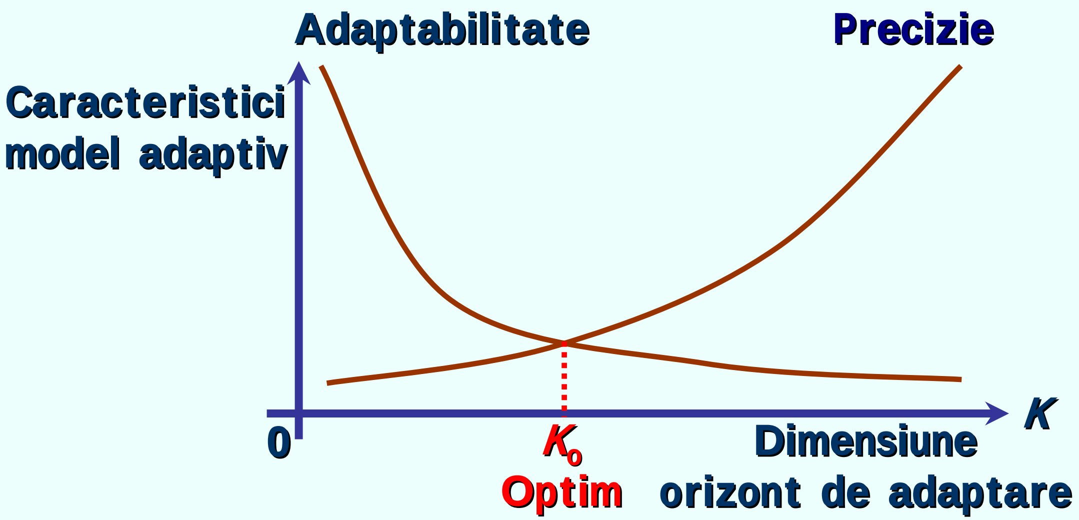

# ❹ Metode de identificare şi validare

## ❹.❾ Metode adaptive de identificare

- Majoritatea proceselor furnizoare de date sunt neliniare şi/sau posedă parametri variabili în timp.
- Identificarea proceselor cu parametri variabili în timp se realizează cu ajutorul modelelor şi metodelor adaptive (recursive).
- Prin identificarea adaptivă, se urmăreşte asigurarea unui compromis între două caracteristici opuse ale estimației parametrilor necunoscuți (variabili pe orizontul de măsură):




### Principiul metodelor adaptive

Estimația vectorului parametrilor necunoscuți se reactualizează folosind datele măsurate pe orizontul de adaptare.

$$\hat{\theta}_{K\left\lfloor \frac{k}{K} \right\rfloor} = \hat{\theta}_{K\left\lfloor \frac{k-1}{K} \right\rfloor} + \boxed{\Delta_{K\left\lfloor \frac{k}{K} \right\rfloor}} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Corecție

Adaptabilitatea scade, în timp ce precizia creşte odată cu dimensiunea orizontului de adaptare.

Cu cît se achiziționează mai multe date între momentele de reactualizare, cu atît adaptarea se efectuează mai rar, modelul fiind incapabil să surprindă variațiile caracteristicilor procesului între aceste momente.

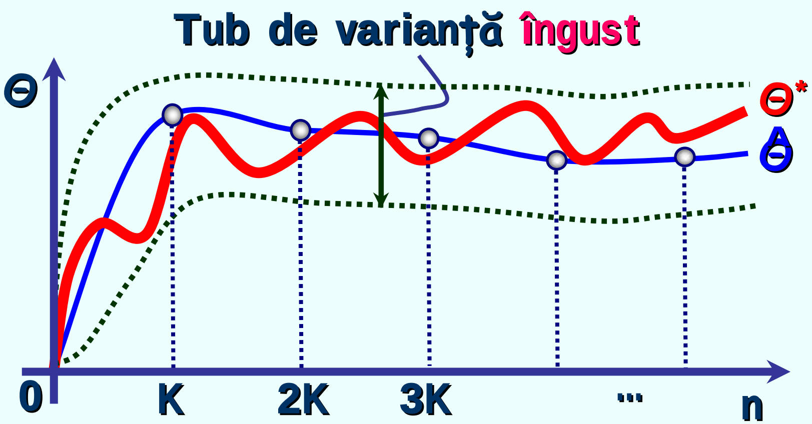
În schimb, precizia modelului creşte, deoarece parametrii săi sunt determinați cu ajutorul unui set mai bogat de date.

# ❹ Metode de identificare şi validare

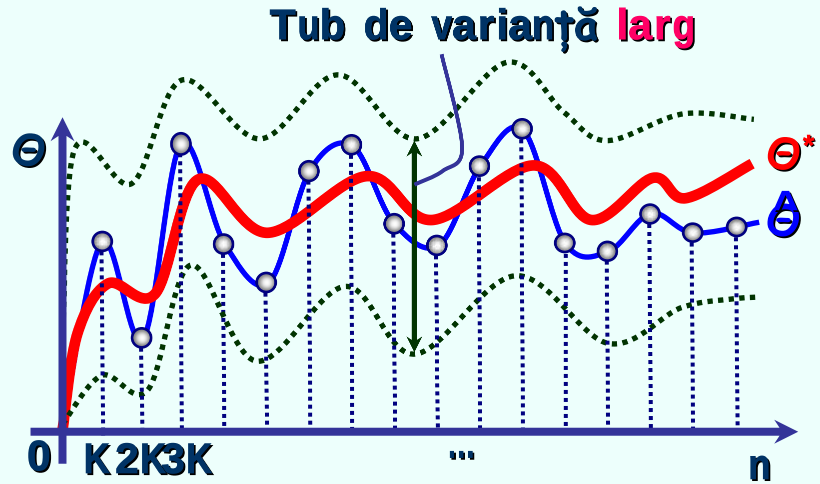
## ❹.❾ Metode adaptive de identificare

☹ Asigurarea compromisului precizie-adaptabilitate este dificilă.

**Exemplu** Cazul parametrului scalar, variabil în timp.




Orizont de adaptare **larg**



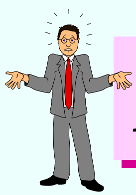

Orizont de adaptare **îngust**

☺ Valorile estimate ale parametrului sunt relativ apropiate de cele adevărate şi tubul de varianță este relativ îngust.

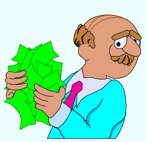
☹ Graficul parametrului estimat este neted, deci modelul sesizează mai puțin variațiile locale ale parametrului adevărat.

☹ Valorile estimate ale parametrului sunt relativ depărtate de cele adevărate şi tubul de varianță este relativ larg.

☺ Graficul parametrului estimat urmăreşte variațiile locale ale parametrului adevărat, cu o anumită acuratețe.



$K = ?$



Se sacrifică precizia în favoarea adaptabilității.

$K = 1$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \Delta_k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

# ❹ Metode de identificare şi validare

## ❹.❾ Metode adaptive de identificare

**Metodele abordate în acest curs**

- Metoda Celor Mai Mici Pătrate Recursivă (MCMMP-R)
- MCMMP-R cu fereastră exponenţială (MCMMP-R$\lambda$)
- MCMMP-R cu fereastră dreptunghiulară (MCMMP-R□)
- MCMMP-R bazată pe descompunerea QR (MCMMPQR-R)
- Metoda Varibilelor Instrumentale Recursivă (MVI-R)
- MVI-R cu fereastră exponenţială (MVI-R$\lambda$)
- MVI-R cu fereastră dreptunghiulară (MVI-R□)

**Alte metode adaptive (de precizie şi complexitate ridicate)**

- Metode de Gradient Recursive (M$\nabla$-R)
- MCMMPE Recursivă (MCMMPE-R)
- MMEP Recursivă (MMEP-R)
- MRPL Recursivă (MRPL-R)
- Metoda Kalman-Bucy (MKB)

☝ Va fi descrisă în finalul cursului de IS.

**Strategia generală**

Expresia generală a corecţiei pentru metoda recursivă (on-line) va fi dedusă plecînd de la expresia finală a estimaţiei din metoda nerecursivă (off-line).

## ❹.❾ Metode adaptive de identificare

**De ce corecţia aplicată vectorului curent al parametrilor estimaţi este aditivă?**

Acest rezultat remarcabil se datorează în realitate **IE**, care permite aproximarea mediei statistice cu o medie temporală **exprimată prin intermediul unei sume**.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \boldsymbol{\Delta}_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

### De asemenea

Eficienţa crescută a algoritmilor adaptivi de identificare se datorează unui rezultat din **Teoria Matricilor**.

### Lema 1 (Inversarea matricilor modificate aditiv de un produs exterior)

**Fie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice inversabilă şi $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ doi vectori cu dimensiunile egale (compatibili dimensional cu matricea A), avînd proprietatea: $\mathbf{c}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \neq -1$. Atunci matricea $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T$ este inversabilă, inversa acesteia avînd exprimarea:**

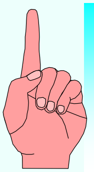
$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{c}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{c}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}} .$$

**Demonstraţie**

**Exerciţiu** (prin verificare directă)

**Caz particular** $\mathbf{b} = \mathbf{c}$

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{b}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}$$



Dacă inversa unei matrici este deja evaluată, prin adăugarea unui produs exterior la matricea originală, rezultă o nouă matrice a cărei inversă poate fi evaluată **fără a efectua inversarea explicită a acesteia** (se efectuează **doar inversarea unui scalar**).

# ❹ Metode de identificare şi validare


## ❹.❾ Metode adaptive de identificare

### MCMMP-R – varianta de bază

**MCMMP nerecursivă (off-line)**

☝ Pentru orice model de regresie liniară.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \boxed{\left(\sum_{n=1}^{k} \boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\right)^{-1}} \left(\sum_{n=1}^{k} \boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\right) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\mathbf{P}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N) = \lambda^2 \left(\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\right)^{-1}$$

matricea de auto-covarianţă a erorii de estimare

$\mathbf{P}_k$ 🡐 Notaţie sugerată de Teorema fundamentală a MCMMP.

- Inversele matricilor $\mathbf{P}_k$ verifică o relaţie recurentă evidentă:

$$\mathbf{P}_k^{-1} \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{k} \boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n] = \boxed{\sum_{n=1}^{k-1} \boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]} + \boldsymbol{\varphi}[k]\boldsymbol{\varphi}^T[k] = \mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \boldsymbol{\varphi}[k]\boldsymbol{\varphi}^T[k]\,, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

$\mathbf{P}_{k-1}^{-1}$

$\mathbf{P}_0 \in \mathbb{R}^{n\theta \times n\theta}$ ➔ Matrice iniţială care trebuie să verifice proprietăţile tuturor matricilor succesive: inversabilitate, simetrie, pozitiv (semi-definire).

- Folosind acelaşi artificiu, estimaţia off-line se poate de asemenea exprima recursiv:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \mathbf{P}_k \left(\sum_{n=1}^{k} \boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\right) = \mathbf{P}_k \left(\underbrace{\sum_{n=1}^{k-1} \boldsymbol{\varphi}[n]y[n]}_{\mathbf{P}_{k-1}^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}} + \boldsymbol{\varphi}[k]y[k]\right) = \mathbf{P}_k \left(\mathbf{P}_{k-1}^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \boldsymbol{\varphi}[k]y[k]\right) =$$

$$= \mathbf{P}_k \left[\left(\mathbf{P}_k^{-1} - \boldsymbol{\varphi}[k]\boldsymbol{\varphi}^T[k]\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \boldsymbol{\varphi}[k]y[k]\right] = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \mathbf{P}_k\boldsymbol{\varphi}[k]\left(y[k] - \boldsymbol{\varphi}^T[k]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

$\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{R}^{n\theta}$ iniţializare prestabilită

# ❹ Metode de identificare şi validare


## ❹.❾ Metode adaptive de identificare

### MCMMP-R – varianta de bază (continuare)

**Aşadar**

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \underbrace{\mathbf{P}_k \boldsymbol{\varphi}[k]\left(y[k] - \boldsymbol{\varphi}^T[k]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}\right)}_{\Delta_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

☜ O primă relaţie recursivă.

$\Delta_k$ Corecţie

☹ Ineficientă, deoarece la fiecare pas trebuie inversată o matrice.

- Corecţia este formată din 2 factori:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \boldsymbol{\gamma}_k \varepsilon[k] \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\varepsilon[k] \overset{def}{=} y[k] - \boldsymbol{\varphi}^T[k]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}$$

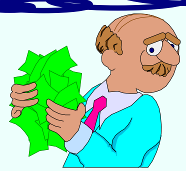
➔ Eroarea de predicţie cu un pas.

$$\boldsymbol{\gamma}_k \overset{def}{=} \mathbf{P}_k \boldsymbol{\varphi}[k]$$

➔ Cîştig (de senzitivitate), cu rolul de a pondera eroarea de predicţie pentru fiecare componentă a vectorului parametrilor estimaţi.

☝ Nu toţi parametrii sunt la fel de sensibili la reactualizare.

Cum poate fi mărită eficienţa metodei?



Metoda ar fi mult mai eficientă dacă inversarea matricilor s-ar putea efectua tot de o manieră recursivă.

**Lema 1**

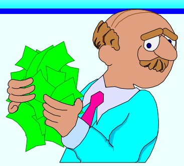
$$\mathbf{P}_k = \left(\mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \boldsymbol{\varphi}[k]\boldsymbol{\varphi}^T[k]\right)^{-1} = \mathbf{P}_{k-1} - \frac{\mathbf{P}_{k-1}\boldsymbol{\varphi}[k]\boldsymbol{\varphi}^T[k]\mathbf{P}_{k-1}}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T[k]\mathbf{P}_{k-1}\boldsymbol{\varphi}[k]} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Efortul de calcul efectuat iniţial pentru inversare este conservat de-a lungul procesului recursiv, adaptarea inverselor necesitînd numai împărţirea la un scalar.

# ❹ Metode de identificare şi validare

## ❹.❾ Metode adaptive de identificare

### MCMMP-R – varianta de bază (continuare)



Mai mult, eficienţa metodei poate creşte şi printr-o **organizare judicioasă a memoriei**.

- Folosind lema de inversare matricială se poate evalua şi **cîştigul de senzitivitate**:

$$\gamma_k \overset{def}{=} \mathbf{P}_k \varphi[k] \underset{\text{Lema 1}}{=} \mathbf{P}_{k-1}\varphi[k] - \frac{\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k]\varphi^T[k]\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k]}{1+\varphi^T[k]\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k]} =$$

se aduce la acelaşi numitor

$$= \frac{\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k] + \cancel{\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k]\varphi^T[k]\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k]} - \cancel{\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k]\varphi^T[k]\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k]}}{1+\varphi^T[k]\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k]} = \frac{\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k]}{1+\varphi^T[k]\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k]},$$

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*.$$

### Sumarul relaţiilor MCMMP-R (on line)

| | |
|---|---|
| Eroarea de predicţie | $\varepsilon[k] = y[k] - \varphi^T[k]\hat{\theta}_{k-1}$ |
| Cîştigul de senzitivitate | $\gamma_k = \dfrac{\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k]}{1+\varphi^T[k]\mathbf{P}_{k-1}\varphi[k]}$ |
| Matricea de auto-covarianţă a erorii de estimare | $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} - \gamma_k \varphi^T[k]\mathbf{P}_{k-1}$ |
| Vectorul parametrilor estimaţi | $\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \gamma_k\, \varepsilon[k]$ |

$\forall\, k \in \mathbb{N}^*$

Iniţializare?

➔ Informaţii preliminare **absente**:

$\theta_0 \in \mathbb{R}^{n\theta}$ arbitrar (eventual nul) $\qquad \mathbf{P}_0 = \alpha \mathbf{I}_{n\theta} > 0$

➔ Informaţii preliminare **disponibile** sub forma unui **set redus de date**:

$$\hat{\theta}_0 = \boxed{\left(\sum_{n=1}^{N_0}\varphi[n]\varphi^T[n]\right)^{-1}}\left(\sum_{n=1}^{N_0}\varphi[n]y[n]\right)$$

MCMMP off-line $\qquad \mathbf{P}_0$

MCMMP-R varianta de bază (continuare)

# ❹ Metode de identificare şi validare

## ❹.❾ Metode adaptive de identificare

### Algoritmul adaptiv al Celor Mai Mici Pătrate

**Date de intrare**
- $\mathcal{D}_{N_0} = \{\varphi[n]\}_{n\in\overline{1,N_0}} \cup \{y[n]\}_{n\in\overline{1,N_0}}$ (un set redus de date măsurate, dacă este posibil)
- $n\theta$ (indicele structural al modelului de identificare)

**Iniţializare**
- $\mathbf{P}_0 \in \mathbb{R}^{n\theta\times n\theta}$, $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{R}^{n\theta}$ ➔ neutră sau personalizată, după caz
- $k = 0$ ➔ indicele iterativ iniţial

**Buclă iterativă**

Pentru $k \geq 1$

① Se evaluează eroarea de predicţie curentă: $\varepsilon[k] = y[k] - \varphi^T[k]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}$

② Se evaluează vectorul auxiliar: $\xi_k = \mathbf{P}_{k-1}\varphi[k]$

③ Se evaluează cîştigul de senzitivitate: $\gamma_k = \dfrac{\xi_k}{1+\varphi^T[k]\xi_k}$

④ Se reactualizează matricea de auto-covarianţă a erorii de estimare: $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} - \gamma_k\,\xi_k^T$

⑤ Se reactualizează vectorul parametrilor estimaţi: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \gamma_k\,\varepsilon[k]$

⑥ Se incrementează indicele curent: $k \leftarrow k+1$

**Date de ieşire**

$\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ⇒ Parametrii modelului reactualizaţi la fiecare pas de adaptare.

### MCMMP-R – varianta de bază (continuare)

**Cum poate fi caracterizată precizia estimaţiei adaptive?**

Tot prin intermediul **conceptului de consistenţă**,
dar adaptat la anumite procese cu parametri variabili.

**Ipoteză**

$$\boldsymbol{\theta}_\infty^* \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}\left[E\left\{\boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\right\}\right]^{-1}\left[E\left\{\boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\right\}\right]$$

☝ Parametrii adevăraţi se stabilizează la valori constante.

- Se va arăta că parametrii estimaţi folosind **MCMMP-R** tind, la rîndul lor, la valorile constante, **indiferent de iniţializarea utilizată**.
- Se pleacă de la următoarea identitate evidentă: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}^*$ ⇔ $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \left(k\mathbf{P}_k\right)\left(\frac{1}{k}\mathbf{P}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k\right) \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}^*$
- Apoi, se deduc relaţii recurente pentru fiecare din cei **2 factori**.

$$k\mathbf{P}_k = \left(\frac{1}{k}\mathbf{P}_k^{-1}\right)^{-1} = \left[\frac{1}{k}\left(\mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \boldsymbol{\varphi}[k]\boldsymbol{\varphi}^T[k]\right)\right]^{-1} = \cdots = \left[\frac{1}{k}\left(\mathbf{P}_0^{-1} + \sum_{n=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\right)\right]^{-1}, \;\forall\, k \in \mathbb{N}^*.$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \mathbf{P}_k\boldsymbol{\varphi}[k]\left(y[k] - \boldsymbol{\varphi}^T[k]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}\right)$$

$$\mathbf{P}_k^{-1} = \mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \boldsymbol{\varphi}[k]\boldsymbol{\varphi}^T[k]$$

$$\frac{1}{k}\mathbf{P}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \frac{1}{k}\mathbf{P}_k^{-1}\left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \mathbf{P}_k\boldsymbol{\varphi}[k]\left(y[k] - \boldsymbol{\varphi}^T[k]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{k}\left[\left(\mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \cancel{\boldsymbol{\varphi}[k]\boldsymbol{\varphi}^T[k]}\right)\cancel{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}} + \boldsymbol{\varphi}[k]y[k] \cancel{- \boldsymbol{\varphi}[k]\boldsymbol{\varphi}^T[k]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}}\right] = \frac{1}{k}\left(\mathbf{P}_{k-1}^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \boldsymbol{\varphi}[k]y[k]\right) =$$

$$= \cdots = \frac{1}{k}\left(\mathbf{P}_0^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 + \sum_{n=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\right), \;\forall\, k \in \mathbb{N}^*.$$


### MCMMP-R – varianta de bază (continuare)

**Aşadar**

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \left[\frac{1}{k}\left(\mathbf{P}_0^{-1} + \sum_{n=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}[k]\boldsymbol{\varphi}^T[k]\right)\right]^{-1}\left[\frac{1}{k}\left(\mathbf{P}_0^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 + \sum_{n=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\right)\right] \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

☝ Contribuţia iniţializării se atenuează după o lege hiperbolică.

Algoritmul recursiv de bază funcţionează şi în cazul unei iniţializări necorespunzătoare (de exemplu, dacă matricea $\mathbf{P}_0$ nu este pozitiv definită), dar viteza de convergenţă scade.

**Rezultă**

$$\lim_{k\to\infty}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \left\{\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\mathbf{P}_0^{-1} + \sum_{n=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}[k]\boldsymbol{\varphi}^T[k]\right)\right]^{-1}\right\}\left\{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left(\mathbf{P}_0^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 + \sum_{n=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\right)\right\} =$$

$$= \left[\underbrace{\lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{P}_0^{-1}}{k}}_{0} + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\right]^{-1}\left[\underbrace{\lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{P}_0^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_0}{k}}_{0} + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\right] \overset{\text{IE}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[E\left\{\boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\right\}\right]^{-1}\left[E\left\{\boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\right\}\right] = \boldsymbol{\theta}_\infty^* .$$

☝ În general, însă, sunt dificil de cuantificat atît precizia, cît şi mai ales adaptabilitatea (capacitatea de urmărire a) estimaţiei parametrilor necunoscuţi.

**Exerciţiu**

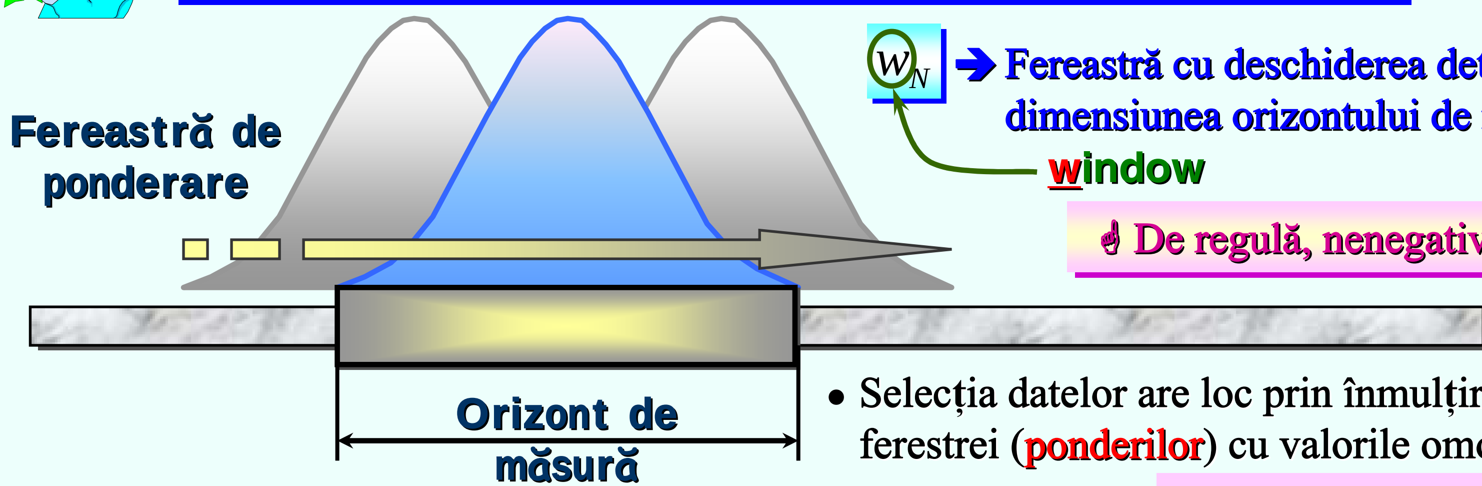
- Să se refacă raţionamentele anterioare pentru a proiecta şi analiza Algoritmul recursiv al Variabilelor Instrumentale.

## MCMMP-R – variante cu fereastră

- Există situații (în special în cazul proceselor rapid variabile) în care contribuția datelor anterioare momentului curent de reactualizare trebuie atenuată cu rapiditate controlată.
- Istoria comportamentului procesului poate distorsiona rezultatul operației de adaptare curentă dacă datele achiziționate devin rapid învechite şi tind să nu mai corespundă comportamentului actual al procesului.

Cum poate fi controlată atenuarea istoriei datelor?

Prin intermediul ferestrelor culisante fie de-a lungul setului de date, fie de-a lungul erorilor de predicţie.




$w_N$ ➔ Fereastră cu deschiderea determinată de dimensiunea orizontului de măsură.

window

☝ De regulă, nenegativă.

- Selecția datelor are loc prin înmulțirea valorilor ferestrei (ponderilor) cu valorile omoloage ale datelor.

☝ În cazul modelelor de regresie liniară, datele sunt ponderate de radicalul ferestrei.

- În acest curs, va fi abordată problema estimării recursive a parametrilor prin minimizarea unui criteriu pătratic în care pătratul erorii de predicție curente este ponderat de o fereastră culisantă nenegativă.

$$\mathcal{V}(\theta) \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{N} w_N[n]\varepsilon^2[n,\theta]$$

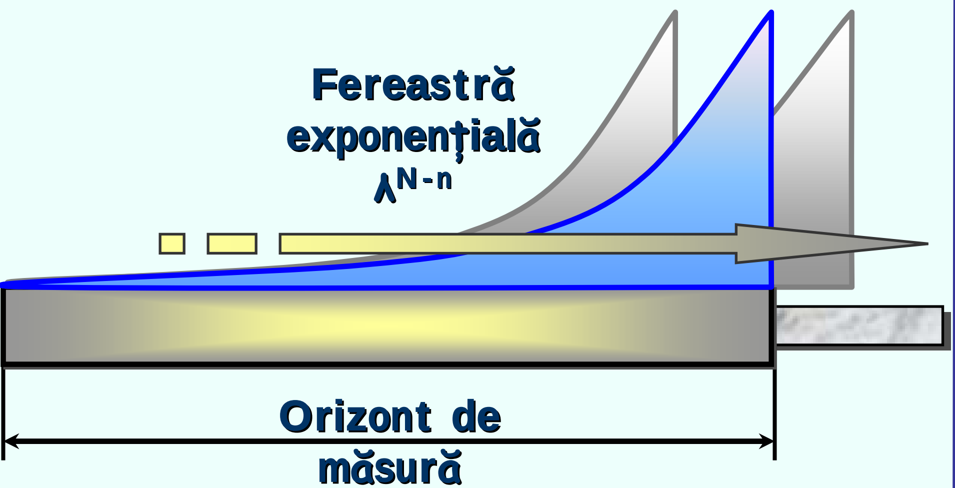
### ❹.❾ Metode adaptive de identificare

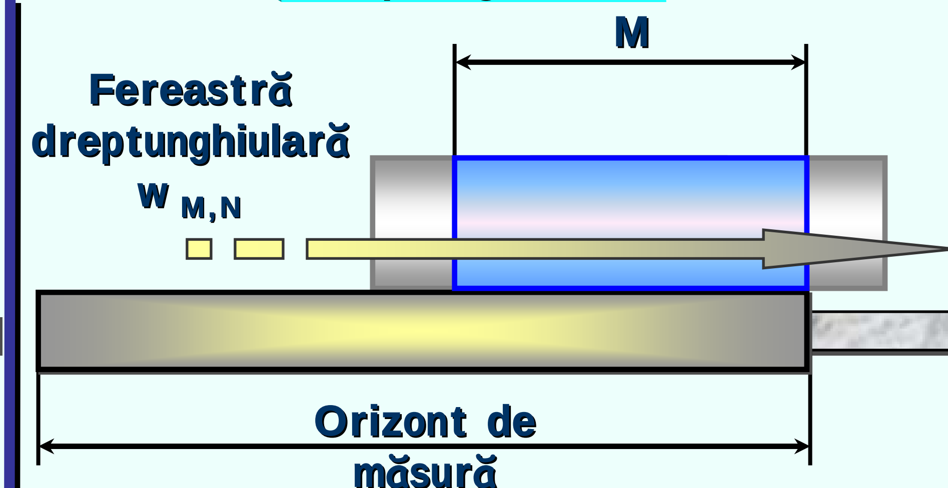
## MCMMP-R – variante cu fereastră (continuare)

- Deponderarea prea drastică a datelor implică deteriorarea sensibilă a preciziei modelului de identificare, astfel că fereastra trebuie aleasă cu atenție.
- Aplicarea ferestrelor de ponderare asupra datelor este o operație frecvent întîlnită în aplicațiile de PS.
- Spre deosebire de ferestrele din aplicațiile de PS (care, de regulă, sunt simetrice pe orizontul de măsură), ferestrele utilizate în aplicațiile de IS pot fi asimetrice.

### Ferestre de culisare frecvent utilizate în aplicațiile de IS

**Exponențială** | **Dreptunghiulară**




$$w_N[n] \overset{def}{=} \lambda^{N-n} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Factor de uitare

☝ De regulă

$\lambda \in [0.95\,,\,1]$

$$w_{M,N}[n] \overset{def}{=} \begin{cases} 1 & , n \in \overline{N-M+1, N} \\ 0 & , n \in \overline{1, N-M} \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$


## MCMMP-R – variante cu fereastră (continuare)

Exerciţii: MCMMP-Rλ, MVI-Rλ (deducerea relaţiilor recursive, algoritmul eficient, iniţializare, consistenţă)

## MCMMP-R cu fereastră dreptunghiulară (MCMMP-R□)

- Dacă apare problema înlăturării complete a datelor învechite, mai utilă este fereastra dreptunghiulară, care permite aplicarea unui factor de uitare totală asupra datelor situate în afara deschiderii sale.

$$w_{M,N}[n] \overset{def}{=} \begin{cases} 1 & , \ n \in \overline{N-M+1,N} \\ 0 & , \ n \in \overline{1,N-M} \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{\theta}) \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{N} w_N[n]\varepsilon^2[n,\boldsymbol{\theta}] = \sum_{n=N-M+1}^{N} \varepsilon^2[n,\boldsymbol{\theta}]$$

MCMMP off-line

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \boxed{\left(\sum_{n=k-M+1}^{k} \boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]\right)^{-1}} \left(\sum_{n=k-M+1}^{k} \boldsymbol{\varphi}[n]y[n]\right) \quad \forall k \geq M$$

- Pentru a deduce expresia corecţiei, se adoptă aceeaşi strategie ca în cazul MCMMP-R.
- Relaţia recurentă a inverselor matricilor $\mathbf{P}_k$ :

$\mathbf{P}_k$ ← Simetrică şi strict pozitiv definită.

$$\mathbf{P}_k^{-1} \overset{def}{=} \sum_{n=k-M+1}^{k} \boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n] = \boxed{\sum_{n=k-M}^{k-1} \boldsymbol{\varphi}[n]\boldsymbol{\varphi}^T[n]} - \boldsymbol{\varphi}[k-M]\boldsymbol{\varphi}^T[k-M] + \boldsymbol{\varphi}[k]\boldsymbol{\varphi}^T[k] =$$

$$\mathbf{P}_{k-1}^{-1}$$

$$= \mathbf{P}_{k-1}^{-1} - \boldsymbol{\varphi}[k-M]\boldsymbol{\varphi}^T[k-M] + \boldsymbol{\varphi}[k]\boldsymbol{\varphi}^T[k] \ , \ \forall k \geq M+1.$$

### MCMMP-R – variante cu fereastră: MCMMP-R□ (continuare)

- Urmează deducerea expresiei corecției:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \mathbf{P}_k\left(\sum_{n=k-M+1}^{k}\varphi[n]y[n]\right) = \mathbf{P}_k\left(\underbrace{\sum_{n=k-M}^{k-1}\varphi[n]y[n]}_{\mathbf{P}_{k-1}^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}} - \varphi[k-M]y[k-M] + \varphi[k]y[k]\right) =$$

$$\mathbf{P}_{k-1}^{-1} = \mathbf{P}_k^{-1} + \varphi[k-M]\varphi^T[k-M] - \varphi[k]\varphi^T[k]$$

$$= \mathbf{P}_k\left(\mathbf{P}_{k-1}^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} - \varphi[k-M]y[k-M] + \varphi[k]y[k]\right) =$$

$$= \mathbf{P}_k\left[\left(\mathbf{P}_k^{-1} + \varphi[k-M]\varphi^T[k-M] - \varphi[k]\varphi^T[k]\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} - \varphi[k-M]y[k-M] + \varphi[k]y[k]\right] =$$

$$= \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} - \mathbf{P}_k\varphi[k-M]\left(y[k-M] - \varphi^T[k-M]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}\right) + \mathbf{P}_k\varphi[k]\left(y[k] - \varphi^T[k]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}\right), \ \forall k \geq M+1.$$

**Aşadar**

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \underbrace{- \mathbf{P}_k\varphi[k-M]\left(y[k-M] - \varphi^T[k-M]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}\right)}_{\Delta_{b,k}} + \underbrace{\mathbf{P}_k\varphi[k]\left(y[k] - \varphi^T[k]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}\right)}_{\Delta_{f,k}}$$

$\forall k \geq M+1$

☝ Corecția este formată din 2 termeni.

$\Delta_{b,k}$ Corecție a priori — backward

Corecție a posteriori $\Delta_{f,k}$ — forward

- Pentru a putea determina corecțiile, trebuie evaluate:

$$\varepsilon_b[k-M] \overset{def}{=} y[k-M] - \varphi^T[k-M]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}$$

➔ Eroarea de predicție a priori (prognoză în trecut).

$$\varepsilon_f[k] \overset{def}{=} y[k] - \varphi^T[k]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}$$

➔ Eroarea de predicție a posteriori (prognoză în viitor).

☝ Folosind numai datele delimitate de fereastra dreptunghiulară.