



# Sumar

- ✓ **Bibliografie**
- ✓ ① Organizarea temelor de laborator
- ✓ ② Caracterizări în timp și frecvență ale proceselor stocastice
- ✓ ③ Identificarea modelelor neparametrice
- ✓ ④ Identificare parametrică prin Metoda Celor Mai Mici Pătrate (MCMMP)
- ✓ ⑤ Identificare parametrică prin Metoda Variabilelor Instrumentale (MVI)
- ✗ ⑥ Identificare parametrică prin Metoda Minimizării Erorii de Predicție (MMEP)
- ⑥ Identificare recursivă

# 5 Identificare parametrică prin MMEP

## Contextul de lucru

- Modelele de regresie liniară având **vectorul regresorilor nemăsurabil** necesită **metode de identificare mai complexe**.
- Astfel de modele se regăsesc atât în clasa **ARMAX**, cît și (mai ales) în clasa **RSISO**.

### Exemple

#### ARMAX[na,nb,nc]

$$\begin{cases} A(q^{-1})y[n] = B(q^{-1})u[n] + C(q^{-1})e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2 \delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$\phi^T[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -y[n-1] & -y[n-2] & \cdots & -y[n-na] & | & u[n-1] & u[n-2] & \cdots & u[n-nb] & | & \cdots \\ 3 \text{ componente,} & & & & & & & & & & & & \cdots \\ \text{ca și vectorul parametrilor} & & & & & & & & & & & & e[n-1] & e[n-2] & \cdots & e[n-nc] \end{bmatrix}$$

$$\theta^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{na} & | & b_1 & b_2 & \cdots & b_{nb} & | & c_1 & c_2 & \cdots & c_{nc} \end{bmatrix}$$

#### BJ[nb,nc,nd,nf]

#### (Box Jenkins)

$$\begin{cases} y[n] = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u[n] + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2 \delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

⌚ Ultima componentă  
nu este măsurabilă.

$$\phi^T[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -y[n-1] & -y[n-2] & \cdots & -y[n-nd-nf] & | & u[n-1] & u[n-2] & \cdots & u[n-nb-nd] & | & \cdots \\ 3 \text{ componente} & & & & & & & & & & & & \cdots \\ & & & & & & & & & & & & e[n-1] & e[n-2] & \cdots & e[n-nc-nf] \end{bmatrix}$$

$$\theta^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{nb} & | & c_1 & c_2 & \cdots & c_{nc} & | & d_1 & d_2 & \cdots & d_{nd} & | & f_1 & f_2 & \cdots & f_{nf} \end{bmatrix}$$

4 componente

# 5 Identificare parametrică prin MMEP

## Contextul de lucru

### 2 metode de identificare

#### MCMMPE Extinsă (MCMMPE)

mai puțin precisă,  
dar mai simplă

- Strategia generală de identificare:

- ① Estimarea zgomotului care intervine în componenta nemăsurabilă cu ajutorul unui model având vectorul regresorilor complet măsurabil (dar mai puțin precis).
- ② Determinarea parametrilor originali ai modelului cu ajutorul vectorului regresorilor având componenta nemăsurabilă estimată în etapa precedentă.

- Tipurile de modele cu care se operează în cadrul lucrării de laborator:

#### ARMAX[n<sub>a</sub>,n<sub>b</sub>,n<sub>c</sub>]

$$\begin{cases} A(q^{-1})y[n] = B(q^{-1})u[n] + C(q^{-1})e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2 \delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

#### Metoda Minimizării Erorii de Predicție (MMEP)

mai precisă,  
dar mai complexă

- Strategia generală de identificare:
  - ① Inițializarea procesului recursiv din etapa următoare folosind MCMMPE.
  - ② Determinarea recursivă a parametrilor modelului, plecînd de la inițializarea din etapa precedentă și folosind o metodă de optimizare (Metoda Gauss-Newton – MGN).

#### BJ[n<sub>b</sub>,n<sub>c</sub>,n<sub>d</sub>,n<sub>f</sub>]

$$\begin{cases} y[n] = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u[n] + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e[n] \\ E\{e[n]e[m]\} = \lambda^2 \delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$



# 5 Identificare parametrică prin MMEP

## Contextul de lucru

MCMMPE

- ① Estimarea zgromotului care intervine în componenta nemăsurabilă cu ajutorul unui model aproximant de tip ARX.

ARMAX[na,nb,nc]

⇒ Împărțire infinită trunchiată.

BJ[nb,nc,nd,nf]

$$\frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})} \cong A_\alpha(q^{-1}) = 1 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_{n\alpha} q^{-n\alpha}$$

$$\frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} \cong B_\beta(q^{-1}) = 1 + \beta_1 q^{-1} + \dots + \beta_{n\beta} q^{-n\beta}$$



$$\min\{n\alpha, n\beta\} \gg \max\{na, nb, nc\}$$

$$\frac{D(q^{-1})}{C(q^{-1})} \cong A_\alpha(q^{-1}) = 1 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_{n\alpha} q^{-n\alpha}$$

$$\frac{B(q^{-1})D(q^{-1})}{C(q^{-1})F(q^{-1})} \cong B_\beta(q^{-1}) = 1 + \beta_1 q^{-1} + \dots + \beta_{n\beta} q^{-n\beta}$$



$$\min\{n\alpha, n\beta\} \gg \max\{nb, nc, nd, nf\}$$

ARX[nα,nβ]

$$\begin{cases} A_\alpha(q^{-1})y[n] = B_\beta(q^{-1})u[n] + v[n] \\ E\{v[n]v[m]\} = \lambda_v^2 \delta_0[n-m] \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$\Psi^T[n] \stackrel{\text{def}}{=} [-y[n-1] \dots -y[n-n\alpha] \mid u[n-1] \dots u[n-n\beta]]$$

$$\Theta_{\alpha\beta}^T \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha_1 \dots \alpha_{n\alpha} \mid \beta_1 \dots \beta_{n\beta}]$$

$$\mathcal{D} = \{(u[n], y[n])\}_{n \in \overline{1, N}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

date măsurate

MCMMPE

 $\hat{\Theta}_{\alpha\beta}$  $\hat{v}[n]$  $\hat{y}[n]$ 

$$\hat{\Theta}_{\alpha\beta} = \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Psi[n] \Psi^T[n] \right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Psi[n] y[n] \right)$$

$$\varepsilon[n, \hat{\Theta}_{\alpha\beta}] \stackrel{\text{def}}{=} y[n] - \Psi^T[n] \hat{\Theta}_{\alpha\beta}$$

zgomotul estimat

 $\forall n \in \overline{1, N}$

# 5 Identificare parametrică prin MMEP

## Contextul de lucru

### MCMMPE (continuare)

- ② Determinarea parametrilor originali ai modelului cu ajutorul vectorului regresorilor având componenta nemăsurabilă estimată în etapa precedentă.



$$\varepsilon[n, \hat{\theta}_{\alpha\beta}] \stackrel{\text{def}}{=} y[n] - \Psi^T[n] \hat{\theta}_{\alpha\beta} \quad \forall n \in \overline{1, N}$$

zgomotul estimat

Vectorul estimat al regresorilor



**ARMAX[na,nb,nc]**

$$\Phi_{\alpha\beta}[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -y[n-1] \cdots -y[n-na] & | & u[n-1] \cdots u[n-nb] & | & \cdots \\ \cdots & | & \cdots & | & \cdots \\ \cdots & | & \cdots & | & \cdots \\ \cdots & | & \cdots & | & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\cdots \varepsilon[n-1, \hat{\theta}_{\alpha\beta}] \cdots \varepsilon[n-nc, \hat{\theta}_{\alpha\beta}]$$

**BJ[nb,nc,nd,nf]**

$$\Phi_{\alpha\beta}[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -y[n-1] \cdots -y[n-nd+nf] & | & u[n-1] \cdots u[n-nb+nd] & | & \cdots \\ \cdots & | & \cdots & | & \cdots \\ \cdots & | & \cdots & | & \cdots \\ \cdots & | & \cdots & | & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\cdots \varepsilon[n-1, \hat{\theta}_{\alpha\beta}] \cdots \varepsilon[n-nc+nf, \hat{\theta}_{\alpha\beta}]$$

$$\mathcal{D} = \{(u[n], y[n])\}_{n=1, \overline{N}}$$

date măsurate

MCMMP

$$\hat{\theta}_N \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_{\alpha\beta}[n] \Phi_{\alpha\beta}^T[n] \right)^{-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_{\alpha\beta}[n] y[n] \right)$$

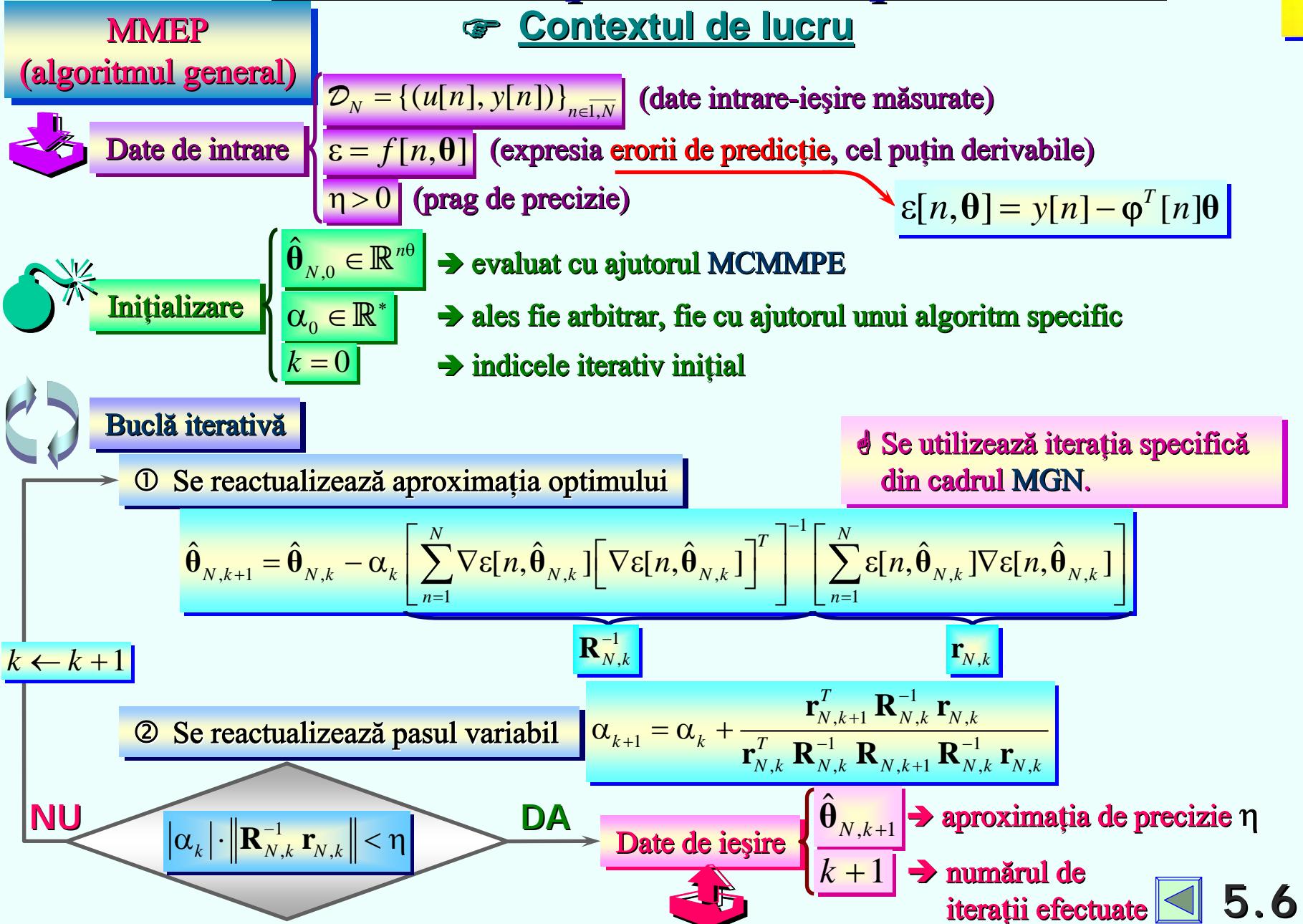
$$\hat{\lambda}_N^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y[n] - \Phi_{\alpha\beta}^T[n] \hat{\theta}_N)^2$$



În cazul modelului **BJ**, coeficienții celor 4 polinoame se determină cu ajutorul coeficienților vectorului parametrilor estimati, **prin identificarea rădăcinilor comune**.



# 5 Identificare parametrică prin MMEP



# 5 Identificare parametrică prin MMEP

## Contextul de lucru

### MMEP (continuare)

Cum se pot determina eroarea de predicție și gradientul acesteia?



Ar putea fi utilizată ecuația modelului de identificare,  
cu parametrii curent estimați.

Va fi analizat cazul modelului **ARMAX**. Cazul modelului **BJ** se analizează similar.

$$\hat{A}_{N,k}(q^{-1})y[n] = \hat{B}_{N,k}(q^{-1})u[n] + \hat{C}_{N,k}(q^{-1})\varepsilon[n, \hat{\theta}_{N,k}] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

modelul de identificare  
estimat la pasul curent

$$\Phi[n, \theta] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Phi_y[n] \\ \Phi_u[n] \\ \Phi_\varepsilon[n, \theta] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-y[n-i]]_{i=1,na} \\ [u[n-j]]_{j=1,nb} \\ [\varepsilon[n-1, \theta]]_{l=1,nc} \end{bmatrix}$$

Ecuație recurrentă pentru determinarea erorii de predicție.

$$\varepsilon[n, \hat{\theta}_{N,k}] = y[n] + \hat{a}_{1,k}^N y[n-1] + \dots + \hat{a}_{na,k}^N y[n-na] - \hat{b}_{1,k}^N u[n-1] - \dots - \hat{b}_{nb,k}^N u[n-nb] - \hat{c}_{1,k}^N \varepsilon[n-1, \hat{\theta}_{N,k}] - \dots - \hat{c}_{nc,k}^N \varepsilon[n-nc, \hat{\theta}_{N,k}] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\theta^T \stackrel{\text{def}}{=} [\theta_a^T \quad \theta_b^T \quad \theta_c^T]$$

$$\nabla_{\theta_a} \varepsilon[n, \hat{\theta}_N[k]] = -\Phi_y[n] - \hat{c}_{1,k} \nabla_{\theta_a} \varepsilon[n-1, \hat{\theta}_N[k]] - \dots - \hat{c}_{nc,k} \nabla_{\theta_a} \varepsilon[n-nc, \hat{\theta}_N[k]]$$

$$\nabla_{\theta_b} \varepsilon[n, \hat{\theta}_N[k]] = -\Phi_u[n] - \hat{c}_{1,k} \nabla_{\theta_b} \varepsilon[n-1, \hat{\theta}_N[k]] - \dots - \hat{c}_{nc,k} \nabla_{\theta_b} \varepsilon[n-nc, \hat{\theta}_N[k]]$$

$$\nabla_{\theta_c} \varepsilon[n, \hat{\theta}_N[k]] = -\Phi_\varepsilon[n, \hat{\theta}_N[k]]$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

Initializare  
cauzală

$$\nabla \varepsilon[n, \hat{\theta}_{N,k}] = \varepsilon[n, \hat{\theta}_{N,k}] = 0$$

$$u[n] = y[n] = 0 \quad \forall n \leq 0$$

# 5 Identificare parametrică prin MMEP

## Contextul de lucru

### Procesele generatoare de date

**ARMAX[2,2,2]**

$$(1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2})y[n] = (q^{-1} + 0.5q^{-2})u[n] + (1 - q^{-1} + 0.2q^{-2})e[n]$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

**BJ[2,2,2,2]**

$$y[n] = \frac{q^{-1} + 0.5q^{-2}}{1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}} u[n] + \frac{1 - q^{-1} + 0.2q^{-2}}{1 + 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}} e[n]$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

e → SPAB Gaussian sau bipolar de medie nulă și dispersie unitară

$\mathcal{D}_{id} = \{u[n]\}_{n=1,N} \cup \{y[n]\}_{n=1,N}$  → date măsurate pentru identificare

Date generate

$N = 250$

$\mathcal{D}_{va} = \{u[n]\}_{n=1,N} \cup \{y[n]\}_{n=1,N}$  → date măsurate pentru validare

$N = 250$

Indici strucurali maximali

$Na = Nb = Nc = 5$

Modelul BJ se poate identifica folosind un model ARMAX.

Teste structurale principale

Aceleași din cadrul Lucrării de laborator #4, dar adaptate la indicii strucurali ai modelelor ARMAX și BJ.



Obiectiv

- Compararea performanțelor MCMMPE & MMEP în cazul modelelor ARMAX și BJ.



5.8



# 5 Identificare parametrică prin MMEP

## ☞ Probleme de simulare

8p

Contextul de lucru

### Rutine preliminare

**[D,V,P] = gen\_data(DP,N,sigma,lambda,bin) ;** (generează date)

- DP** este obiectul de tip **IDMODEL** corespunzător modelului de proces furnizor de date; obiectul poate fi construit de exemplu cu ajutorul funcției **idpoly**; implicit, acest model este identic cu cel de tip ARMAX;
- N** este dimensiunea orizontului de măsură (implicit: **N=250**);
- sigma** este deviația standard a intrării SPAB (implicit: **sigma=1**);
- lambda** este deviația standard a zgomotului alb Gaussian (implicit: **lambda=1**);
- bin** este un parametru care arată tipul de intrări dorit: **bin=0** (intrare SPAB Gaussiană); **bin~=0** (implicit, intrare SPAB Gaussiană bipolară);
- D** este obiectul de tip **IDDATA** corespunzător datelor generate (intrarea se regăsește în **D.u**, iar ieșirea în **D.y**);
- V** este obiectul de tip **IDDATA** corespunzător zgomotelor generate (zgomotul alb se regăsește în **v.u**, iar zgomotul colorat (MA-filtrat) – în **v.y**).
- P** este obiectul de tip **IDMODEL** corespunzător modelului de proces furnizor de date.



# 5 Identificare parametrică prin MMEP

## Probleme de simulare

### Contextul de lucru

#### Rutine preliminare

#### Rutină de bibliotecă MATLAB-IS

##### # ARMAX

- Apel: **Mid = armax(D,si)** ;
- Estimează parametrii unui model ARMAX folosind MMEP. Modelul identificat rezultat, **Mid**, este returnat ca obiect **IDMODEL**. Estimarea se efectuează pe baza datelor **D** (obiect **IDDATA**) și a informației de structură **si = [na nb nc nk]**, unde **na**, **nb** și **nc** sunt indicii structurali ai modelului, iar **nk** este întărzierea instrinsecă. Cu ajutorul acestei rutine se pot identifica atât modele AR cât și modele ARMA unidimensionale (însă nu și multidimensionale). Apelul rutinei este ușor diferit în acest caz:

- pentru modele AR: **Mid = armax(D.y,na)** ;
- pentru modele ARMA: **Mid = armax(D.y,[na nc])** ;

Observați că datele de identificare sunt specificate acum doar sub forma unei *serii de timp* (**D.y**). Pentru identificarea modelelor AR, rutina apelează intern o funcție specializată numită **ar**, care este disponibilă și utilizatorului (cu apel similar lui **armax**).

O altă modalitate de a identifica modele AR și ARMA este de a folosi obiectul **D** împreună cu o informație de structură de forma: **si = [na 0 0 0]** (AR) sau **si = [na 0 nc 0]** (ARMA). Rutina nu funcționează însă decât dacă **na>1** (nu și pentru **na=1**). De aceea, se recomandă utilizarea rutinei cu argument serie de timp, pentru aceste modele.

# 5 Identificare parametrică prin MMEP

## ➡ Probleme de simulare

### Contextul de lucru

#### Rutine preliminare

# BJ

- Apel: **Mid = bj(D,si) ;**
- Estimează parametrii unui model BJ folosind MMEP. Modelul identificat rezultat, **Mid**, este returnat ca obiect **IDMODEL**. Estimarea se efectuează pe baza datelor **D** (obiect **IDDATA**) și a informației de structură **si = [na nb nc nd nf nk]**, unde **na**, **nb**, **nc**, **nd** și **nf** sunt indicii structurali ai modelului, iar **nk** este întărzierea înstrinsecă. În principiu, algoritmul implementat în cadrul acestei rutine este similar cu cel al rutinei **armax**, cu adaptările de rigoare impuse de utilizarea modelului BJ.

#### Rutină de bibliotecă MATLAB-IS

## 5 Identificare parametrică prin MMEP

### ☞ Probleme de simulare

#### Problema 5.1 (MCMMPE pentru modelele ARMAX și BJ)

5p

Biblioteca MATLAB dedicată domeniului IS nu dispune de funcții explicite care implementează MCMMPE. Să se proiecteze două astfel de funcții: **armax\_e** pentru identificarea modelelor ARMAX și **bj\_e** pentru identificarea modelelor BJ. Apelul tipic al lor ar trebui să fie similar altor funcții cu obiectiv asemănător (estimarea parametrilor unui model cu structură dată; vezi de exemplu funcțiile **armax** și **bj**):

```
Mid = armax_e(D,si) ;
```

```
Mid = bj_e(D,si) ;
```

Informația de structură are forma: **si = [na nb nc nk]** pentru modelul ARMAX și **si = [na nb nc nd nf nk]** pentru modelul BJ. Încercați să folosiți funcția **armax\_e** în cadrul funcției **bj\_e**. Testați cele 2 rutine în cazul proceselor ARMAX și BJ pentru câteva seturi de indici structurali (inclusiv cei adevărați). Comentați precizia de estimare a parametrilor.

Rutine ce trebuie proiectate

**ARMAX\_E**

**BJ\_E**

# 5 Identificare parametrică prin MMEP

## ➡ Probleme de simulare

### Problema 5.2 (MMEP pentru modelul ARMAX)

1p

Să se proiecteze mini-simulatorul **ISLAB\_5A** care evaluează estimarea (parsimonioasă a) modelului ARMAX, folosind MMEP. Pentru aceasta, se vor parcurge următorii pași:

- a. Se generează 2 seturi de date: unul pentru identificare și altul pentru validare, folosind rutina **gen\_data**.
- b. Pentru fiecare model identificat cu ajutorul MMEP (funcția **armax**), model obținut variind indicii  $na$ ,  $nb$  și  $nc$ , se vor afișa 3 ferestre grafice: una pentru analiza modelului folosind datele de identificare și de validare și alte două pentru reprezentările poli-zeroruri (filtru sistem și filtru zgomot) cu discuri de încredere corespunzătoare unei raze de 3 ori mai mari decât deviațiile standard aferente. După fiecare fereastră se inserează o pauză de aşteptare pentru a permite utilizatorului să analizeze informațiile afișate. Fiecare sub-fereastră a primei ferestre include 3 grafice aranjate pe verticală:

- ieșirile măsurate și simulate cu ajutorul modelului, grafic pe care se indică și valoarea funcției de potrivire,  $\mathcal{E}_N$  ;
- eroarea de predicție (reziduurile modelului), grafic pe care se indică și dispersia estimată a zgomotului,  $\lambda_N^2$  ;
- secvența de auto-covarianță a erorii de predicție, grafic pe care se indică și indexul de validare.

Modelele obținute vor fi memorate în vederea selectării unuia dintre ele, în urma aplicării testelor de determinare a indicilor structurali optimi și de validare.

# 5 Identificare parametrică prin MMEP

## ☞ Probleme de simulare

### Problema 5.2 (continuare)

- c. Se afișează indicii structurali optimi selectați folosind:
- Testul F aplicat dispersiei estimate a zgomotului (adică erorii de predicție);
  - Testul F aplicat funcției de potrivire pentru datele de identificare;
  - Testul F aplicat funcției de potrivire pentru datele de validare;
  - criteriului GAIC în versiunea Rissanen.
- d. Se solicită utilizatorului să aleagă indicii structurali pe care îi consideră optimi.
- e. Pentru modelul ales, se afișează cele 3 ferestre grafice de la b. Modelul este returnat de către mini-simulator, în vedera unei utilizări ulterioare. Se recomandă returnarea și a seturilor de date de identificare și validare.

După proiectarea mini-simulatorului **ISLAB\_5A**, se vor iniția cîteva rulări.

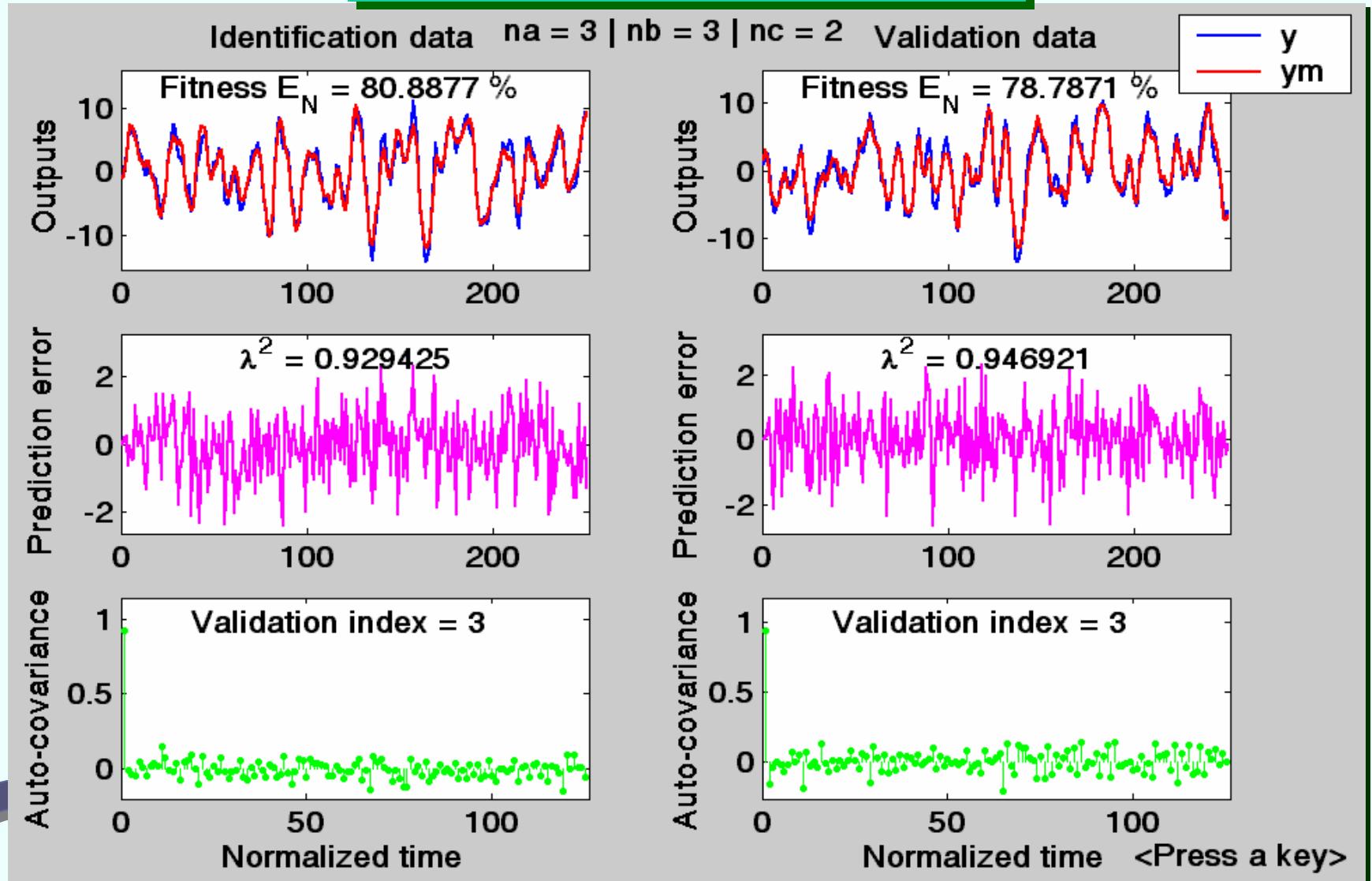
Sunt indicii structurali adevărați indicați de către majoritatea criteriilor utilizate sau ei diferă de la o rulare la alta? Justificați răspunsul.

Program  
existent pe CD

**ISLAB\_5A**

## 5 Identificare parametrică prin MMEP

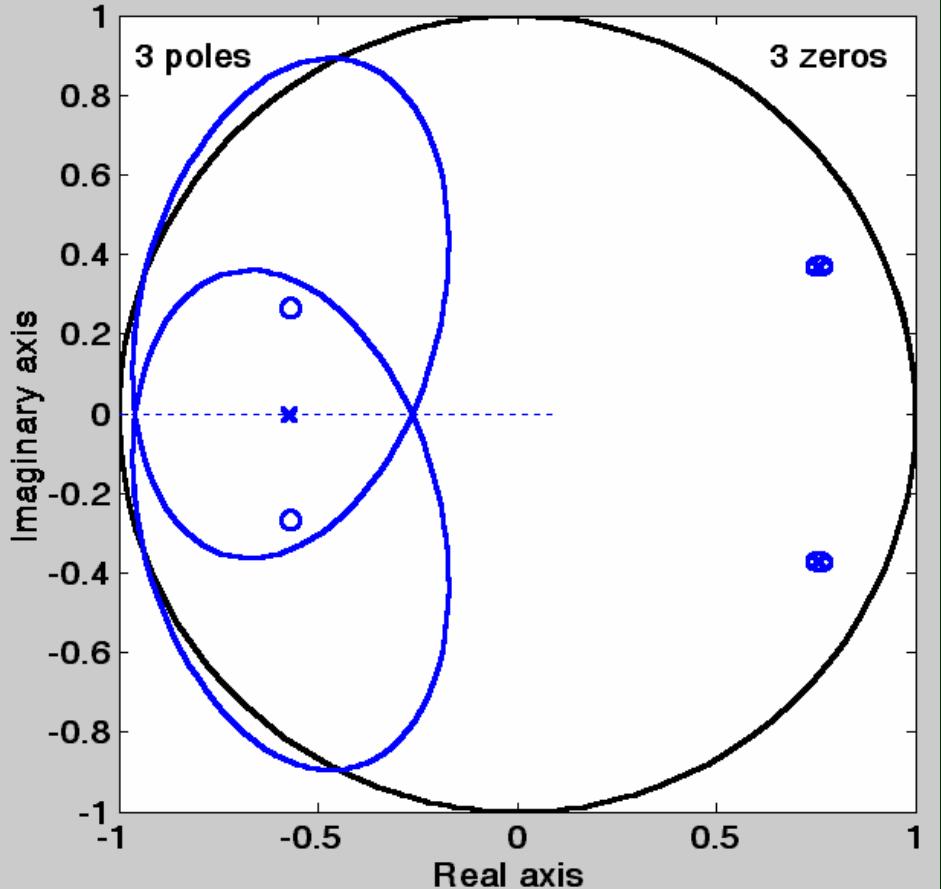
Ce afișează mini-simulatorul ISLAB\_5A



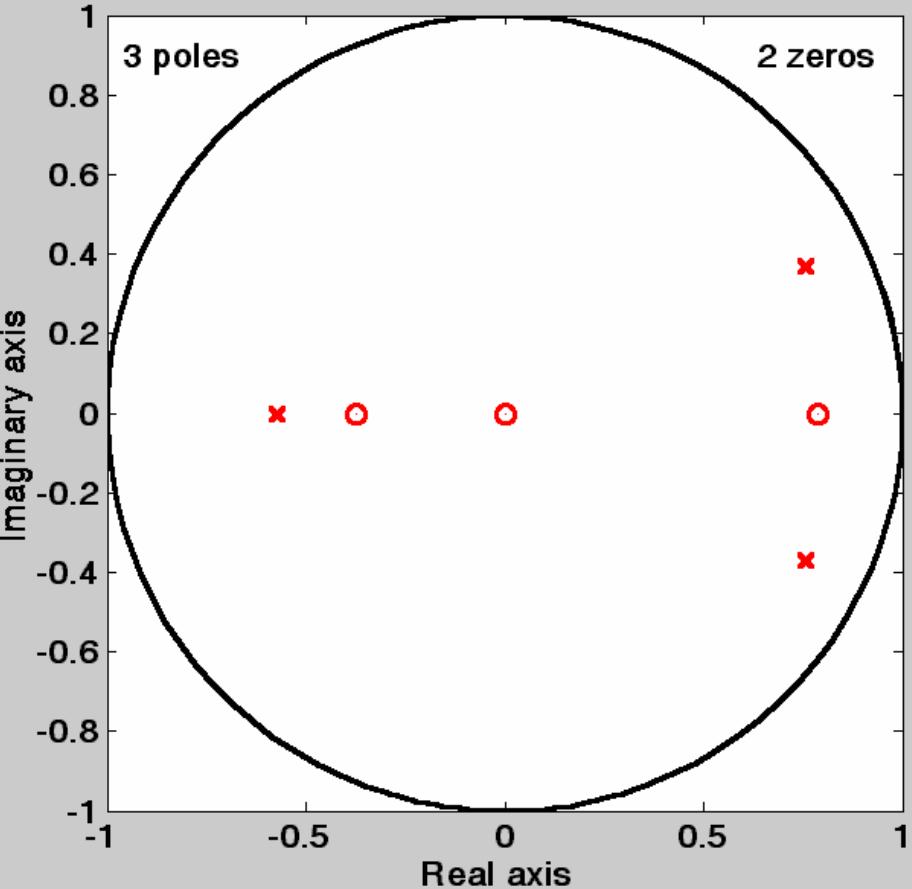
## 5 Identificare parametrică prin MMEP

Ce afișează mini-simulatorul **ISLAB\_5A**

Poles-Zeros representation (system)



Poles-Zeros representation (noise)



Reprezentarea poli-zerouri a modelului ARMAX identificat cu MMEP

## 5 Identificare parametrică prin MMEP

### ☞ Probleme de simulare

#### Problema 5.3 (MMEP pentru modelul BJ)

2p

Problema anterioară, 5.2, se va relua pentru modelul BJ. Mini-simulatorul rezultat va fi denumit **ISLAB\_5B**. Testați mini-simulatorul și comentați rezultatele de estimare obținute.

Program ce trebuie proiectat

**ISLAB\_5B**