

4 Metode de identificare și validare

4.5 Identificarea și predicția proceselor autoregresive

Aplicații: predicția optimală (continuare)



Problema predicției sub-optimale

$$\min E \left\{ \left(y[N+p] - y_0[N+p | \mathcal{D}_N] \right)^2 \right\} + \min E \left\{ \left(y_0[N+p | \mathcal{D}_N] - \hat{y}_p[N+p | \mathcal{D}_N] \right)^2 \right\} \quad \forall p \in \overline{1, P}$$

Modelul de identificare cel mai bun pentru predicție **trebuie să minimizeze eroarea de predicție pe orizontul de predicție.**

Predictorul sub-optimal este **cel mai “apropiat” de predictorul de identificare.**

$$E \left\{ \left(y_0[N+p | \mathcal{D}_N] - \hat{y}_p[N+p | \mathcal{D}_N] \right)^2 \right\} \leq E \left\{ \left(y_0[N+p | \mathcal{D}_N] - y_p[N+p | \mathcal{D}_N] \right)^2 \right\} \quad \forall p \in \overline{1, P}$$



⊗ Din nou apar în discuție valorile necunoscute ale ieșirii procesului pe orizontul de predicție.



MMEP operează cu erorile de predicție **pe orizontul de măsură.**

Dacă $P \ll N$ (condiția fiind naturală)

IE poate fi utilizată pentru relaxarea noii probleme.

Modelul de identificare (sub-)optimal pentru predicție este cel rezultat în urma aplicării MMEP.

$$E \left\{ \left(y[N+p] - y_0[N+p | \mathcal{D}_N] \right)^2 \right\} \cong \frac{1}{N+p} \sum_{n=1}^{N+p} \left(y[n+p] - y_0[n+p | \mathcal{D}_N] \right)^2 \cong \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(y[n] - y_0[n | \mathcal{D}_N] \right)^2 \quad \forall p \in \overline{1, P}$$

$y_{\mathcal{M}}[n, \theta]$

$$\hat{\theta}_N = \operatorname{argmin}_{\theta \in \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^{n\theta}} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(y[n] - y_{\mathcal{M}}[n, \theta] \right)^2 \right]$$

4 Metode de identificare și validare

4.5 Identificarea și predicția proceselor autoregresive

Aplicații: predicția optimală (continuare)

- Strategia generală de construcție a predictorilor sub-optimali:

① Determinarea setului de predictorii (sub-)optimali care verifică inegalitățile:

$$E \left\{ \left(y_0[N+p | \mathcal{D}_N] - \hat{y}_p[N+p | \mathcal{D}_N] \right)^2 \right\} \leq E \left\{ \left(y_0[N+p | \mathcal{D}_N] - y_p[N+p | \mathcal{D}_N] \right)^2 \right\} \quad \forall p \in \overline{1, P}$$

✦ Etapă cu caracter teoretic.

Obiectivul acestei etape este de a deduce o **expresie formală** între predictorul curent sub-optimal și cel de identificare.

② Determinarea modelului de identificare (sub-)optimal prin minimizarea erorii de predicție pe durata orizontului de măsură:

$$\sum_{n=1}^N (y[n] - \hat{y}_0[n | \mathcal{D}_N])^2 \leq \sum_{n=1}^N (y[n] - y_0[n | \mathcal{D}_N])^2$$

✦ Datorită etapei precedente, predictorii (sub-)optimali vor fi automat determinați.

$$\stackrel{\text{def}}{\hat{\varepsilon}}_0[p] = y[N+p] - \hat{y}_0[N+p | \mathcal{D}_N] \quad (\text{eroarea de predicție (sub-)optimală}) \quad \forall p \in \overline{0, P}$$

Folosind acest scenariu, cele două dispersii ale problemei predicției sub-optimale conduc la o valoare minimă însumată egală cu:

$$E \left\{ \hat{\varepsilon}_0^2[p] \right\}$$

$\forall p \in \overline{0, P}$

$$E \left\{ \left(y_0[N+p | \mathcal{D}_N] - \hat{y}_p[N+p | \mathcal{D}_N] \right)^2 \right\} = 0 \quad \forall p \in \overline{1, P} \quad \text{Restricție necesară}$$

4 Metode de identificare și validare

4.5 Identificarea și predicția proceselor autoregresive



Aplicații: predicția optimală (continuare)

Cazul modelelor de tip AR?



În acest caz, predictorii sub-optimali sunt determinați din clasa predictorilor ale căror ieșiri sunt necorelate cu zgomotul alb pe orizontul de predicție.

$$E\{y_p[N+p | \mathcal{D}_N]e[N+k]\} = 0 \quad \forall k, p \in \overline{1, P}$$

- Restricție naturală sugerată de faptul că datele achiziționate sunt necorelate cu valorile viitoare ale zgomotului, adică dincolo de orizontul de măsură.

1 Determinarea teoretică a setului de predictorii (sub-)optimali.



Modelul AR poate fi exprimat cu ajutorul a două filtre: unul de tip FIR, care operează cu valori ale zgomotului din orizontul de predicție și altul de tip IIR, care operează cu valori ale zgomotului din orizontul de măsură sau anterioare acestuia.

$$y[N+p] = \frac{1}{A^*(q^{-1})} e[N+p] = \sum_{n \geq 0} \alpha_n^* e[N+p-n] = \sum_{n=0}^{p-1} \alpha_n^* e[N+p-n] + \sum_{n \geq p} \alpha_n^* e[N+p-n], \quad \forall p \in \overline{1, P}$$

împățire infinită

funcția de sistem a filtrului

$$C_p^*(q^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + c_1^* q^{-1} + \dots + c_{p-1}^* q^{1-p}$$

α_1^*

α_{p-1}^*

$$c_0^* = \alpha_0^* = 1$$

FIR

orizontul de predicție

IIR

orizontul de măsură

$$C_{p+1}^*(q^{-1}) = C_p^*(q^{-1}) + c_p^* q^{-p}$$

relație recurentă remarcabilă

4 Metode de identificare și validare

4.5 Identificarea și predicția proceselor autoregresive

Aplicații: predicția optimală (continuare)

Cum se pot determina coeficienții filtrului de tip FIR?

Folosind **Teorema Împărțirii cu Rest (TIR)**.

$$\begin{array}{l} \cancel{1} \\ \hline \cancel{-1 - a_1^* q^{-1} - a_2^* q^{-2} - \dots} \\ \hline \cancel{-a_1^* q^{-1} - a_2^* q^{-2} - \dots} \\ \hline \cancel{a_1^* q^{-1} + (a_1^*)^2 q^{-2} + \dots} \\ \hline \vdots \\ \hline \boxed{(a_1^*)^2 - a_2^*} q^{-2} + \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 + a_1^* q^{-1} + a_2^* q^{-2} + \dots + a_{na}^* q^{-na} \\ \hline \boxed{1} - \boxed{a_1^* q^{-1}} + \dots + \boxed{c_{p-1}^* q^{1-p}} \end{array} \rightarrow C_p^*(q^{-1}) \text{ (cît)}$$

Procedură implementabilă (Algoritmul lui Euclid).

Exercițiu

$$q^{-p} D_p^*(q^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} q^{-p} (d_{p,0}^* + d_{p,1}^* q^{-1} + \dots + d_{p,na-1}^* q^{1-na}) \text{ (rest)}$$

Grad constant: $na-1$.

Coeficienți variabili.

Așadar

$$\frac{1}{A^*(q^{-1})} = C_p^*(q^{-1}) + \frac{q^{-p} D_p^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = C_p^*(q^{-1}) A^*(q^{-1}) + q^{-p} D_p^*(q^{-1}) \quad \forall p \in \overline{1, P}$$

$$y[N+p] = C_p^*(q^{-1}) e[N+p] + \frac{D_p^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e[N] = \boxed{C_p^*(q^{-1}) e[N+p]} + \boxed{D_p^*(q^{-1}) y[N]} \quad \forall p \in \overline{1, P}$$

viitor prezent+trecut

Expresie formată din ieșirile a două filtre de tip FIR.

4 Metode de identificare și validare

4.5 Identificarea și predicția proceselor autoregresive

Aplicații: predicția optimală (continuare)

 $E\{y_p[N+p | \mathcal{D}_N]e[N+k]\} = 0$
 $\forall k, p \in \overline{1, P}$
ipoteza de necorelare

$E\{(C_k^*(q^{-1})e[N+k])y_p[N+p | \mathcal{D}_N]\} = 0$
 $\forall k, p \in \overline{1, P}$



Filtrul “viitorului” operează numai asupra valorilor zgomotului alb de pe orizontul de predicție, deci este natural ca **ieșirea acestuia să nu fie corelată cu ale predictorilor.**

De asemenea

Ieșirea filtrului “viitorului” (care operează numai cu valori ale zgomotului alb de pe orizontul de predicție) **nu este corelată cu ieșirea filtrului “prezentului și trecutului”** (care operează numai cu date măsurate).

$E\{(C_p^*(q^{-1})e[N+p])(D_p^*(q^{-1})y[N])\} = 0$
 $\forall p \in \overline{1, P}$

Rezultă

exprimare cu 2 filtre de tip FIR

$$\begin{aligned} E\{(y_0[N+p | \mathcal{D}_N] - y_p[N+p | \mathcal{D}_N])^2\} &\stackrel{\downarrow}{=} E\{(C_p^*(q^{-1})e[N+p] + D_p^*(q^{-1})y[N] - y_p[N+p | \mathcal{D}_N])^2\} = \\ &= E\{(C_p^*(q^{-1})e[N+p])^2\} + 2E\{(C_p^*(q^{-1})e[N+p])(D_p^*(q^{-1})y[N] - y_p[N+p | \mathcal{D}_N])\} + \\ &+ E\{(D_p^*(q^{-1})y[N] - y_p[N+p | \mathcal{D}_N])^2\} = \\ &= E\{(C_p^*(q^{-1})e[N+p])^2\} + E\{(D_p^*(q^{-1})y[N] - y_p[N+p | \mathcal{D}_N])^2\}, \quad \forall p \in \overline{1, P}. \end{aligned}$$

4 Metode de identificare și validare

4.5 Identificarea și predicția proceselor autoregresive



Aplicații: predicția optimală (continuare)

Așadar

☞ Sumă de două dispersii.

$$E\left\{\left(y_0[N+p|\mathcal{D}_N] - y_p[N+p|\mathcal{D}_N]\right)^2\right\} = E\left\{\left(C_p^*(q^{-1})e[N+p]\right)^2\right\} + E\left\{\left(D_p^*(q^{-1})y[N] - y_p[N+p|\mathcal{D}_N]\right)^2\right\}$$



Deoarece numai a doua dispersie depinde de ieșirile predictorilor, **doar ea poate fi anulată în vederea minimizării.**

$\forall p \in \overline{1, P}$

$$E\left\{\left(D_p^*(q^{-1})y[N] - y_p[N+p|\mathcal{D}_N]\right)^2\right\} = 0 \iff \hat{y}_p[N+p|\mathcal{D}_N] = D_p^*(q^{-1})y[N]$$

$\forall p \in \overline{1, P}$

☞ Expresiile predictorilor AR (sub-)optimali.

$\forall p \in \overline{1, P}$

Pentru fiecare deplasament de predicție, trebuie **(re-)evaluat** restul împărțirii polinomului unitar la polinomul modelului AR.



Gradul funcției de sistem fiind constant ($na-1$), doar **coeficienții trebuie adaptați pentru fiecare deplasament de predicție**, folosind TIR.

Un termen care oferă informația despre **precizia predicției.**

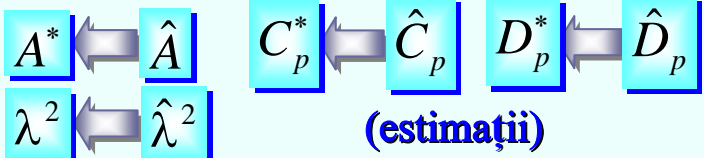


2 Determinarea modelului de identificare folosind MMEP (adică ALD).

Predictorii practici (sub-)optimali

$$\sigma_p^{2 \text{ def}} = E\left\{\left(C_p^*(q^{-1})e[N+p]\right)^2\right\} = \lambda^2 \left[1 + (c_1^*)^2 + \dots + (c_{p-1}^*)^2\right]$$

$\forall p \in \overline{1, P}$

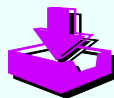


☞ Precizia ideală de predicție **scade pe măsură ce deplasamentul de predicție se îndepărtează de orizontul de măsură.**

4 Metode de identificare și validare

4.5 Identificarea și predicția proceselor autoregresive

Algoritmul predicției AR (sub-)optimale (nerecursiv)



Date de intrare

$\mathcal{D}_N = \{y[n]\}_{n \in \overline{1, N}}$ (setul de date măsurate la ieșirea procesului auto-regresiv)
 na (ordinul modelului auto-regresiv)
 P (marginea de predicție)



Inițializare

Se estimează parametrii modelului **AR** și dispersia zgomotului alb, eventual folosind **ALD**.

$$\hat{A}(q^{-1}) = 1 + \hat{a}_1 q^{-1} + \dots + \hat{a}_{na} q^{-na}$$

$$\hat{\lambda}^2$$



Bucă iterativă

↳ Pentru $p \in \overline{1, P}$

① Se aplică **TIR (Algoritmul lui Euclid)**: $1 = \hat{C}_p(q^{-1})\hat{A}(q^{-1}) + q^{-p}\hat{D}_p(q^{-1})$

② Se estimează valorile predictate ale ieșirii procesului:

$$\hat{y}_p[N + p | \mathcal{D}_N] = D_p^*(q^{-1})y[N] =$$

$$= \hat{d}_{p,0}y[N] + \hat{d}_{p,1}y[N - 1] + \dots + \hat{d}_{p,na-1}y[N - na + 1]$$

③ Se estimează dispersia erorii de predicție: $\hat{\sigma}_p^2 = \hat{\lambda}^2 [1 + \hat{c}_1^2 + \dots + \hat{c}_{p-1}^2]$



Date de ieșire

$\{\hat{y}_p[N + p | \mathcal{D}_N]\}_{p \in \overline{1, P}}$ → **Ieșirile predictate.**

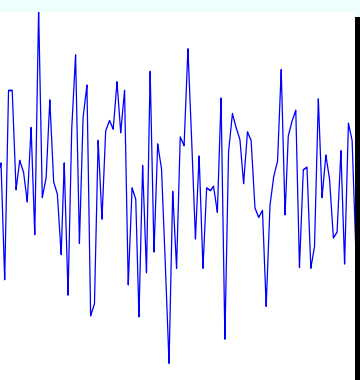
$\{\hat{\sigma}_p^2\}_{p \in \overline{1, P}}$ → **Dispersiile estimate ale erorilor de predicție.**

4 Metode de identificare și validare

4.5 Identificarea și predicția proceselor autoregresive

Aplicații: predicția optimală (continuare)

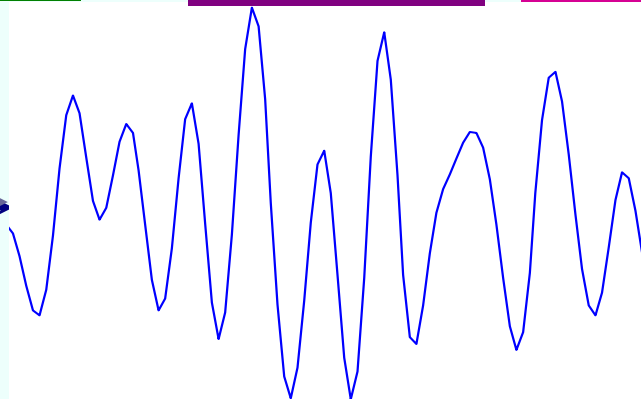
Interpretare geometrică în cazul proceselor normal distribuite



e



y



$$\mathcal{D}_N = \{y[n]\}_{n \in \overline{1, N}}$$

$$\hat{y}_p[N + p | \mathcal{D}_N]$$

$$\hat{y}_p[N + p | \mathcal{D}_N] + 3\hat{\sigma}_p$$

y[N + p]

Orizont de măsură

$$\hat{y}_p[N + p | \mathcal{D}_N] - 3\hat{\sigma}_p$$

Orizont de predicție

- Valorile (sub-)optimale predictate (care depind de datele măsurate) sunt de asemenea **normal distribuite**, dar cu **dispersiile erorilor de predicție**.
- În jurul fiecărei valori predictate, se poate construi câte un interval de încredere de tip 3σ , în care valoarea reală a ieșirii procesului **are șanse de peste 95% să aparțină**.
- În afara valorilor predictate, pe grafic se amplasează și intervalele de încredere, sub forma unor **segmente liniare centrate în valorile predictate**.
- Aceste intervale **devin din ce în ce mai largi odată cu creșterea deplasamentului de predicție**, indicând **deteriorarea preciziei de predicție**.
- Curba valorilor măsurate (continuă) **se îndepărtează din ce în ce mai mult** de curba valorilor predictate (punctată).

4 Metode de identificare și validare

4.5 Identificarea și predicția proceselor autoregresive

Aplicații: predicția optimală (continuare)

⊗ Dezavantajul major al algoritmului de predicție nerecursiv: **ineficiența cauzată de estimarea tuturor coeficienților restului pentru fiecare deplasament de predicție.**

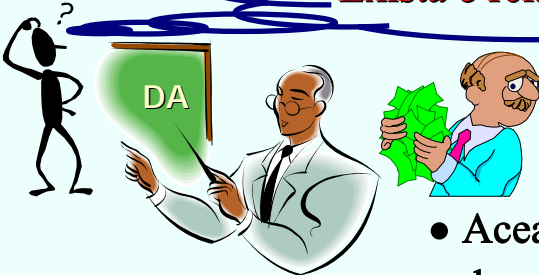
⚡ Cîțul poate fi calculat recursiv.



$$C_{p+1}^*(q^{-1}) = C_p^*(q^{-1}) + c_p^* q^{-p}$$

$$\forall p \in \overline{1, P-1}$$

Există o relație recursivă și între resturi succesive?



În realitate, se poate evidenția o relație recursivă între ieșirile succesive ale predictorilor (sub-)optimali.

- Aceasta creează impresia că **există un singur predictor AR (sub-)optimal**, de aceea se omite indicele p din notație.

Exercițiu

Teorema 7 (forma recursivă a predictorilor AR (sub-)optimali)

Valorile predictate ale procesului de tip AR folosind predictorul (sub-)optimal verifică următoarele relații de recurență:

a. pentru $p \in \overline{1, na}$: $\hat{y}[N + p | \mathcal{D}_N] = -\hat{a}_1 \hat{y}[N + p - 1 | \mathcal{D}_N] - \dots - \hat{a}_{p-1} \hat{y}[N + 1 | \mathcal{D}_N] - \hat{a}_p y[N] - \dots - \hat{a}_{na} y[N + p - na];$

b. pentru $p \in \overline{na + 1, P}$: $\hat{y}[N + p | \mathcal{D}_N] = -\hat{a}_1 \hat{y}[N + p - 1 | \mathcal{D}_N] - \dots - \hat{a}_{na} \hat{y}[N + p - na | \mathcal{D}_N].$

De asemenea, dispersiile erorilor de predicție, verifică relația de recurență:

$$\hat{\sigma}_p^2 = \hat{\sigma}_{p-1}^2 + \hat{c}_{p-1}^2 \hat{\lambda}^2, \quad \forall p \in \overline{1, P},$$

unde: $\hat{\sigma}_0^2 = 0.$

4 Metode de identificare și validare

4.5 Identificarea și predicția proceselor autoregresive



Estimarea spectrală



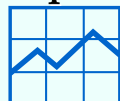
Aproximarea spectrului de putere al unei **serii de date** măsurate la ieșirea unui proces.

Estimație spectrală

Serie de timp

$$\mathcal{D} = \{y[n]\}_{n \in \overline{1, N}}$$

- Calitatea estimației spectrale este determinată de:
 - ➔ Corectitudinea cu care s-a efectuat achiziția datelor (determinată în principal de maniera în care a fost aleasă perioada de eșantionare).
 - ➔ Modelul matematic pe baza căruia se evaluează spectrul de putere.
- Proprietăți dezirabile ale estimației spectrale:



Netezime

- Cu cât spectrul are un aspect mai neted (adică mai regulat), cu atât el este mai util și mai ușor de interpretat.



Precizie (acuratețe)

- Condiție necesară pentru corectitudinea interpretării/prelucrărilor spectrale.

Deoarece setul de date măsurate are **suport finit** (rezoluție finită de reprezentare în timp), **precizia spectrului estimat** (rezoluția de reprezentare în frecvență) **este mărginită**.

Principiul de incertitudine Heisenberg-Gabor

☹ Cele două proprietăți sunt opuse!



☞ Produsul rezoluțiilor este mărginit.

4 Metode de identificare și validare

4.5 Identificarea și predicția proceselor autoregresive

Aplicații: estimarea spectrală (continuare)

- **Problema estimării spectrale** este abordată de regulă prin metode de PS.
- În cadrul IS, există **două abordări practice**, ambele avînd ca obiectiv **estimarea densității spectrale de putere a seriei de date**.



① Prima abordare constă în implementarea definiției densității spectrale.

$$\phi_y(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(r_y)(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_y[k] e^{-j\omega k} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad \phi_y^N(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} r_y^N[0] + 2 \sum_{k=1}^N r_y^N[k] \cos(\omega k) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

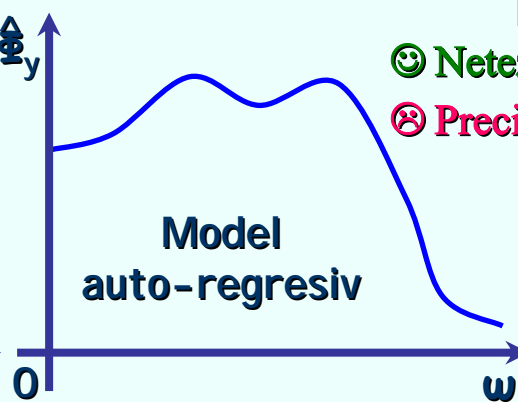
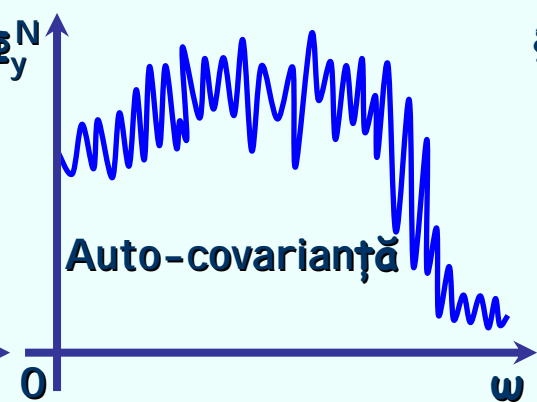
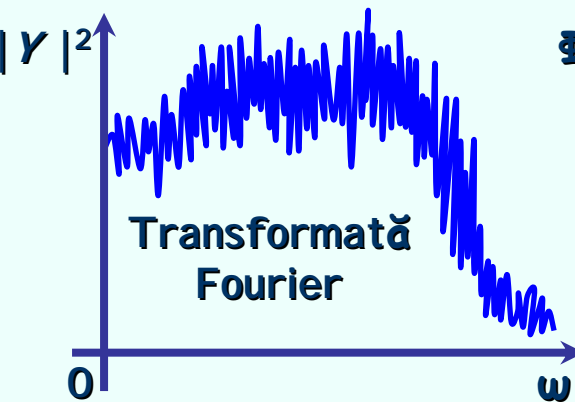
Exercițiu

☺ Față de spectrul evaluat cu ajutorul TF, densitatea spectrală este mai regulată.

⊗ Totuși, iregularitățile rămîn importante pentru date afectate de zgomote colorate.

② A doua abordare propune identificarea prealabilă a seriei de date cu un model auto-regresiv (AR sau ARMA), urmată de evaluarea densității spectrale folosind proprietatea transferului acesteia prin sisteme liniare.

$$\hat{\phi}_y(\omega) = \hat{\lambda}^2 \left| \frac{\hat{C}(e^{j\omega})}{\hat{A}(e^{j\omega})} \right|^2 = \hat{\lambda}^2 \left| \frac{1 + \hat{c}_1 e^{-j\omega} + \dots + \hat{c}_{nc} e^{-jnc\omega}}{1 + \hat{a}_1 e^{-j\omega} + \dots + \hat{a}_{na} e^{-jna\omega}} \right|^2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$



☺ Netezire importantă.

⊗ Precizie acceptabilă.