❶ Privire de ansamblu

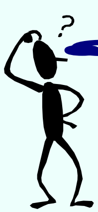
Probleme practice ridicate de identificarea unui proces (continuare)

☝ Achiziţia şi prelucrarea primară a datelor.

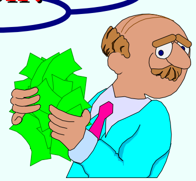
- Procesele identificabile se caracterizează prin seturi de date achiziționate pentru care raportul semnal-zgomot (SNR – Signal-to-Noise Ratio) are valori rezonabil de mari.

☝ Zgomotele de măsură nu trebuie să domine datele utile.

- Cu cît zgomotele sunt mai importante, cu atît procesul este mai puțin identificabil.



Proces identificabil?

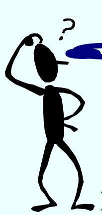


Proces pentru care este posibilă construcția şi determinarea unui model matematic adecvat/valid folosind tehnici de (modelare şi) identificare.

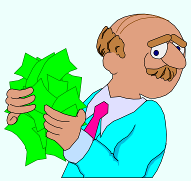
în sensul unor criterii de adecvanță/validitate prestabilite

- Mărirea SNR se poate realiza prin prelucrări primare ale datelor (efectuate înaintea introducerii lor într-o procedură de identificare).
- Operația fundamentală: filtrarea. Se efectuează cu ajutorul filtrelor.

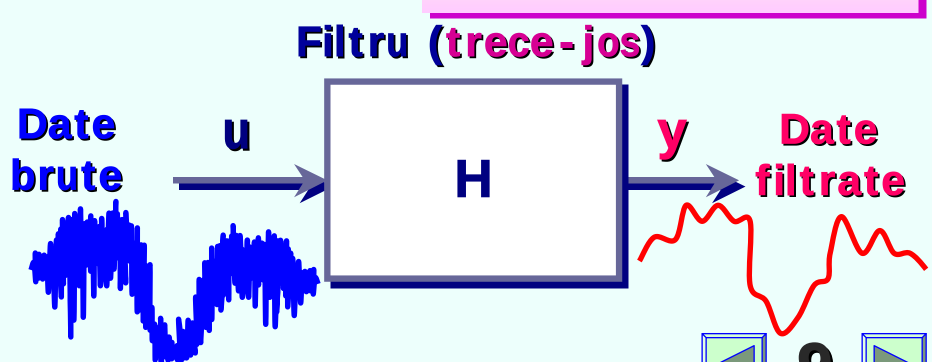
☝ Zgomotele de frecvență înaltă sunt atenuate.



Ce este un filtru?



Sistem dinamic avînd proprietatea de a modifica semnalul de intrare/stimul în ceea ce priveşte caracteristicile sale în frecvență.



☝ Filtrul nu trebuie să introducă alte distorsiuni importante în date.

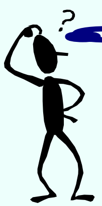
❶ Privire de ansamblu

Probleme practice ridicate de identificarea unui proces (continuare)

☝ Selectarea unui model de proces adecvat.

- Modelele de identificare uzuale sunt **liniare**.
- Procesele uzuale sunt **neliniare**.

Identificarea proceselor cu un pronunțat caracter neliniar folosind modele liniare **este inadecvată**.



Ce este se poate face?

Complicat, mai precis → Dacă neliniaritățile pot fi caracterizate printr-un formalism matematic, se alege un **model de identificare neliniar**.

→ Se poate utliza un aproximant cvasi-universal: **rețeaua neuronală** (care are la bază MCMMP, în faza de instruire).

Mai simplu, mai imprecis → Se stabileşte un **punct de funcţionare nominal**, în jurul căruia se determină o colecție de **modele de identificare adaptive** (**cu parametri variabili în timp**).

Identificare multi-model.

☝ Variabilitatea în timp a proceselor.

- Dacă procesele pot fi descrise printr-un set de **parametri adevărați** (dar necunoscuți), aceştia **variază în timp**.

Modelele de identificare trebuie să posede două proprietăți opuse: **să fie adaptive** şi **consistente** (convergete statistic, adică precise).

Metodele de identificare trebuie să asigure **un bun compromis** între adaptabilitate şi precizie (sau robustețe).

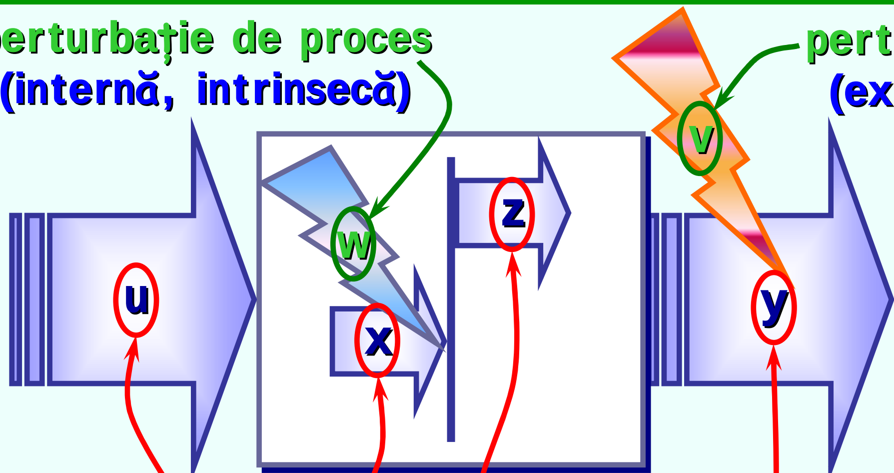
❶ Privire de ansamblu

Determinism şi nedeterminism

- Pentru a putea fi identificată, cutia neagră trebuie să aibă capacitatea de a furniza date, putînd fi eventual stimulată pentru aceasta.

Sistem dinamic

Entitate care operează cu semnale la intrare şi furnizează semnale la ieşire conform unui set de ecuaţii diferenţiale (în timp continuu) sau cu diferenţe (în timp discret).



$$\mathbf{x}' \in \{\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}[n+1]\}$$

timp continuu — timp discret

$$\begin{cases} \boxed{\mathbf{x}'} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{w}) \\ \mathbf{z} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \mathbf{y} \equiv \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}) \end{cases}$$

funcţii de sistem specifice (liniare sau neliniare)

✍ Convenţie: paranteze rotunde pentru argumentul de timp continuu şi paranteze drepte pentru argumentul de timp discret.

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{nu}$	$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{nz}$
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{nx}$	$\mathbf{w} \in \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^{nw}$
$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{ny}$	$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^r = \mathbb{R}^{nv}$

- Primele notaţii ale dimensiunilor sunt specifice Teoriei Sistemelor (TS).
- În IS, se utilizează notaţiile din termenul drept al fiecărei egalităţi.

☝ Semnalul de ieşire este egal cu mărimea de calitate perturbată.

❶ Privire de ansamblu

Determinism şi nedeterminism (continuare)

Exemplu — **Sistem dinamic liniar**

$$\begin{cases} \mathbf{x}' \equiv \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{w} \\ \mathbf{z} \equiv \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} \equiv \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{v} \end{cases}$$

Parametrii modelului

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} = \mathbb{R}^{nx\times nx}$ $\quad$ $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times n} = \mathbb{R}^{ny\times nx}$ $\quad$ $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n\times l} = \mathbb{R}^{nx\times nw}$ $\quad$ $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{q\times m} = \mathbb{R}^{nz\times nu}$

$\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m} = \mathbb{R}^{nx\times nu}$ $\quad$ $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q\times n} = \mathbb{R}^{nz\times nx}$ $\quad$ $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{p\times r} = \mathbb{R}^{ny\times nv}$ $\quad$ $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{p\times m} = \mathbb{R}^{ny\times nu}$

☞ **În TS**

- proprietăţile de stabilitate, observabilitate, controlabilitate şi robusteţe sunt intens analizate;
- perturbaţiile joacă un rol secundar, fiind utilizate în special în studiul capacităţii unui sistem de a le rejecta/compensa sau de a-şi păstra stabilitatea intrinsecă, indiferent de natura lor.

Modelele matematice din TS au un caracter determinist.

La orice moment de timp, mărimile ce descriu modelul matematic au valori unic determinate de acel moment de timp, fie că sunt cunoscute sau nu.

☝ În realitate, perturbaţiile au un caracter nedeterminist şi ar trebui considerate ca variabile aleatoare (stocastice) fiind caracterizate de anumite distribuţii de probabilitate.

La un anumit moment de timp, valorile perturbaţiilor nu sunt unic determinate, ci variază într-o anumită gamă (interval), fiecare dintre ele avînd o anumită probabilitate de apariţie.

❶ Privire de ansamblu

Determinism şi nedeterminism (continuare)

Exemplu

Răspunsul indicial al unui sistem liniar de ordin I

$$H(s)=\frac{K}{1+Ts}$$

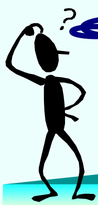
funcţia de transfer

amplificarea

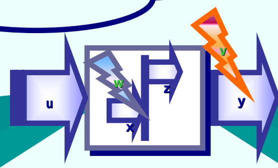
constanta de timp

Parametrii modelului

Cum s-ar putea determina parametrii modelului folosind răspunsul indicial?

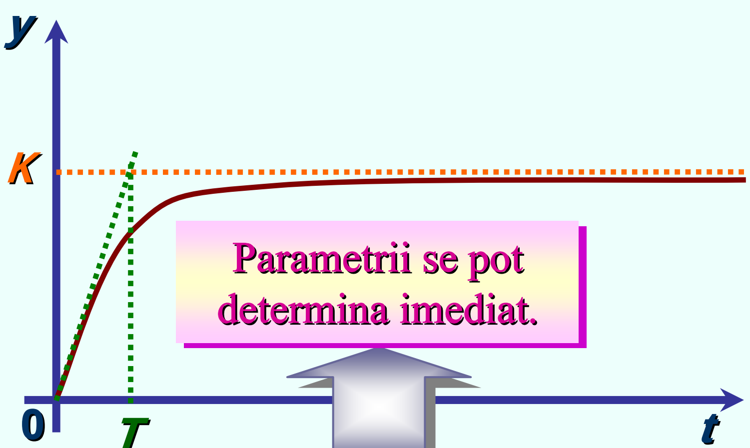


Pe cale grafică.

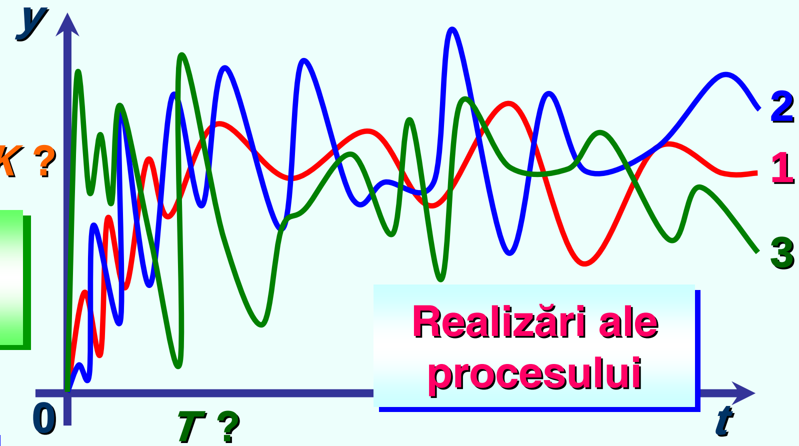


Cazul răspunsului determinist

Cazul răspunsului nedeterminist



Parametrii se pot determina imediat.



Realizări ale procesului

Colecţia tuturor realizărilor.

Proces

Acelaşi răspuns indiferent de indicele experimentului econometric.

Răspunsuri diferite pentru experimente econometrice diferite.

Experiment econometric

Experiment de măsurare şi achiziţie de date.

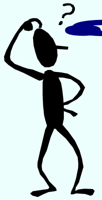
❶ Privire de ansamblu

Determinism şi nedeterminism (continuare)

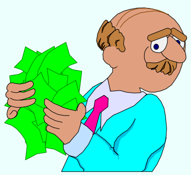
Aşadar **Proces** ⟺ **Sistem dinamic afectat de perturbații nedeterministe (stocastice)**

- Caracterizarea completă a perturbațiilor stocastice include o descriere a densităților de probabilitate asociate.

☹ În majoritatea aplicațiilor de identificare, este dificil (dacă nu imposibil) de precizat densitatea de probabilitate a perturbațiilor.



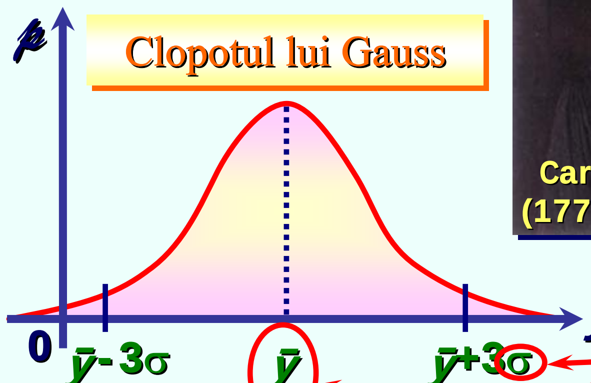
Ce este se poate face?

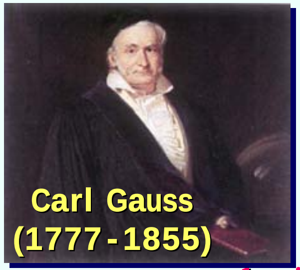


Un rezultat remarcabil din Matematică poate debloca situația. ⇒ **Teorema Limită Centrală (TLC)**

Un ansamblu cel puțin numărabil de procese stocastice cu densități de probabilitate arbitrare constituie un proces stocastic normal distribuit.

Clopotul lui Gauss



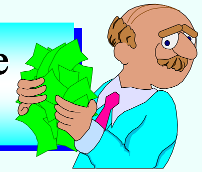


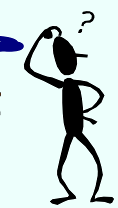
Carl Gauss (1777-1855)

deviație standard

medie

Normal distribuit?





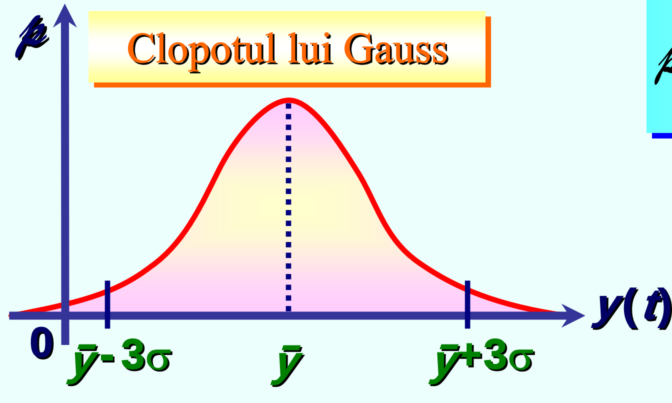
Cu densitate de probabilitate Gaussiană.

$$p\big(y(t)\big) \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\big(y(t)-\bar{y}\big)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(în timp continuu)

❶ Privire de ansamblu

Determinism şi nedeterminism (continuare)



$$\wp\left(y(t)\right) \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(y(t)-\bar{y}\right)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

☝ Argumentul densităţii de probabilitate nu este timpul, ci valorile variabilei aleatoare $y(t)$.

$$\mathcal{N}\left(\bar{y},\sigma^2\right) \Rightarrow$$

Clasa proceselor normal distribuite

(de medie $\boxed{\bar{y}}$ şi varianţă $\boxed{\sigma^2}$)

- Media relevă amplasarea clopotului în raport cu gama de variaţie a variabilei aleatoare.
- Varianţa relevă deschiderea clopotului în jurul mediei.

Proprietăţi ale densităţii de probabilitate Gaussiene

Exerciţii

➔ Evenimentul sigur: variabila aleatoare ia în mod sigur o valoare în intervalul (–∞,+∞).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \wp\left(y(t)\right) dy(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(aria de sub clopotul lui Gauss este unitară)

➔ Intervalul 3σ include mai mult de 95% din valorile probabile ale variabilei aleatoare.

$$\int_{\bar{y}-3\sigma}^{\bar{y}+3\sigma} \wp\left(y(t)\right) dy(t) \geq 0.95 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

În practică deschiderea clopotului lui Gauss este măsurată de intervalul 3σ.

- σ se numeşte deviaţie standard.

❶ Privire de ansamblu

Determinism şi nedeterminism (continuare)

Proprietăţi ale densităţii de probabilitate Gaussiene (continuare)

Exerciţii

➔ **Media statistică** a variabilei aleatoare este chiar media densităţii de probabilitate.

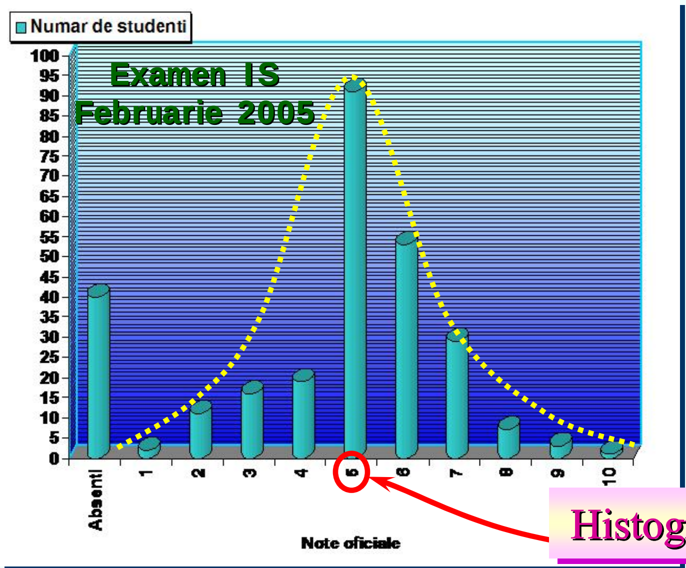
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \wp\big(y(t)\big)\, y(t)\, dy(t) = \overline{y} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

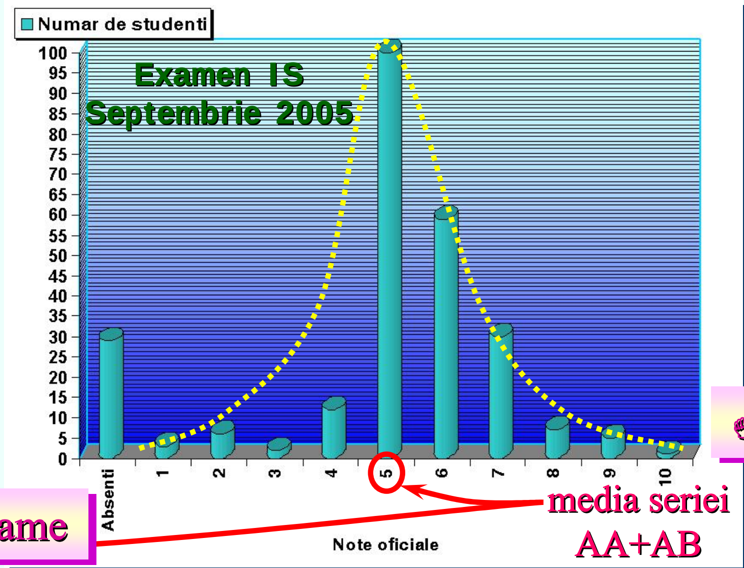
🡐 **valoarea cea mai aşteptată a variabilei aleatoare**

Într-o secvenţă finită de experimente econometrice ale unei variabile aleatoare cu distribuţie Gaussiană, media (statistică a) acesteia la un anumit moment de timp are **frecvenţa cea mai mare de apariţie**.

- Pentru procesele **în timp discret**, singura diferenţă constă în înlocuirea argumentului de timp continuu **(*t*)** cu cel de timp discret **[*n*]**.

Exemplu Un proces Gaussian frecvent întîlnit: evoluţia mediilor unui grup de studenţi la o anumită disciplină





Histograme

media seriei AA+AB

- Odată cu scăderea numărului de absenţi, deschiderea clopotului se reduce (dispersia în jurul mediei este mai mică).

☝ **Precizia mediei creşte.**