{var}\{t\} = s_t^2 = \frac{1}{l^2}$$

v.a. amb memòria? $P\{t \le t\} = \frac{P\{t_0 \le t \le t_0 + t\}}{P\{t > t_0\}}$

Probabilidad k llamadas en T (*Poisson*):

$$P(X = k) = \frac{(lT)^k e^{-lT}}{k!}$$

K caras en N intentos (*Bernouilli*):

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\begin{array}{l} p \to 0 \\ n \to \infty \\ pn \to l \end{array} \quad \Rightarrow Bernouilli(np) \cong Poisson(np)$$

Processos de naixement i mort en equilibri:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \quad P_k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} l_i}{\prod_{i=1}^{k} m_i} P_0 \quad P_0 = \left(1 + \prod_{i=0}^{k-1} \frac{l_i}{m_{i+1}}\right)^{-1}$$

Sistemes

M/M/1

Règim arribades (M = markovià)/
Règim de servei (M = markovià)/
1 = nº de servidors, cua infinita

$$P_k = \frac{l^k}{m^k} P_0 \qquad P_0 = \left(\prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{l}{m}\right)^k\right)^{-1} = 1 - \frac{l}{m}$$

$r = \frac{l}{m}$: factor d'utilització

$r < 1 \Rightarrow$ sistema estable

$N = \frac{r}{1-r}$: número mig d'elements al sistema

$N_{serv} = r$

Teorema de Little: $N = lT$

$T = \frac{N}{l} = \frac{1/m}{1-r}$: temps mig en el sitema

$T_{serv} = \frac{N_{serv}}{l} = \frac{1}{m}$: temps mig estada al servidor

$$N_{cua} = N_{sist} - N_{serv} = \frac{r^2}{1-r}$$

$W = \frac{N_{cua}}{l} = \frac{r}{1-r}\frac{1}{m}$: temps mig d'estada a la cua

$$T = T_{serv} + W = \bar{x} + W \qquad \bar{x} = \frac{1}{m}$$

Taxa de treball = TC = $\frac{1}{m}$.

G/G/1

P_0: probabilitat que el sistema estigui desocupat.

El sistema ha treballat durant $(1-P_0)T_{obs}$.

Número mig d'unitats servides: $T_{obs}\frac{1-P_0}{m}$

M/M/∞

Infinits servidors

$$P_0 = e^{-l/m} \quad P_k = \frac{(l/m)}{k!} e^{-l/m}$$

$$E\{k\} = \frac{l}{m} = N_{SIST} \quad T = \frac{N}{l} = \frac{1}{m}$$

$T_{SIST} = T_{SERV} \Leftarrow$ no hi ha cua

M/M/m

M servidors, cua infinita

$$P_k = \begin{cases} \frac{(mr)^k}{k!} P_0, k \le m \\ \frac{m^m r^k}{m!} P_0, k \ge m \end{cases} \qquad r = \frac{l}{mm}$$

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(mr)^k}{k!} + \frac{m^m}{m!}\frac{r^m}{1-r}\right)^{-1}$$

$$P\{espera\} = \frac{m^m}{m!} P_0 \frac{r^m}{1-r}$$

M/M/1/1

$$P_0 = \frac{1}{1+r} \qquad P_1 = \frac{r}{1+r}$$

$$N_{SIST} = N_{SERV} = P_1$$

$$l_{cursada} = l P_0 = \frac{r}{1+r} = N_{SERV}$$

$$l_{in} = l_{cursada} = l_c$$

$T = \frac{N}{l_c} = \frac{1}{m}$: temps permanència al sistema

M/M/m/m

$$P_k = \frac{r^k}{k!} P_0$$