PRIMER CÁLCULO DE LA UNIDAD ASTRONÓMICA MEDIANTE EL TRÁNSITO DE VENUS

(adaptado y traducido de textos de Internet por Luis E.)

Hacia 1700 –gracias a Kepler- las distancias relativas entre los seis planetas conocidos estaban calculadas; solo faltaba determinar la distancia absoluta de uno de ellos al Sol para establecer el tamaño real del sistema solar. Edmund Halley (1656-1742) propuso –y recomendó a sus sucesores- cómo podrían calcular la distancia de la Tierra al Sol empleando el cálculo del paralaje (ver anexo) y registrando un tránsito de Venus frente al Sol, evento que ocurre un par de veces por siglo, y los próximos serían en 1761 y 1769. Para observar ese primer tránsito de Venus se organizaron más de 130 expediciones de observación en el mundo, pero Gran Bretaña y Francia estaba en guerra, y así los barcos con científicos fueron atacados por uno u otro bando; además, el tiempo no fue propicio y las medidas variaron entre 123 y 154 millones de kilómetros para la U.A. De ahí las expectativas de observar el tránsito de 1769, como la realizada desde Papeete (Tahití) y Vardö (Laponia) que expondremos a continuación.

- Mostrar texto citado -

1) ELEMENTOS DE LA UNIDAD ASTRONÓMICA. PARALAJE SOLAR (βs)

Tenemos el plano definido por tres puntos: el centro de la Tierra (O), el centro del Sol (C) y el centro de Venus (V).

Para ver esta película, debe
disponer de QuickTime™ y de
un descompresor TIFF (sin comprimir).

Dos observadores (A y B) situados sobre un mismo meridiano terrestre desde diferente latitud observan a Venus cuando transita frente al Sol; observarán dos líneas oscuras separadas sobre el disco solar (los puntos A´y B´ del diagrama).

Los triángulos APV y BPC tiene el mismo ángulo externo en P, por tanto la suma de los otros dos ángulos será igual en ambos triángulos:

(1) $\beta v + \beta_1 = \beta s + \beta_2$ por tanto:

(2) $\beta v - \beta s = \beta_2 - \beta_1 = \Delta\beta$, donde el ángulo $\Delta\beta$ mide la separación de las diferentes posiciones del trayecto de Venus sobre la cara del Sol.

Reorganizando esta ecuación, tenemos:

(3) $\Delta\beta = \beta s ((\beta v / \beta s) - 1)$

Sea r_e la distancia Tierra-Sol, y r_v la distancia Venus-Sol. De acuerdo a la fórmula del paralaje, el paralaje de Venus será:

$\beta v = AB / (r_e - r_v)$

Y el paralaje del Sol será:

$\beta s = AB / r_e$,

Y el cociente entre los dos anteriores datos:

(4) $\beta v / \beta s = r_e / (r_e - r_v)$.

Sustituyendo el valor $\beta v / \beta s$ de (4) en (3), tenemos:

(5) $\Delta\beta = \beta s ((r_e / (r_e - r_v)) - 1) = \beta s\, r_v / (r_e - r_v)$

$\Delta\beta$ es la separación entre las dos líneas, o sea, el desplazamiento paraláctico de Venus. Así obtenemos el paralaje solar (ángulo βs):

(6) $\beta s = \Delta\beta ((r_e / r_v) - 1)$

Ahora calculemos la razón r_v / r_e aplicando la tercera ley de Kepler, pues conocemos los períodos de Venus (224.7 días) y el de la Tierra (365.25 días):

(7) $(r_e / r_v)^3 = (365.25 / 224.7)^2$ Por lo tanto:

(8) $r_e / r_v = 1.38248$

Aplicando este resultado en la relación del paralaje solar (6), tenemos:

$\beta s = \Delta\beta ((r_e / r_v) - 1) = \Delta\beta (1.38248 - 1)$ Por lo tanto:

(9) $\boldsymbol{\beta s = 0.38248\, \Delta\beta}$

Finalmente, aplicando la definición de paralaje, la distancia Tierra-Sol r_e será dada

(10) $\boldsymbol{r_e = AB / \beta s}$

Ahora bien, para resolver (10) *necesitamos conocer la distancia AB entre los dos observadores y la medida de* $\Delta\beta$ (9) *necesaria para obtener el valor de* βs *y así deducir la distancia Tierra-Sol* (r_e)

2) DISTANCIA ENTRE LOS DOS OBSERVADORES A y B

Para ver esta película, debe
disponer de QuickTime™ y de
un descompresor TIFF (sin comprimir).

En el triángulo rectángulo que divide el triángulo isósceles RAB tenemos:

$\sin((\varphi_1 + \varphi_2) / 2) = (AB / 2) / R$

Por tanto la distancia AB será:

$AB = 2 R \sin((\varphi_1 + \varphi_2) / 2)$

En 1769 desde Vardo (en el polo norte, en una época donde estaba el Sol visible) y Tahití, se realizaron las observaciones del tránsito de Venus:

Para ver esta película, debe
disponer de QuickTime™ y de
un descompresor TIFF (sin comprimir).

Vardö (Laponia) y Papeete (Tahití) tienen igual longitud (meridiano) y sus latitudes son 70° 21' N and 17° 32' S. Así la geometría del problema cambia, y el ángulo a tener en cuenta (φ) será:

$\varphi = (90 - \varphi_1) + 90 + \varphi_2 = 127° 11'$

Empleando el radio terrestre R = 6378 km, calculamos

$AB = 2 R \sin(\varphi / 2) = 11425$ k

3) DISTANCIA $\Delta\beta$ ENTRE LOS DOS TRAYECTOS DE VENUS SOBRE EL SOL

3.1 Para calcular $\Delta\beta$ directamente, medimos el diámetro del Sol D y la separación de los dos trayectos $\Delta\beta$ (o sea A'B') sobre un dibujo o fotografía. El diámetro angular del Sol visto desde la Tierra es de 30' (minutos de arco o 30 / 60°). La separación de los trayectos se relaciona con el diámetro del Sol así:

$\Delta\beta$ / 30' = A'B' / D , entonces $\Delta\beta$ = (30') (A'B' / D)

Pero la fórmula requiere expresar en radianes el diámetro angular del Sol:

$\Delta\beta = (30\,\pi / 10800)\,(A'B' / D)$

$\Delta\beta = (\pi / 360)\,(A'B' / D)$

Para ver esta película, debe
disponer de QuickTime™ y de
un descompresor TIFF (sin comprimir).

Al medir directamente la distancia entre las líneas rectas 1 y 3, encontramos que:

$\Delta\beta$ = 1.5 mm y el diámetro del dibujo es

D = 70 mm, Por lo tanto:

$\Delta\beta = (\pi / 360)(1.5 / 70) = 0.00019$ radianes

Empleando la medida del paralaje solar tenemos:
$\square\beta s = 0.38248\ \Delta\beta$

Y según la fórmula del paralaje, $\square$la distancia Tierra-Sol es:
$\square r_e = AB / \beta s$;

Con los datos de la expedición de 1769 se obtiene el valor de
$r_e = 157\ \ 10^6$ km

3.2 El procedimiento anterior resulta impreciso por la medición de la separación de las dos líneas, por lo cercanas comparadas en el diámetro del Sol. Puede obtenerse un mejor resultado calculando la distancia $\Delta\beta$ con las longitudes de las cuerdas A_1A_2 and B_1B_2, que son los trayectos del tránsito de Venus observados desde A y B

Para ver esta película, debe disponer de QuickTime™ y de un descompresor TIFF (sin comprimir).

Con el T. de Pitágoras obtenemos la relación:
$B'S = 0.5\ \sqrt{(D^2 - B_1B_2^2)}$
$A'S = 0.5\ \sqrt{(D^2 - A_1A_2^2)}$
Para conocer A'B' calculamos la diferencia B'S - A'S
$A'B' = 0.5\ [\sqrt{(D^2 - B_1B_2^2)} - \sqrt{(D^2 - A_1A_2^2)}]$

Dividiendo por el diámetro D tenemos:
$A'B' / D = 0.5 \quad [\sqrt{(1 - (B_1B_2/D)^2)} - \sqrt{(1 - (A_1A_2/D)^2)}]$
Midiendo A_1A_2, B_1B_2 y D sobre la imagen del Sol obtenemos:
A_1A_2= 52 mm (línea 3), B_1B_2= 49 mm (línea 1) y D = 70 mm.

Entonces:
$A'B' / D = 0.5 \quad [\sqrt{(1 - (49 / 70)^2)} - \sqrt{(1 - (52 / 70)^2)}] = 0.02235$
y $\Delta\beta$ está dada por
$\Delta\beta = (31\,\pi / 360)\ 0.02235 = 0.00020$ radianes

El ángulo del paralaje solar será:
$\beta s = 0.38248\ \Delta\beta$

y aplicando la fórmula del paralaje solar obtenemos la distancia Tierra-Sol:
$\mathbf{r_e = AB / \beta s}$

Aplicando el dato de la expedición de 1769 y AB = 11425 km calculamos entonces:
$\mathbf{r_e = 149\ 10^{6}\ km}$ **.**

Dato que no obstante las dificultades para obtenerlo, se aproxima notablemente al valor aceptado hoy (149.6 10^6 km. calculado enviando ondas de radio a Venus).

Anexo. Fórmula del paralaje:

Por definición el paralaje del Sol es el ángulo β

Para ver esta película, debe
disponer de QuickTime™ y de
un descompresor TIFF (sin comprimir).

Por trigonometría tan β = R / r pero el ángulo β es pequeño y tan β puede aproximarse a β, medido en radianes. R es el radio de la Tierra y r es la distancia Tierra-Sol. Podemos calcular r con la relación □r = R / β

Referencias:

http://www.eso.org/public/outreach/eduoff/vt-2004/Education/EduSheet3.html

Kitty Ferguso. Measuring the Universe: Our Historic Quest to Chart the horizons of Space and Time, 1996

Albert Van Helden. Measuring the Universe: Cosmic Dimensions from Aristarchus to Halley. U Chicago, 1985

Manizales, Octubre de 2007

Luís Enrique García: Profesor del Programa de Filosofía, en la Universidad de Caldas.