❹ Metode de identificare şi validare

❹.❽ Identificarea şi predicţia proceselor autoregresive

☹ Efortul de calcul al MCMMP cu modelul AR este susţinut, deoarece aît numărul datelor măsurate cît şi numărul de parametri au valori mari (pentru a asigura o precizie suficientă).

Obiectiv: **Reducerea efortului de calcul prin metode alternative de identificare.**

Metoda Yule-Walker-Wiener | Algoritmul Levinson-Durbin

Algoritmul Levinson-Durbin (ALD)

Ideea lui N. Levinson (1947)

Estimarea parametrilor necunoscuţi şi a dispersiei zgomotului alb se poate realiza apelînd la un algoritm recursiv, pe baza proprietăţilor remarcabile ale matricilor de tip Toeplitz simetrice.

- Se pleacă tot de la sistemul Yule-Walker-Wiener, în care se folosesc următoarele notaţii (pentru a pune în evidență indicele de recurență – ordinul modelului AR):

$p \in \overline{1, na}$

$\{\hat{a}_{N,p,i}\}_{i \in \overline{1,p}}$ ➔ Parametrii estimaţi din N date măsurate, pentru modelul AR[p].

$\hat{\theta}_{N,p}$ ➔ Vectorul parametrilor estimaţi din N date măsurate, pentru modelul AR[p].

$\hat{\lambda}^2_{N,p}$ ➔ Dispersia estimată a zgomotului alb din N date măsurate, pentru modelul AR[p].

Pentru a rezolva sistemul Yule-Walker-Wiener de ordin ***na***, se vor reactualiza succesiv soluţiile sistemelor Yule-Walker-Wiener de ordine inferioare, plecînd de la sistemul de ordin 1.

☝ Matricile de tip Toeplitz simetrice joacă rolul principal în acest scenariu.

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❽ Identificarea şi predicţia proceselor autoregresive

Algoritmul Levinson-Durbin (continuare)

Propoziţia 5 (proprietatea de invarianţă la răsturnare a matricilor simetrice de tip Toeplitz)

Fie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice simetrică de tip Toeplitz asociată operatorului liniar $\mathscr{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Se notează prin $\mathscr{R} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izomorfismul spaţiului $\mathbb{R}^n$ care realizează inversarea totală a ordinii elementelor oricărui vector din $\mathbb{R}^n$:

$$\mathscr{R}(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \mathbf{x}^R \overset{def}{=} [x_n \quad x_{n-1} \quad \cdots \quad x_1]^T \,, \;\forall\, \mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T \in \mathbb{R}^n .$$

Atunci operatorii $\mathscr{A}$ şi $\mathscr{R}$ comută. Mai precis:

$$\mathscr{A} \circ \mathscr{R} \equiv \mathscr{R} \circ \mathscr{A} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})^R = \mathbf{A}\mathbf{x}^R .$$

operaţia de răsturnare a vectorilor

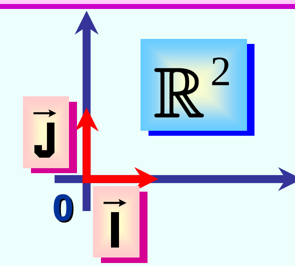
Demonstraţie ⇨ Exerciţiu

Matricea caracterisitcă a operatorului de răsturnare

$$\mathbf{J} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

diagonala secundară

☝ Analogie de notaţie cu cea din geometria plană.



Propoziţia 5

$$\mathbf{AJ} = \mathbf{JA}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{JAJ} = \mathbf{A}$$

Exerciţiu

Matricea de răsturnare coincide cu propria sa inversă.

☝ Aceeaşi proprietate ca a matricii unitare.

☝ Diagonalele celor două matrici sunt geometric perpendiculare.

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❽ Identificarea şi predicţia proceselor autoregresive

Algoritmul Levinson-Durbin (continuare)

Proprietate remarcabilă de imbricare

Sistemul Yule-Walker-Wiener

$$\begin{cases} a_1^* r_y[1] + \cdots + a_{na}^* r_y[na] - \lambda^2 = -r_y[0] \\ \begin{bmatrix} r_y[0] & r_y[1] & \cdots & r_y[na-1] \\ r_y[1] & r_y[0] & \cdots & r_y[na-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_y[na-1] & r_y[na-2] & \cdots & r_y[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_{na}^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_y[1] \\ r_y[2] \\ \vdots \\ r_y[na] \end{bmatrix} \end{cases}$$

exprimare matricială compactă

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_y^N[0] & r_y^N[1] & \cdots & r_y^N[p] \\ r_y^N[1] & r_y^N[0] & \cdots & r_y^N[p-1] \\ \vdots & \vdots & \mathbf{R}_{N,p} & \vdots \\ r_y^N[p] & r_y^N[p-1] & \cdots & r_y^N[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{N,p+1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_{N,p,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{a}_{N,p,p} \end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,p}} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}^2_{N,p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall\, p \in \overline{1,na}$$

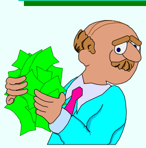
vectorul parametrilor extins cu valiarea unitară

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_y^N[0] & \cdots & r_y^N[p-1] & r_y^N[p] \\ \vdots & \mathbf{R}_{N,p} & \vdots & \vdots \\ r_y^N[p-1] & \cdots & r_y^N[0] & r_y^N[1] \\ r_y^N[p] & \cdots & r_y^N[1] & r_y^N[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{N,p+1}} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_{N,p,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{a}_{N,p,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}^2_{N,p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall\, p \in \overline{1,na}$$

Se va deduce o relaţie recurentă de forma:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,p} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,p-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\alpha_{N,p-1}}{\hat{\lambda}^2_{N,p-1}} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}^R_{N,p-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall\, p \in \overline{2,na}$$

coeficient de adaptare ce trebuie determinat



Această proprietate, împreună cu **Propoziţia 5**, va permite exprimarea soluţiei curente în funcţie de soluţia precedentă.

Algoritmul Levinson-Durbin (continuare)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} r_y^N[0] & \cdots & r_y^N[p-1] & r_y^N[p] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_y^N[p-1] & \cdots & r_y^N[0] & r_y^N[1] \\ \hline r_y^N[p] & \cdots & r_y^N[1] & r_y^N[0] \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_{N,p,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{a}_{N,p,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}^2_{N,p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall\, p \in \overline{1,na}$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} r_y^N[0] & \cdots & r_y^N[p-1] & r_y^N[p] \\ \vdots & \mathbf{R}_{N,p} & \vdots & \vdots \\ r_y^N[p-1] & \cdots & r_y^N[0] & r_y^N[1] \\ \hline r_y^N[p] & \cdots & r_y^N[1] & r_y^N[0] \end{array}\right]}_{\mathbf{R}_{N,p+1}} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ \hat{a}_{N,p-1,1} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,p-1} \\ \vdots \\ \hat{a}_{N,p-1,p-1} \end{matrix}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}^2_{N,p-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{N,p-1} \end{bmatrix} \quad \forall\, p \in \overline{2,na}$$

vectorul anterior al parametrilor, extins cu valoarea nulă

Noul sistem moşteneşte **matricea sistemului curent**, dar operează cu **soluţia sistemului precedent**.

☝ Noul sistem nu este echivalent cu sistemele curent sau precedent.

☝ Prin răsturnarea celor 2 vectori, matricea sistemului rămîne neschimbată.

Factor de corecţie necesar pentru ca sistemul să fie compatibil.

$$\alpha_{N,p-1} \overset{def}{=} r_y^N[p] + \hat{a}_{N,p-1,1}\, r_y^N[p-1] + \cdots + \hat{a}_{N,p-1,p-1}\, r_y^N[1]$$

Propoziţia 5

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} r_y^N[0] & \cdots & r_y^N[p-1] & r_y^N[p] \\ \vdots & \mathbf{R}_{N,p} & \vdots & \vdots \\ r_y^N[p-1] & \cdots & r_y^N[0] & r_y^N[1] \\ \hline r_y^N[p] & \cdots & r_y^N[1] & r_y^N[0] \end{array}\right]}_{\mathbf{R}_{N,p+1}} \begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{\begin{matrix} \hat{a}_{N,p-1,p-1} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}^R_{N,p-1} \\ \vdots \\ \hat{a}_{N,p-1,1} \\ 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{N,p-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{\lambda}^2_{N,p-1} \end{bmatrix} \quad \forall\, p \in \overline{2,na}$$

- Dacă $p=na+1$, această ecuaţie aproximează următoarea ecuaţie extrasă din sistemul Yule-Walker-Wiener:

$$r_y[p] + a_1^* r_y[p-1] + \cdots + a_{p-1}^* r_y[1] = 0$$

Factorul de corecţie are amplitudini din ce în ce mai mici.

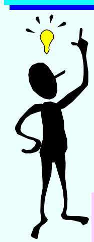
Algoritmul Levinson-Durbin (continuare)

Aşadar Dispunem de două sisteme echivalente.

$$\mathbf{1}:\quad \left[\begin{array}{ccc|c} r_y^N[0] & \cdots & r_y^N[p-1] & r_y^N[p] \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ r_y^N[p-1] & \cdots & r_y^N[0] & r_y^N[1] \\ \hline r_y^N[p] & \cdots & r_y^N[1] & r_y^N[0] \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_{N,p-1,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{a}_{N,p-1,p-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}^2_{N,p-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{N,p-1} \end{bmatrix} \quad \forall\, p \in \overline{2,na}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathbf{2}:\quad \left[\begin{array}{ccc|c} r_y^N[0] & \cdots & r_y^N[p-1] & r_y^N[p] \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ r_y^N[p-1] & \cdots & r_y^N[0] & r_y^N[1] \\ \hline r_y^N[p] & \cdots & r_y^N[1] & r_y^N[0] \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{a}_{N,p-1,p-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{a}_{N,p-1,1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{N,p-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{\lambda}^2_{N,p-1} \end{bmatrix} \quad \forall\, p \in \overline{2,na}$$



Factorul de corecţie din primul sistem poate fi anulat folosind al doilea sistem.

$$\mathbf{1} - \frac{\alpha_{N,p-1}}{\hat{\lambda}^2_{N,p-1}} \times \mathbf{2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} r_y^N[0] & \cdots & r_y^N[p-1] & r_y^N[p] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_y^N[p-1] & \cdots & r_y^N[0] & r_y^N[1] \\ \hline r_y^N[p] & \cdots & r_y^N[1] & r_y^N[0] \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_{N,p-1,1} - \dfrac{\alpha_{N,p-1}}{\hat{\lambda}^2_{N,p-1}} \hat{a}_{N,p-1,p-1} \\ \vdots \\ \hat{a}_{N,p-1,p-1} - \dfrac{\alpha_{N,p-1}}{\hat{\lambda}^2_{N,p-1}} \hat{a}_{N,p-1,1} \\ -\dfrac{\alpha_{N,p-1}}{\hat{\lambda}^2_{N,p-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}^2_{N,p-1} - \dfrac{\alpha^2_{N,p-1}}{\hat{\lambda}^2_{N,p-1}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall\, p \in \overline{2,na}$$

☝ Matricea sistemului este aceeaşi în ambele ecuaţii.

Algoritmul Levinson-Durbin (continuare)

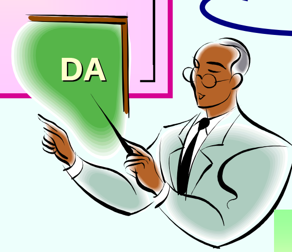
Rezultă — Soluţia recurentă a sistemului Yule-Walker-Wiener

$$\begin{cases} \alpha_{N,p-1} = r_y^N[p] + \hat{a}_{N,p-1,1}\, r_y^N[p-1] + \cdots + \hat{a}_{N,p-1,p-1}\, r_y^N[1] \\[2ex] \begin{bmatrix} \hat{a}_{N,p,1} \\ \vdots \\ \hat{a}_{N,p,p-1} \\ \hat{a}_{N,p,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{N,p-1,1} - \dfrac{\alpha_{N,p-1}}{\hat{\lambda}^2_{N,p-1}} \hat{a}_{N,p-1,p-1} \\ \vdots \\ \hat{a}_{N,p-1,p-1} - \dfrac{\alpha_{N,p-1}}{\hat{\lambda}^2_{N,p-1}} \hat{a}_{N,p-1,1} \\ -\dfrac{\alpha_{N,p-1}}{\hat{\lambda}^2_{N,p-1}} \end{bmatrix} \\[2ex] \hat{\lambda}^2_{N,p} = \hat{\lambda}^2_{N,p-1} - \dfrac{\alpha^2_{N,p-1}}{\hat{\lambda}^2_{N,p-1}} \end{cases}$$

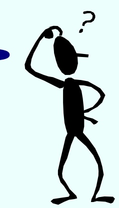
$\Leftrightarrow$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,p} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N,p-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\alpha_{N,p-1}}{\hat{\lambda}^2_{N,p-1}} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}^R_{N,p-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\forall\, p \in \overline{2,na}$



Este dispersia corect estimată?



Mai mult

$$0 \le \hat{\lambda}^2_{N,p} = \hat{\lambda}^2_{N,p-1}\left[1 - \frac{\alpha^2_{N,p-1}}{\hat{\lambda}^4_{N,p-1}}\right] \le \hat{\lambda}^2_{N,p-1}$$

$\forall\, p \in \overline{2,na}$

☝ Cu cît modelul devine mai complex, cu atît el devine mai precis .

Propoziţia 6 (corectitudinea soluţiei recurente)

În contextul definit de ecuaţiile recurente ale lui Levinson, cantitatea:

$$\beta_{N,p} \overset{def}{=} \hat{\lambda}^2_{N,p-1} - \frac{\alpha^2_{N,p-1}}{\hat{\lambda}^2_{N,p-1}}$$

este nenegativă.

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❽ Identificarea şi predicţia proceselor autoregresive

Algoritmul Levinson-Durbin (ALD)

Date de intrare

- $\mathcal{D}_N = \{y[n]\}_{n\in\overline{1,N}}$ (setul de date măsurate la ieşirea procesului auto-regresiv)
- na (ordinul modelului auto-regresiv)

Iniţializare

① Se evaluează valorile secvenţei de auto-covarianţă a datelor: $r_y^N[0]$ $r_y^N[1]$ $\cdots$ $r_y^N[na]$

② Se estimează parametrii modelului de ordin 1:

$$\hat{a}_{1,1} = -\frac{r_y^N[1]}{r_y^N[0]} \overset{def}{=} \hat{\boldsymbol{\theta}}_1$$

$$\hat{\lambda}_1^2 = r_y^N[0]\left(1-\hat{a}_{1,1}^2\right)$$

Buclă iterativă

Pentru $p \in \overline{2,na}$

① Se evaluează cîştigul:

$$k_p = -\frac{1}{\hat{\lambda}_{p-1}^2}\left(r_y^N[p] + \hat{a}_{p-1,1}\, r_y^N[p-1] + \cdots + \hat{a}_{p-1,p-1}\, r_y^N[1]\right)$$

② Se reactualizează vectorul curent al parametrilor:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_p = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{p-1} \\ 0 \end{bmatrix} + k_p \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{p-1}^R \\ 1 \end{bmatrix}$$

③ Se reactualizează dispersia zgomotului alb:

$$\hat{\lambda}_p^2 = \hat{\lambda}_{p-1}^2\left[1-k_p^2\right]$$

Date de ieşire

- $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{na}$ ⇒ Parametrii estimaţi ai modelului AR[na].
- $\hat{\lambda}_{na}^2$ ⇒ Dispersia estimată a zgomotului alb.

Propoziţia 6

$|k_p| \le 1$ ⇒ Modelul este stabil.

☝ Coeficienţii de reflexie din cadrul Algoritmului Schür-Cohn.

Algoritmul Levinson-Durbin (continuare)

Performanţele ALD

☺ Algoritmul este extrem de eficient, deoarece se evită inversarea explicită a matricii sistemului.

Exerciţiu

- Să se proiecteze un algoritm de inversare a matricilor simetrice de tip Toeplitz, folosind ALD.

Efortul de calcul

	Înmulţiri	Adunări
Calculul auto-covarianţelor	$\left[\dfrac{(na+1)(2N-na+2)}{2}\right]_\times$	$\left[\dfrac{(na+1)(2N-na)}{2}\right]_+$
Estimaţia iniţială	$[3]_\times$	$[1]_+$
Procesul iterativ	$[(na-1)(na+4)]_\times$	$\left[\dfrac{na(na-1)(3na-1)}{2}\right]_+$

Total $O_{ALD} \sim \left[\dfrac{(na+1)(na+2N+10)}{2}\right]_\times + \left[\dfrac{(na+1)(na+2N-2)}{2}\right]_+$

Exemplul 1 $N=1000$ $na=30$ (off-line)

$O_{MCMMP} \sim [495625]_\times + [493795]_+$ $O_{MYWW} \sim [70515]_\times + [69120]_+$ $O_{ALD} \sim [31590]_\times + [31434]_+$

Exemplul 2 $N=10$ $na=10$ (on-line)

$O_{MCMMP} \sim [1625]_\times + [1415]_+$ $O_{MYWW} \sim [1605]_\times + [1440]_+$ $O_{ALD} \sim [210]_\times + [154]_+$

☝ Efortul de calcul a scăzut sensibil, în special în cazul identificării adaptive, cînd ordinul modelului este comparabil cu dimensiunea orizontului de măsură.

❹ Metode de identificare şi validare

❹.❽ Identificarea şi predicţia proceselor autoregresive

Aplicaţii

Predicţia optimală a proceselor auto-regresive

Estimarea spectrală prin modelare auto-regresivă

Predicţia optimală

Obiectiv

Estimarea valorilor ieşirii unui proces stocastic dincolo de orizontul de măsură, cu ajutorul unui model de identificare.

- Notaţii specifice:

$P \in \mathbb{N}^*$ ➔ Margine de predicţie: număr ales plecînd de la anumite caracteristici ale procesului stocastic.

$\overline{N+1, N+P}$ ➔ Orizont de predicţie (dincolo de orizontul de măsură).

$\mathcal{M}_p$ ➔ Predictor: model matematic determinat în scopul predicţiei cu deplasamentul p. $p \in \overline{1,P}$

☝ Modelul de identificare determinat folosind datele măsurate poate fi de asemenea un predictor.

✍ Convenţie

$$\mathcal{M}(\theta) \overset{def}{=} \mathcal{M}_0$$

$y_p[N+p \mid \mathcal{D}_N]$ ➔ Valoarea predictată cu deplasamentul p (la momentul $N+p$), folosind datele achiziţionate pe orizontul de măsură.

☝ Predictori eventual diferiţi pentru deplasamente diferite.

$y_0[N+p \mid \mathcal{D}_N]$ ➔ Valoarea predictată cu deplasamentul p (la momentul $N+p$), folosind modelul de identificare.

Aplicaţii: predicţia optimală (continuare)

Eroare de predicţie cu p paşi

$$\varepsilon[p] \overset{def}{=} y[N+p] - y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N] \quad \forall\, p \in \overline{1,P}$$

ieşirea măsurată ($y[N+p]$) — ieşirea predictată (prognozată) ($y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]$)

În cazul general, pentru fiecare pas de predicţie se va utiliza un predictor proiectat special.

Caz particular $\mathcal{M}(\theta) \overset{def}{=} \mathcal{M}_0$

$$\varepsilon_0[p] \overset{def}{=} y[N+p] - y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N] \quad \forall\, p \in \overline{1,P}$$

Erorile de predicţie pot fi evaluate cu ajutorul unui singur predictor: cel dat de modelul de identificare.

Problema predicţiei optimale

Se cere determinarea unui set de predictori $\{\hat{\mathcal{M}}_p\}_{p\in\overline{1,P}}$ cu ieşirile $\{\hat{y}_p\}_{p\in\overline{1,P}}$, care să fie optimali în sensul minimizării dispersiei erorii de predicţie:

$$E\left\{\left(y[N+p] - \hat{y}_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\} \le E\left\{\left(y[N+p] - y_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}, \quad \forall\, p \in \overline{1,P}$$

(faţă de alţi predictori $\{\mathcal{M}_p\}_{p\in\overline{1,P}}$ cu ieşirile $\{y_p\}_{p\in\overline{1,P}}$);

$$E\left\{\left(y[N+p] - \hat{y}_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\} \le E\left\{\left(y[N+p] - y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}, \quad \forall\, p \in \overline{1,P}$$

(faţă de predictorul de identificare).

Eroare optimală de predicţie cu p paşi

$$\hat{\varepsilon}[p] \overset{def}{=} y[N+p] - \hat{y}_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N] \quad \forall\, p \in \overline{1,P}$$

Aplicaţii: predicţia optimală (continuare)

Cum poate fi rezolvată problema predicţiei optimale?

În forma originală, problemei nu i se poate construi o soluţie, deoarece nu se dispune de setul de date măsurate pe orizontul de predicţie.

Problema trebuie relaxată, astfel încît să se poată construi o soluţie sub-optimală.

- Folosind inegalitatea triunghiului, se poate obţine o condiţie de sub-optimalitate din condiţia de optimalitate.

$$E\left\{\left(y[N+p]-\hat{y}_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\} =$$

se adună şi se scade ieşirea predictată cu modelul de identificare

$$= E\left\{\left(y[N+p]-y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]+y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]-\hat{y}_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\} \leq$$

inegalitatea triunghiului

$$\leq E\left\{\left(y[N+p]-y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}+E\left\{\left(y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]-\hat{y}_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\} \quad \forall\, p\in\overline{1,P}$$

- În loc să fie minimizată dispersia erorii de predicţie, va fi minimizat termenul din dreapta inegalităţii, exprimat ca o sumă de două dispersii.

Problema predicţiei sub-optimale

$$\min E\left\{\left(y[N+p]-y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}+\min E\left\{\left(y_0[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]-\hat{y}_p[N+p\,|\,\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}$$

$\forall\, p\in\overline{1,P}$