

1 Caracterizări în timp și frecvență

Notatii și definiții de bază

Clasa de modele **ARMAX**

$$\underbrace{A(q^{-1})y[n]}_{\text{AR}} = \underbrace{B(q^{-1})u[n]}_{\text{X}} + \underbrace{C(q^{-1})e[n]}_{\text{MA}}$$

Auto-Regresiv

**Control
eXogen**

**Medie
Alunecătoare**

• q^{-1} ➡ Operatorul de întârziere cu un pas.

$$(q^{-1}f)[n] = f[n-1] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Polinoame

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc}$$

☞ intrarea nu se transmite instantaneu la ieșire

☞ zgomotul se transmite instantaneu la ieșire

Filtru de zgomot

$$G \equiv C/A$$

Filtru de sistem

$$H \equiv B/A$$

u

y

Zgomotul alb

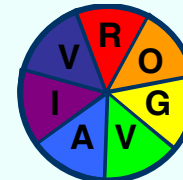
e

proces stocastic total necorelat,
impredictibil

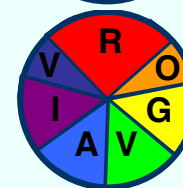
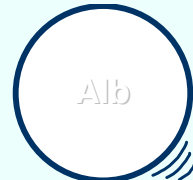
Zgomotul colorat

v

zgomot alb filtrat



⇒



⇒



1.4



1 Caracterizări în timp și frecvență

Notatii și definiții de bază

Operatorul de **mediere statistică**

$$E\{y[n]\}$$

Media **statistică** a ieșirii procesului, pe ansamblul realizărilor, la momentul nT_e .

Auto-covarianță & Covarianță

$$r_u[k] \stackrel{\text{def}}{=} E\{u[n]u[n-k]\}$$

$$r_{uy}[k] \stackrel{\text{def}}{=} E\{u[n]y[n-k]\}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$

Arată **gradul de corelare** dintre procese sau realizări ale aceluiași proces.

Ipoteza Ergodică

Media **temporală** a oricărei realizări suficient de îndelungate.

$$E\{y[n]\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y[n]$$

Transformată Fourier

Directă

$$X(e^{j\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n]e^{-j\omega n}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Inversă

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})e^{+j\omega n} d\omega, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

determinist

Densitate Spectrală de Putere

Arată **conținutul în frecvență** al proceselor.

$$\phi_{u,uy}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_{u,uy}[k]e^{-j\omega k}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$r_{u,uy}[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \phi_{u,uy}(\omega)e^{+j\omega k} d\omega, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

nedeterminist

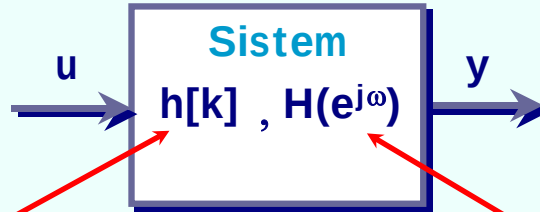
1 Caracterizări în timp și frecvență

Timp

Analiza tranzitorie

- Pentru estimarea timpului mort și/sau a funcției pondere.
- Utilitate redusă în IS.

☛ determinist



Frecvență

Analiza în frecvență

- Pentru estimarea răspunsului în frecvență.

$$y \equiv h * u \iff Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})U(e^{j\omega})$$

$$u[n] = u_0 \sin(\omega_0 n)$$

$$y[n] = y_0 \sin(\omega_0 n + \varphi)$$

$$y_0 = u_0 |H(e^{j\omega_0})|$$

$$\varphi = \arg H(e^{j\omega_0})$$

☛ Se poate trasa pentru diferite valori ale lui ω_0 .

☛ Dificil de estimat!

O strategie

- Pentru: $\omega_0 = 2\pi m_0 / n_0 \mid m_0, n_0 \in \mathbb{N}^*$
 $N = 2\pi m_0 K / \omega_0 = Kn_0$

înmulțire cu sin și cos

☛ Rezultat sensibil la perturbații.

$$\begin{cases} y_s[n] \stackrel{\text{def}}{=} y[n] \sin(\omega_0 n) = y_0 \sin(\omega_0 n + \varphi) \sin(\omega_0 n) = \frac{y_0}{2} \cos \varphi - \frac{y_0}{2} \cos(2\omega_0 n + \varphi) \\ y_c[n] \stackrel{\text{def}}{=} y[n] \cos(\omega_0 n) = y_0 \sin(\omega_0 n + \varphi) \cos(\omega_0 n) = \frac{y_0}{2} \sin \varphi + \frac{y_0}{2} \sin(2\omega_0 n + \varphi) \end{cases}$$

mediere temporală

$$\begin{cases} \bar{y}_s = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_s[n] = \frac{y_0}{2} \cos \varphi \\ \bar{y}_c = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_c[n] = \frac{y_0}{2} \sin \varphi \end{cases}$$

$$\varphi = \text{atan2} \left(\frac{\bar{y}_c}{\bar{y}_s} \right) = \text{atan2} \left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cos(\omega_0 n)}{\sum_{n=0}^{N-1} y[n] \sin(\omega_0 n)} \right)$$

1 Caracterizări în timp și frecvență

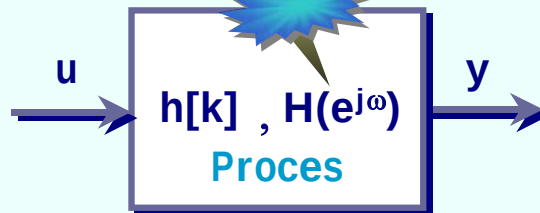
Timp

Analiza bazată pe corelație

- Pentru estimarea secvențelor de (auto-)covarianță.

nedeterminist

v



Frecvență

Analiza spectrală

- Pentru estimarea densităților spectrale de putere.

Ce devine echivalența:

$$y \equiv h * u \iff Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})U(e^{j\omega})$$

Operatorul de mediere statistică este actorul principal.

$$r_{uy}[k] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h[m] r_u[k - m]$$

$$r_y[k] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} h[p] h[q] r_u[k + p - q]$$

$$\phi_{uy}(\omega) = H(e^{j\omega}) \phi_u(\omega)$$

$$\phi_y(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 \phi_u(\omega)$$

Transferul densității spectrale prin sisteme liniare

O strategie complementară

$$E \times y[n - k]$$

$$A(q^{-1})y[n] = B(q^{-1})u[n] + C(q^{-1})e[n]$$

← Ecuație cu diferențe.

☛ Soluție analitică sau recursivă pentru modelele uzuale.

$$A(q^{-1})r_y[k] = B(q^{-1})r_{uy}[k] + C(q^{-1})r_{ey}[k]$$

← Ecuație cu secvențe de covarianță.

$\forall k \in \mathbb{N}$



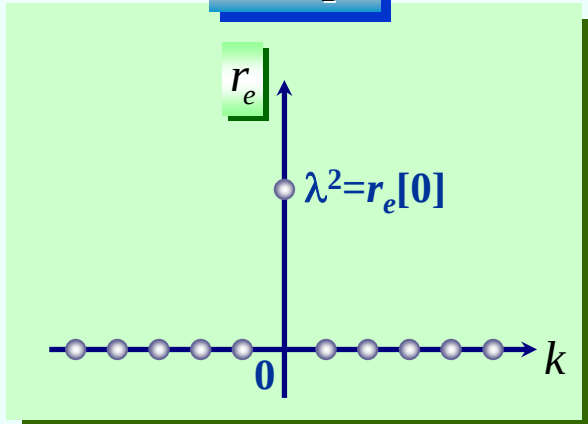
1.7



❶ Caracterizări în timp și frecvență

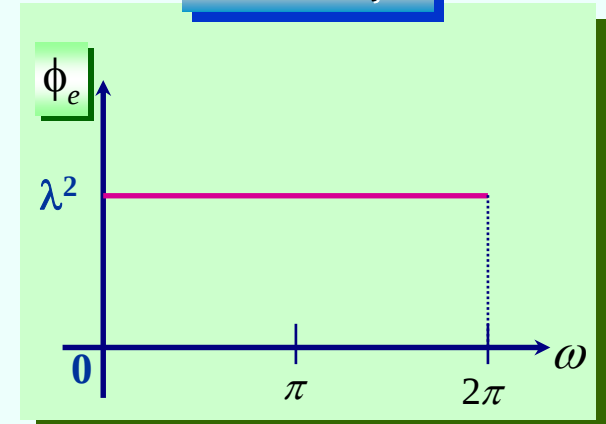
👉 Caracterizări ale zgomotului alb

Timp



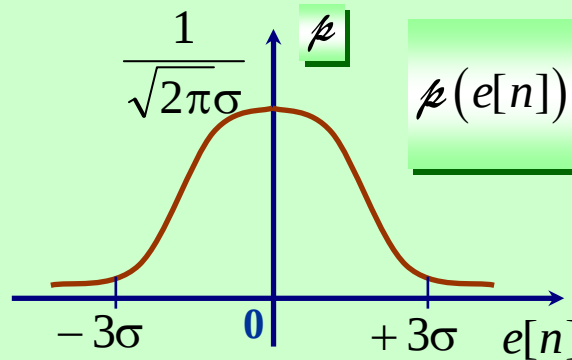
$$r_e[k] = E\{e[n]e[n \pm k]\} = \lambda^2 \delta_0[k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Frecvență



$$\phi_e(\omega) = \lambda^2, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Densitate de probabilitate Gaussiană



$$p(e[n]) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{e^2[n]}{2\sigma^2}\right], \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

① Caracterizări în timp și frecvență

☞ Probleme de simulare

Contextul de lucru

2 modele

$$H_1(q^{-1}) = \frac{b_1 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1}}$$

ordin 1

$$H_2(q^{-1}) = \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2}}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}}$$

ordin 2

(45)

Programe disponibile

ISLAB_1A

- Apel: **islab_1a(C,A,N,tau_max,nr)** ;
- Modul de calcul al valorilor adevărate și estimate pentru secvențe de auto-covarianță obținute cu ajutorul unui proces ARMA[1,1]. Sunt trasate graficele secvențelor obținute. Este de asemenea trasată o realizare a zgomotului colorat rezultat. Argumentele funcției sunt următoarele:
 - C** polinomul MA (vector [1 c]);
 - A** polinomul AR (vector [1 a]);
 - tau_max** pivotul maxim al secvențelor de auto-covarianță (implicit: 50);
 - nr** numărul realizărilor de generat (implicit: 1).

❶ Caracterizări în timp și frecvență

Programe disponibile

👉 Probleme de simulare



ISLAB_1B

- Apel: **islab_1b(x,y,SNR)** ;
- Modul care simulează dependența de SNR a polilor și zerourilor unui model ARMA[2,2], determinat prin echivalarea sa cu un model AR afectat de 2 zgomote necorelate (ca în **Exercițiul 1.4**). Argumentele funcției sunt:
 - x** partea reală a polilor modelului AR (implicit: 0.5);
 - y** partea imaginară a polilor modelului AR (implicit: 0.5);
 - SNR** raportul semnal-zgomot (implicit: 3).

Rutine disponibile

D_SPEKTR

- Apel: **[w,fi]=d_spektrum(A,B,sigma2)** ;
 - Rutină auxiliară de evaluare a spectrului ieșirii unui filtru liniar discret stimulat cu un zgomot alb. Argumentele funcției sunt următoarele:
 - A** numitorul funcției de transfer a filtrului (polinom);
 - B** numărătorul funcției de transfer a filtrului (polinom);
 - Sigma2** varianța zgomotului alb de la intrare.
- Funcția returnează:
- w** axa pulsațiilor (ω);
 - fi** densitatea spectrală ϕ_y a zgomotului colorat (de ieșire).

❶ Caracterizări în timp și frecvență

☞ Probleme de simulare

Rutine disponibile

NOISE

- Apel: **noise(operation)** ;
- Modul de generare și simulare a zgomotelor colorate produse de modelele stocastice (45). Argumentul funcției (**operation**) este un șir de caractere din mulțimea următoare:

```
close_noise  
close_noise_def  
init_noise  
move_p  
move_z  
moved_p  
moved_z  
moving_p  
moving_z  
noiseclear  
show  
system  
winit_noise
```

(implicit)

❶ Caracterizări în timp și frecvență

👉 Probleme de simulare



Rutine disponibile

SPEFAC

- Apel: **[a, 12]=spefac(r) ;**
- Rutină auxiliară de rezolvare a *Problemei factorizării spectrale*. Aceasta constă în determinarea unui polinom:

$$A(z) \stackrel{\text{def}}{=} z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

și a varianței λ^2 cu proprietatea:

$$\lambda^2 A(z) A(z^{-1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n r[k] (z^k + z^{-k}), \quad (46)$$

pentru o secvență de covarianță $\{r[0], r[1], \dots, r[n]\}$. În mod normal, această problemă se poate formula pentru orice secvență de numere $\{r[0], r[1], \dots, r[n]\}$, cu condiția să fie *pozitiv definită*, adică verificând inegalitatea:

$$|r[k]| \leq r[0], \quad \forall k \in \overline{0, n}. \quad (47)$$

Problema factorizării spectrale (46) este rezolvată în cazul determinării unui model AR[n] atunci când este stimulat de un zgomot alb și se cunoaște densitatea spectrală de putere a ieșirii (deci și secvența de auto-covarianță a ieșirii, cu ajutorul formulei de inversiune (12)).

Argumentul funcției **spefac** este **r** – secvența de (auto-)covarianță (vector).

Funcția returnează:

a coeficienții polinomului AR (vector);

12 varianța zgomotului alb λ^2 cu care trebuie stimulat modelul AR pentru a obține la ieșire exact secvența de auto-covarianță **r**.

① Caracterizări în timp și frecvență

👉 Probleme de simulare

3 p



Problema 1.1

1p

Pentru a rezolva punctele următoare, se va utiliza funcția **NOISE**.

- 0.4 p** Să se testeze grafic dacă filtrul obținut în **Exercițiul 1.3** (de tipul lui H_1 din definiția (45)) este corect.
- 0.1 p** Să se varieze polii filtrului H_2 din definiția (45) și să se comenteze rezultatele obținute cu ajutorul funcției **NOISE**.
- 0.1 p** Unde trebuie amplasați polii filtrului H_2 pentru a obține un filtru trece jos?
- 0.3 p** Unde trebuie amplasați polii filtrului H_2 pentru a obține un vîrf de rezonanță la $\omega=1$? Ce se poate spune despre conținutul în frecvență al semnalului analizînd realizările procesului?
- 0.1 p** Ce efect observați atunci cînd filtrul H_2 are zeroul în vecinătatea cercului unitar?

❶ Caracterizări în timp și frecvență

👉 Probleme de simulare



Problema 1.2 1p

Să se utilizeze modulul de simulare **ISLAB_1A** pentru a simula un proces stocastic de model ARMA[1,1]. De exemplu, pentru a genera un process de tip AR[1] cu un singur pol în -0.9 , se folosește sintaxa:

`islab_1a(1, [1 0.9]) ;`

În mod implicit, modulul de simulare alege: **`N=100`**, **`tau_max=50`** și **`nr=1`**.

0.4 p Să se analizeze maniera în care estimațiile funcțiilor de covarianță variază cu **`N`** (numărul de eșantioane) și **`tau_max`** (pivotalul maximal al secvenței de auto-covarianță) pentru diferite locații ale polilor.

0.3 p Să se verifice faptul că estimațiile funcțiilor de covarianță tind către valorile adevărate pentru procese de tip AR[1] și MA[1], pe măsură ce **`N`** tinde către infinit.

0.3 p Să se verifice corectitudinea rezultatelor obținute la **Exercițiile 1.1 și 1.2**.

① Caracterizări în timp și frecvență

☞ Probleme de simulare

Problema 1.3

1p

Se consideră un proces stocastic asociat unui model AR[2] cu două surse de zgomot (ca în contextul **Exercițiului 1.4**), pe care dorim să îl echivalăm cu un proces descris de un model ARMA[2,2], avînd o singură sursă de zgomot. Pentru simulările care urmează, se va utiliza modulul **ISLAB_1B**.

0.4 p Să se analizeze maniera în care variază polii și zerourile modelului ARMA atunci cînd variază SNR. În acest context, SNR este definit prin raportul dintre varianța semnalului util x și varianța zgomotului aditiv v (cu notațiile din **Exercițiul 1.4**).

0.6 p Să se studieze cazurile în care SNR tinde la infinit (semnalul domină zgomotul) și SNR tinde la zero (zgomotul domină semnalul). Să se comenteze modificările înregistrate de densitățile spectrale.