Lección#4

Triángulos congruentes y triángulos similares

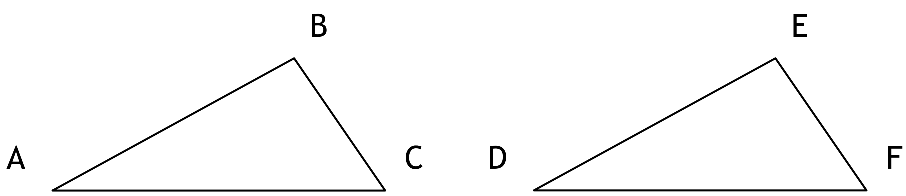
Objetivos

- Aplicar las propiedades de triángulos congruentes
- Aplicar las propiedades de congruencia
- Aplicar las propiedades de triángulos similares
- Aplicar el teorema de Pitágoras

Diariamente, nosotros vemos diferentes tipos de triángulos. Formas de triángulos como chiringas, techos, tortilla chips son algunos ejemplos. En esta sección, discutiremos como comparar los tamaños y las formas de dos triángulos dados. Para esta comparación, nosotros haremos deducciones acerca de las medidas de los respectivos lados y ángulos. Las proporciones y los triángulos se usan a menudo para medir distancias indirectamente. Por ejemplo usando proporciones Eratóstenes (275-196 AC) pudo estimar la circunferencia de la tierra con una exactitud notable. En un día soleado, podemos, usar las propiedades de los triángulos semejantes para estimar la alturas de un árbol quedándonos muy seguros en el suelo. Usando el teorema de Pitágoras demostrado por el matemático griego Pitágoras (alrededor de 500 AC), podemos calcular la longitud del tercer lado de un triángulo recto siempre que conozcamos las longitudes de dos lados

Triángulos congruentes

Dos figuras geométricas son congruentes si tienen la misma forma y la misma medida. A triángulos que tienen la misma área y la misma forma se les llama triángulos congruentes. Por ejemplo, si ΔABCy ΔDEF en la figura son congruentes, escribimos $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. La expresión la leemos como *"El triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF."*



Una forma para determinar si dos triángulos son congruentes es ver si un triángulo se puede mover sobre el otro triángulo en tal forma que encajen uno sobre el otro exactamente. Cuando escribimos $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, estaremos viendo como los vértices de un triángulo corresponden con los vértices del otro triángulo para obtener un ajuste perfecto. Llamamos a esta relación correspondencia de los puntos.

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

$A \leftrightarrow D$
$B \leftrightarrow E$
$C \leftrightarrow F$

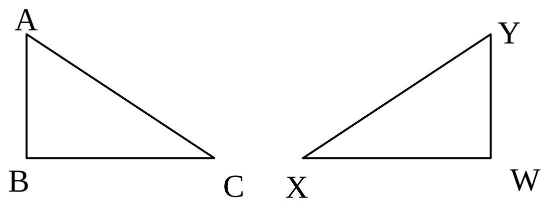
Cuando establecemos una correspondencia entre los vértices de dos triángulos congruentes, también podemos establecer la correspondencia entre los ángulos y los lados de los triángulos. Los ángulos correspondientes y lados correspondientes de triángulos congruentes son llamados las partes correspondientes. Las partes correspondientes de triángulos congruentes son siempre congruentes. Esto es que, las partes correspondientes de triángulos congruentes siempre tienen la misma medida. Para los triángulos congruentes de la figura anterior tenemos que

$m(\angle A) = m(\angle D)$ $\quad m(\angle B) = m(\angle E)$ $\quad m(\angle C) = m(\angle F)$

$m(\overline{BC}) = m(\overline{EF})$ $\quad m(\overline{AC}) = m(\overline{DF})$ $\quad m(\overline{AB}) = m(\overline{DE})$

Triángulos correspondientes
Dos triángulos son congruentes si y solo si sus vértices parean tal como los lados correspondientes y sus ángulos correspondientes son congruentes.

Ejemplo
Nombre las partes correspondientes de los triángulos congruentes



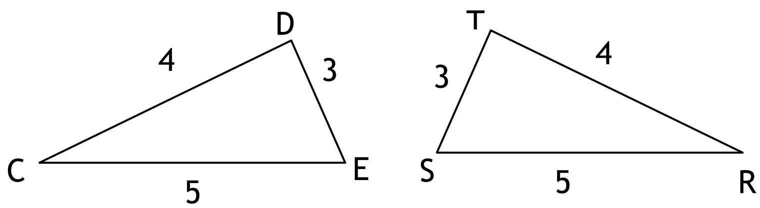
Solución
Los ángulos correspondientes son $\angle C$ y $\angle X$, $\angle B$ y $\angle W$, $\angle A$ y $\angle Y$.
Como los lados correspondientes son siempre opuestos a los ángulos correspondientes, los lados correspondientes son $\overline{BC}$ y $\overline{WX}$, $\overline{BA}$ y $\overline{WY}$, $\overline{AC}$ y $\overline{YX}$

Propiedades de triángulos congruentes

Muchas veces es posible concluir que dos triángulos son congruentes sin tener que presentar que los tres pares de ángulos correspondientes son congruentes y que sus tres pares de lados correspondientes son congruentes. Para hacer esto aplicamos una de las siguientes propiedades.

Propiedad LLL
Si tres lados de un triángulo son congruentes con tres lados de un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

Podemos demostrar que los triángulos de la próxima figura son congruentes por la propiedad LLL.

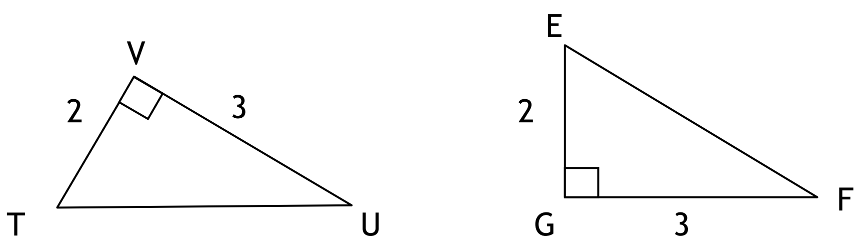


$m(\overline{CD}) = m(\overline{RT})$
$m(\overline{CE}) = m(\overline{RS})$
$m(\overline{DE}) = m(\overline{TS})$

Por lo tanto $\Delta CDE \cong \Delta RTS$.

Propiedad LAL
Si dos lados y un ángulo entre ellos de un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos lados y un ángulo entre ellos en un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

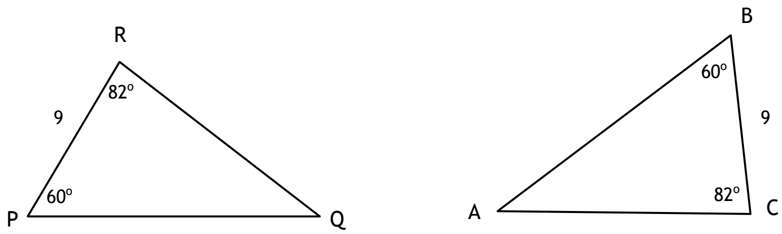
Podemos demostrar que los triángulos de la próxima figura son congruentes por la propiedad LAL.



$m(\overline{TV}) = m(\overline{EG})$
$m(\overline{VU}) = m(\overline{GF})$
$m(\angle V) = m(\angle G)$
Por lo tanto $\Delta TVU \cong \Delta EGF$.

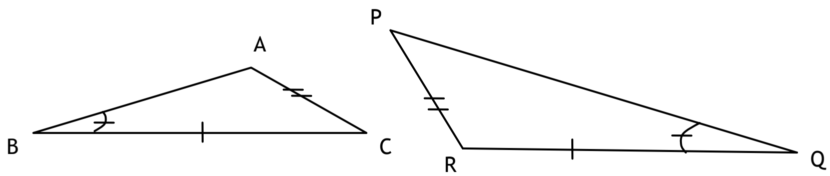
Propiedad ALA
Si dos ángulos y un lado entre ellos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos ángulos y un lado entre ellos a un segundo triángulo, los triángulos son congruentes.

Podemos demostrar que los triángulos de la próxima figura son congruentes por la propiedad ALA.



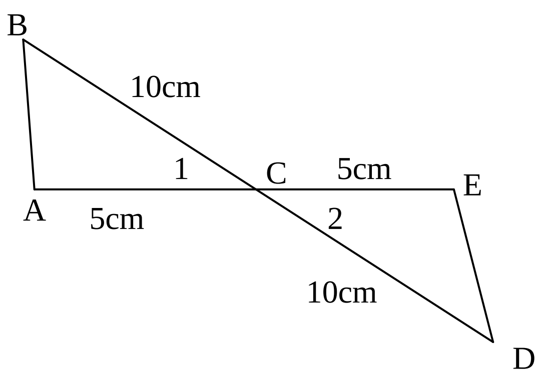
$m(\angle P) = m(\angle B)$
$m(\angle R) = m(\angle C)$
$m(\overline{PR}) = m(\overline{BC})$

Por lo tanto $\Delta PRQ \cong \Delta BCA$.
NOTA: N hay una propiedad de la forma SSA. Para que podamos observarlo, considere el triángulo en la próxima figura. Dos lados y un ángulo del triángulo ΔABC son congruentes con dos lados y un ángulo del triángulo ΔPQR. Pero los triángulos no son congruentes.



Las marcas indican las partes congruentes. Esto es, que los lados con una marca tienen la misma medida, los lados con dos marcas tienen la misma medida y los ángulos con una marca tienen la misma medida.

Ejemplo
Explique por qué los triángulos de la figura son congruentes.



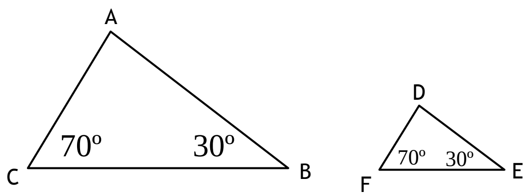
Solución
Como los ángulos opuestos por el vértice son congruentes, tenemos que $m\ \angle 1 = m\ \angle 2$.

De la figura se puede observar que $m\ \overline{AC} = m\ \overline{CE}$ y $m\ \overline{BC} = m\ \overline{CD}$.

Tenemos dos lados y un ángulo entre ellos que son congruente, respectivamente con dos lados y un ángulo entre ellos. Con la información recopilada podemos concluir que los triángulos $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ son congruentes por la propiedad LAL.

Triángulos semejantes.

Hemos visto que triángulos congruentes tienen la misma forma y el mismo tamaño. Triángulos semejantes tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Esto es, un triángulo es un modelo a escala exacto a otro triángulo. Si los triángulos en la figura son semejantes, podemos decir $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (el símbolo "~" lo leemos como "es semejante a")



Nota: Los triángulos congruentes siempre son semejantes, pero los triángulos semejantes no son siempre congruentes.

Triángulos semejantes
Dos triángulos son semejantes si y solo si sus vértices pueden parearse de tal manera que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

Ejemplo
Si los $\triangle PQR \sim \triangle CDE$, nombre los ángulos congruentes y los lados que son proporcionales.

Solución
Cuando escribimos $\triangle PQR \sim \triangle CDE$, la correspondencia entre los ángulos está establecida.

$$\triangle PQR \sim \triangle CDE$$

$\angle P \cong \angle C$, $\angle Q \cong \angle D$, $\angle R \cong \angle E$.
El largo de los lados correspondientes son proporcionales. (Para simplificar la notación escribiremos $PQ = m\ \overline{PQ}$ y de la misma forma para los demás segmentos)

$$\frac{PQ}{CD} = \frac{QR}{DE}, \quad \frac{QR}{DE} = \frac{PR}{CE}, \quad \frac{PQ}{CD} = \frac{PR}{CE}$$

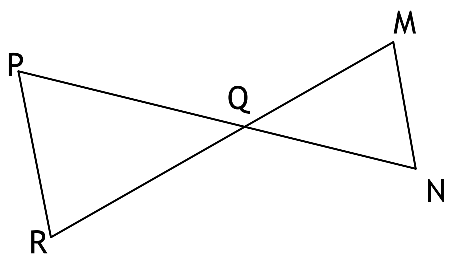
Propiedades de triángulos semejantes
Si dos triángulos son semejantes, todos los pares de lados correspondientes son proporcionales.

Es posible concluir que dos triángulos son semejantes sin tener que demostrar que los tres pares de ángulos correspondientes son congruentes y que los largos de los tres pares de lados correspondientes son proporcionales.

Teorema de triángulos semejantes AAA
Si los ángulos de un triángulo son congruentes con los correspondientes ángulos de otro triángulo entonces, los triángulos son similares.

Ejemplo

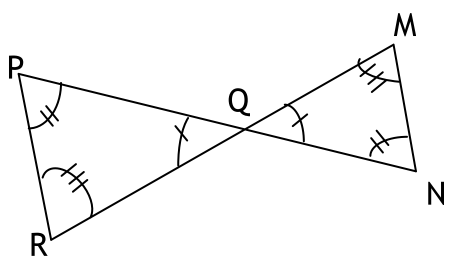
Determine si los triángulos son semejantes. En la figura $\overline{PR} \parallel \overline{MN}$. ¿Son los $\Delta PQR \sim \Delta NQM$?



Solución

Los ángulos opuestos son congruentes $\angle PQR \cong \angle NQM$. De la figura vemos que $\overleftrightarrow{PN}$ es transversal de los segmentos $\overline{PR}$, $\overline{MN}$. Por lo tanto los ángulos alternos internos son congruentes, tenemos que $\angle RPQ \cong \angle MNQ$.

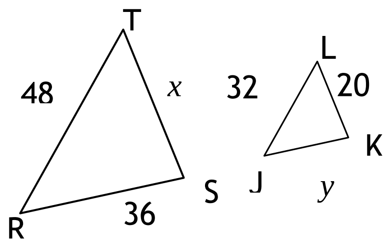
De la misma forma tenemos que $\overleftrightarrow{RM}$ es transversal de los segmentos $\overline{PR}$, $\overline{MN}$. Por lo tanto los ángulos alternos internos son congruentes, tenemos que $\angle QRP \cong \angle QMN$.



En resumen, tenemos que los ángulos correspondientes del ΔPQR son congruentes con los ángulos del ΔNQM . Por la propiedad de triángulos semejantes AAA podemos concluir que $\Delta PQR \sim \Delta NQM$.

Ejemplo

Determine el largo de los lados del triángulo. En La figura los $\Delta RST \sim \Delta JKL$. Encuentre el valor de *x* y *y*.



Solución

Como $\Delta RST \sim \Delta JKL$, los lados correspondientes son proporcionales. Para determinar x escribimos las proporciones correspondientes donde solo x sea la desconocida.

$$\frac{RT}{JL} = \frac{ST}{KL}$$

$$\frac{48}{32} = \frac{x}{20}$$

$$48 \quad 20 = 32 \quad x$$

$$960 = 32x$$

$$30 = x$$

$$x = 30$$

Para determinar el valor de y escribimos las correspondencias donde solo y sea la desconocida

$$\frac{RT}{JL} = \frac{RS}{JK}$$

$$\frac{48}{32} = \frac{36}{y}$$

$$48 \quad y = 32 \quad 36$$

$$48y = 1152$$

$$y = 24$$

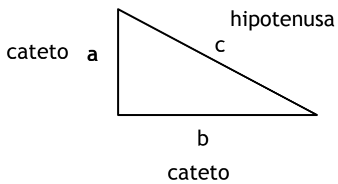
El teorema de Pitágoras y los triángulos especiales

Objetivos

- Teorema de Pitágoras
- Triángulos $45° - 45° - 90°$
- Triángulos $30° - 60° - 90°$

Teorema de Pitágoras

Recordemos, el triángulo rectángulo es un triángulo que uno de sus ángulos es recto (mide 90^o). En un triángulo rectángulo, el lado más largo es llamado la hipotenusa. Este es el lado opuesto al ángulo de 90^o. Los otros dos lados son llamados catetos. Es una práctica común utilizar la variable *c* para representar el largo de la hipotenusa y las variables *a* y *b* para representar los largos de los catetos, como se presenta en la figura.

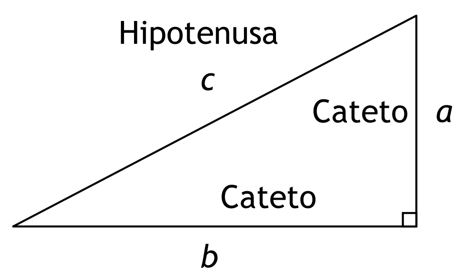


Si conocemos el largo de dos lados del triángulo rectángulo, podemos encontrar el largo del tercer lado usando la fórmula que conocemos como el triángulo de Pitágoras.

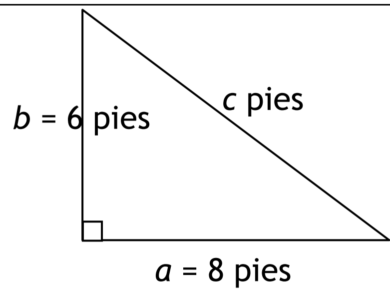
Teorema de Pitágoras
Si *a* y *b* representa el largo de catetos de un triángulo rectángulo y *c* representa el largo de la hipotenusa, entonces
$a^2 + b^2 = c^2$

En palabras, el teorema de Pitágoras lo que quiere decir es: "*en cualquier triangulo rectángulo, la suma de los catetos al cuadrados es igual a la hipotenusa al cuadrado*"

Teorema de Pitágoras
Si la longitud de la hipotenusa es *c* y las longitudes de los catetos son *a* y *b* entonces
$a^2 + b^2 = c^2$



Ejemplo
Construcción de un recorrido de aventura de cuerdas elevadas
El constructor del recorrido de aventura de cuerdas elevadas quiere asegurar uno de los postes fijando un cable a una altura de 6 pies de alto a una estaca de anclaje que está 8 pies de la base del poste. ¿De qué largo debe ser el cable?
Solución
Para poder entender el problema representemos el problema mediante un dibujo



c representa la hipotenusa de un triangulo rectángulo por lo tanto podemos utilizar el teorema de Pitágoras con *a* = 8 y *b* = 6 para resolver el problema.

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 8^2 + 6^2$

$c^2 = 64 + 36$

$c^2 = 100$

Para encontrar el valor de *c* se debe extraer la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.

$c^2 = 100$

$c = \sqrt{100}$

$c = 10$

El cable de soporte debe tener una longitud de 10 pies.

Ejemplo

Un triangulo con lados 5, 12 y 13 metros, ¿El triángulo es triángulo rectángulo?

Solución

Usemos el teorema de Pitágoras para responder esta pregunta. Como el lado más largo es 13 debería ser la hipotenusa por lo tanto los otros dos valores deben ser los catetos.

No importa cual valor asignamos *a* o *b*.

$c^2 = a^2 + b^2$

$13^2 \stackrel{?}{=} 5^2 + 12^2$

$169 \stackrel{?}{=} 25 + 144$

$169 \stackrel{?}{=} 169$

Como 169 = 169 tenemos que el triángulo es triángulo rectángulo.

Ejemplo

Un triangulo con lados 2, 2 y 3 metros, ¿El triángulo es triángulo rectángulo?

Solución

Usemos el teorema de Pitágoras para responder esta pregunta. Como el lado más largo es 3 debería ser la hipotenusa por lo tanto los otros dos valores deben

ser los catetos.
No importa cual valor asignamos *a* o *b*.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$3^2 \stackrel{?}{=} 2^2 + 2^2$$

$$9 \stackrel{?}{=} 4 + 4$$

$$9 \stackrel{?}{=} 8$$

Como $9 \neq 8$ tenemos que el triángulo no es triángulo rectángulo.

Ejemplos

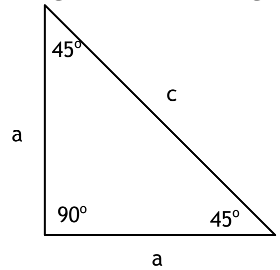
Recordemos que si en matemática tenemos una oración de la forma *si p entonces q* a la oración *si q entonces p* es llamado su converso. Los conversos de algunas oraciones son ciertas, mientras que otras son falsas. Es interesante notar que el converso del teorema de Pitágoras es cierto.

Converso del teorema de Pitágoras
Si un triángulo tiene lados *a*, *b*, y *c*, tal que $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

Ejemplos

Triángulos 45º - 45º - 90º

En un triángulo rectángulo isósceles es un triángulo rectángulo con dos lados iguales. Un triángulo rectángulo isósceles, los ángulos tienen medidas 45^o,45^o y 90^o. Si conocemos el largo de uno de los catetos del triángulo rectángulo podemos utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar el largo de la hipotenusa. Como vemos en la próxima figura el triángulo es un triángulo rectángulo isósceles.



$$a^2 + b^2 = c^2$$
$a^2 + a^2 = c^2$; los catetos tienen la misma medida
$2a^2 = c^2$; simplificación de términos semejantes

$\sqrt{2a^2} = \sqrt{c^2}$; se extrae la raíz cuadrada a ambos lados
$a\sqrt{2} = c$

Este resultado es una fórmula que podemos utilizar para determinar el largo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, dado uno de los catetos.

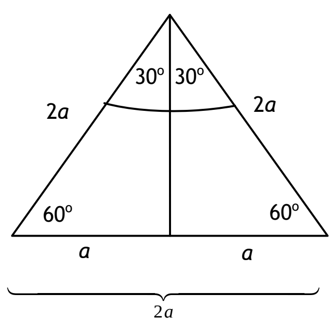
Triángulo rectángulo isósceles
El largo c de la hipotenusa de un triángulo isósceles es $\sqrt{2}$ veces el largo de uno de los catetos.
$c = a\sqrt{2}$

NOTA: La fórmula $c = a\sqrt{2}$ también puede escribirse como $c = \sqrt{2}a$. Con esta fórmula debemos tener cuidado porque solo el dos está bajo el símbolo de la raíz cuadrada.

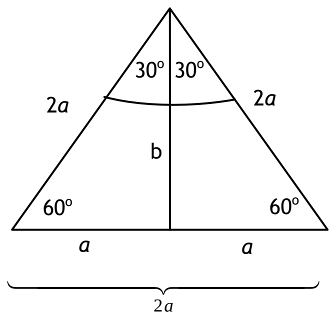
Ejemplos

Los triángulos 30º-60º-90º

Recordemos que el triángulo equilátero es un triángulo donde sus tres lados tienen el misma medida y los tres ángulos son de 60º. Supongamos que tenemos un triángulo equilátero donde sus lados miden 2*a* unidades



Nota: En un triángulo 30º–60º–90º el lado más corto es opuesto al ángulo de 30º y el lado más largo es opuesto al ángulo de 60º
Podemos encontrar otra relación importante entre los lados de un triángulo 30º–60º–90º, si tenemos que la altura es b. Comenzamos aplicando el teorema de Pitágoras e un triángulo 30º–60º–90º.



$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a^2 + b^2 = (2a)^2$$
$$a^2 + b^2 = 4a^2$$
$$b^2 = 3a^2$$
$$b = a\sqrt{3}$$

Podemos observar que el lado más largo de un triángulo 30º–60º–90º es $\sqrt{3}$ veces tan largo como el lado más corto.

Nota: La fórmula $b = a\sqrt{3}$ se puede escribir también como $b = \sqrt{3}a$. Pero notemos que solo el tres está bajo el símbolo de la raíz cuadrada.

Triángulos 30º–60º–90º

Para cualquier triángulo 30º–60º–90º

1. El largo *c* de la hipotenusa es dos veces el largo de *a* que está representado por el lado más corto.
   $c = 2a$
2. El largo de *b* es $\sqrt{3}$ veces que el largo de *a* el lado más corto.
   $b = a\sqrt{3}$

Ejemplos